44 РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА

13.03.2021

Задачите кои се се објавени во Сигма, а се искористени за натпреварот, се модифицирани.

Прва година

А1. Анастас, Елена, Петар и Мартина, во исчекување на резултатите од регионалниот натпревар по математика, коментирале околу нивниот можен пласман на државниот натпревар. Анастас рекол „ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Елена ќе се пласира на натпреварот“. Елена рекла „ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Петар ќе се пласира на натпреварот“. Петар рекол „ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Мартина ќе се пласира на натпреварот“. Сите овие искази се точни, меѓутоа само двајца ученици се пласирале на државниот натпревар. Кои се двајцата ученици кои се пласирале од регионален на државен натпревар?

Решение. Нека Анастас се пласирал на државниот натпревар. Тогаш, бидејќи сите искази се точни, од исказот на Анастас – „ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Елена ќе се пласира“, тогаш ќе мора и Елена да се пласирала на државниот натпревар. Но, од исказот на Елена –„ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Петар ќе се пласира на натпреварот“, ќе мора и Петар да се пласирал на натпреварот. Од исказот на Петар, „ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Мартина ќе се пласира“, следува дека и Мартина се пласирала на државниот натпревар. Во овој случај добивме дека сите 4 ученици се пласирале на државниот натпревар, што е контрадикција. Значи, Анастас не се пласирал на државниот натпревар. **(5)**

Нека Анастас не се пласирал, но нека Елена се пласирала на државниот натпревар. Од нејзиниот исказ – „ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Петар ќе се пласира на натпреварот“, ќе мора и Петар да се пласира на натпреварот. Од исказот на Петар, „ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Мартина ќе се пласира“, следува дека и Мартина се пласирала на државниот натпревар. Во овој случај добивме дека 3 ученици се пласирале на државниот натпревар, што е контрадикција. Значи, Елена не се пласирала на државниот натпревар. **(5)**

Нека Анастас и Елена не се пласирале, но нека Петар се пласирал на државниот натпревар. Тогаш од неговиот исказ - „ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Мартина ќе се пласира“, следува дека и Мартина се пласирала на државниот натпревар, па во овој случај имаме само 2 пласирани учесници, Петар и Мартина, **(7)** а вистиноста на првите два искази е точна затоа што $\tau(F \Rightarrow p) = T$, каде F е неточен исказ, T е точен исказ, а p е произволен исказ. Значи, на државниот натпревар се пласирале само Петар и Мартина. **(8)**

ЗАБЕЛЕШКА: Ако се покаже дека е можно Петар и Мартина да се тие кои се пласирале на државниот натпревар, но при тоа не се покаже дека нуту Анастас, ниту Елена не може да се пласирале на државниот натпревар, се добиваат само 15 поени.

Б1. Диме има два пати повеќе браќа од сестри, а неговата сестра Марија има пет пати повеќе браќа од сестри. Колку браќа и колку сестри има во таа фамилија?

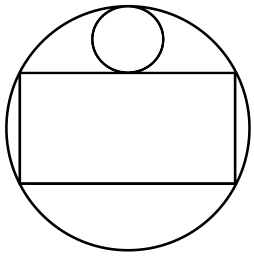
Решение. Нека во семејството има x машки деца и y женски деца. Бројот на сестри кои го има Диме е y, а бројот на браќа е $x-1$. Па, од условот на задачата имаме дека $x-1=2y$. Бројот на сестри кои го има Марија е $y-1$, а бројот на браќа е x. Тогаш, имаме дека $x=5(y-1)$. **(15)**

Со решавање на системот равенки $x-2y=1$ и $5y-x=5$, добиваме дека $x=5$ и $y=2$. **(10)**

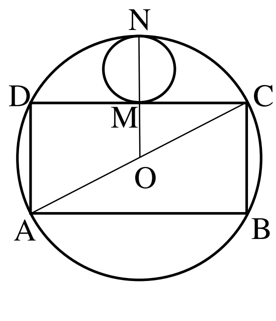
АБ2. (Сигма 118, стр. 21, зад. 1) Правилната дропка $\frac{a}{b}$ може да се претстави во обликот $\frac{6}{n}-\frac{9}{n^2}$, каде што n е природен број. Одреди ја вредноста на a, ако $b-a=961$.

Решение. Од условот на задачата $\frac{a}{b}=\frac{6}{n}-\frac{9}{n^2}=\frac{6n-9}{n^2}$. **(5)** Дропката $\frac{a}{b}$ е правилна дропка, односно нескратлива дропка, па мора да важи дека a и b се заемно прости броеви. Тоа би значело дека НЗД$(a,b)=1$, па и НЗД$\left(6n-9,n^2\right)=1$. Тогаш, мора да важи дека $a=6n-9$ и $b=n^2$. **(5)** Ако замениме во условот дека $b-a=961$, добиваме $n^2-6n+9=961$, односно $(n-3)^2=961$. **(10)** Одовде, следува дека $n-3=31$, односно $n=34$. Тогаш, $a=6\cdot 34-9=195$. **(5)**

АБ3. (Сигма 119, стр. 48, зад.4) Во една кружница е впишан правоаголник, а во еден од кружните отсечоци е впишана најголема можна кружница, која допира една страна на правоаголникот и ја допира одвнатре поголемата кружница, како на цртежот. Радиусот на помалата кружница е 3 единици, а големата кружница има радиус $r>3$. Познато е дека правоаголникот има плоштина $P=72\sqrt{2}$ квадратни единици. Одреди го радиусот r на поголемата кружница.



Решение.



Нека страните на правоаголникот се $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ и $\overline{BC}=\overline{AD}=b$. Од цртежот имаме дека $r=\overline{ON}=\overline{OM}+\overline{MN}=\frac{b}{2}+6$, од каде $b=2(r-6)$ …..(1). **(5)**

Триаголникот ABC е правоаголен, па од Питагоровата теорема имаме $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$, односно $a^2+b^2=(2r)^2$ ……(2).

Сега, равенството (1) го заменуваме во равенството (2) и добиваме

$$a^2=4r^2-4(r-6)^2=48r-144=48(r-3)\,.\ \mathbf{(5)}$$

За поедноставно, ќе го пресметаме квадратот на плоштината на правоаголникот:

$$P^2=a^2b^2=48(r-3)\cdot 4(r-6)^2=192(r-3)(r-6)^2,$$

при што важи $192(r-3)(r-6)^2=\left(72\sqrt{2}\right)^2$. По средувањето на изразот добиваме $(r-3)(r-6)^2=54$. **(5)**

(Истиот израз се добива ако се пресмета плоштината P и добиениот израз се квадрира)

Ако воведеме смена $x=r-3$ равенката преминува во облик $x(x-3)^2=54$, односно $x^3-6x^2+9x-54=0$. Со групирање, левата страна ја разложуваме на множители $x^2(x-6)+9(x-6)=0$, од каде $(x-6)(x^2+9)=0$. **(5)** Бидејќи $x^2+9>0$, следи дека $x-6=0$, односно $x=6$, па $r-3=6$, од каде $r=9$ единици. **(5)**

А4. Најди ги сите четирицифрени броеви од обликот $\overline{xyzt}$, кои ги задоволуваат равенките $\overline{ztx}-\overline{xyz}=495$ и $x+y+z=17$.

Решение. Од првата равенка добиваме дека $x+10t+100z-100x-10y-z=495$, односно $99\left(z-x-5\right)=10(y-t)$....(*). **(10)** Левата страна на последното равенство е делива со бројот 11, што значи дека мора и десната страна да е делива со 11. Броевите 11 и 10 се заемно прости, па мора да важи дека $11\,|\left(y-t\right)$. Бидејќи $y,t\in\{0,1,...,9\}$, следи дека $y-t=0$, односно $y=t$. Ако десната страна на (*) е 0, тогаш мора да важи дека $z-x-5=0$, односно $z=x+5$. Со замена во втората равенка $x+y+z=17$, добиваме дека $y=2\left(6-x\right)$. **(10)** Задаваме вредности за цифрата x, ги добиваме за y, z и t. Па, бараните броеви се: 2878, 4494 и 3686. **(5)**

Б4. Во една продавница има три типа на џамлии: од 1 денар, од 2 денари и од 6 денари. На колку начини од таа продавница, може за 50 денари да се купат 30 џамлии, така што од секој вид џамлии да се купи барем по една џамлија?

Решение. Нека со x ги означиме бројот на џамлии од 1 денар, со y бројот на џамлии од 2 денари и со z оние кои чинат 6 денари. Тогаш, имаме дека $x+y+z=30$ и $x+2y+6z=50$, каде $x,y,z\geq 1$ се цели броеви. **(10)**

Ако првата равенка ја одземеме од втората, добиваме дека $y+5z=20$, односно $5z=20-y$. Бидејќи $z\in\mathbb{N}$, мора да важи дека $5\,|\left(20-y\right)$, а одовде пак следува дека $20-y\in\{5,10,15\}$. Конечно $y\in\{5,10,15\}$. **(10)**

Да ги одредиме уште вредностите на другите две променливи:

- Ако $y=5$, тогаш $z=\dfrac{20-5}{5}=3$ и $x=30-y-z=30-5-3=22$.
- Ако $y=10$, тогаш $z=\dfrac{20-10}{5}=2$ и $x=30-y-z=30-10-2=18$.
- Ако $y=15$, тогаш $z=\dfrac{20-15}{5}=1$ и $x=30-y-z=30-15-1=14$. **(5)**

Втора година

АБ1. (Сигма 118, стр. 35, зад. 1569) Нека x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2+ax+b=0$, а y_1 и y_2 се решенија на равенката $y^2+(a+1)y+b+1=0,\ a,b\in\mathbb{R}$. Пресметај ја вредноста на изразот $(x_1-y_1)(x_1-y_2)+(x_2-y_1)(x_2-y_2)$.

Решение. Од Виетовите формули ги имаме равенствата $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=b$, $y_1+y_2=-a-1$ и $y_1y_2=b+1$ **(5).** Тогаш:

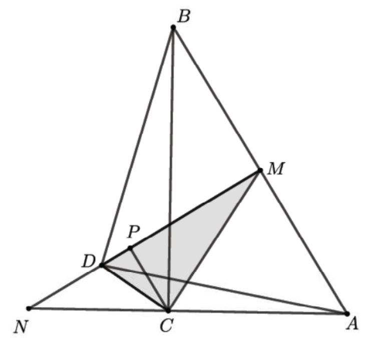
$(x_1-y_1)(x_1-y_2)+(x_2-y_1)(x_2-y_2)=x_1^{\,2}-(y_1+y_2)x_1+y_1y_2+x_2^{\,2}-(y_1+y_2)x_2+y_1y_2=$ **(5)**

$=x_1^{\,2}+(a+1)x_1+b+1+x_2^{\,2}+(a+1)x_2+b+1=$ **(5)**

$=x_1^{\,2}+ax_1+b+x_2^{\,2}+ax_2+b+x_1+x_2+2=$ **(5)**

$=0+0-a+2=2-a$ **(5).**

АБ2. (Сигма 117, стр. 42, зад. 1) Во триаголникот ABC познати се $\overline{AC}=6\,\text{cm}$, $\overline{BC}=8\text{cm}$ и $\angle ACB=90°$. Точката M е средина на отсечката AB, а точката D лежи на истата страна од отсечката AB како и точката C, но така што $\overline{DA}=\overline{DB}=7\,\text{cm}$. Пресметај ја плоштината на триаголникот CDM.



Решение. Од Питагоровата теорема за триаголникот ABC следува дека $\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10\,\text{cm}$ (**3**). Триаголникот ADB е рамнокрак триаголник, па во него тежишната линија повлечена од врвот D е истовремено и висина. Заради тоа триаголникот DMB е правоаголен триаголник и $\overline{DM}=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}\,\text{cm}$ (**4**). Нека N е пресечната точка на правите DM и AC (**3**). Триаголниците NAM и BAC се слични (имаат еднакви агли) и од нивната сличност важи $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BA}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{NA}}$. Тогаш, $\overline{NA}=\dfrac{\overline{AM}\cdot\overline{BA}}{\overline{AC}}=\dfrac{5\cdot 10}{6}=\dfrac{25}{3}\text{cm}$ (**6**). Нека CP е висината во триаголникот CDM спуштена од темето C. Тогаш и триаголниците NCP и NAM се слични (имаат еднакви агли) и затоа важи $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{NC}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{NA}}$, т.е. $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{NA}-\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{NA}}$. Оттука $\overline{CP}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{NA}}(\overline{NA}-\overline{AC})=\dfrac{5}{\frac{25}{3}}(\dfrac{25}{3}-6)=\dfrac{7}{5}\text{cm}$ **(6).**

За плоштината на триаголникот CDM имаме $P=\dfrac{\overline{DM}\cdot\overline{CP}}{2}=\dfrac{2\sqrt{6}\cdot\frac{7}{5}}{2}=\dfrac{7\sqrt{6}}{5}\text{cm}^2$ **(3)**

А3. Нека z_1, z_2 и z_3 се комплексни броеви за коишто важи $|z_1|=|z_2+z_3|$, $|z_2|=|z_3+z_1|$ и $|z_3|=|z_1+z_2|$. Докажи дека $z_1+z_2+z_3=0$.

Решение 1. Нека $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$ и $z_3 = e+if$. Од условите во задачата важат: $a^2+b^2=(c+e)^2+(d+f)^2$, $c^2+d^2=(e+a)^2+(f+b)^2$ и $e^2+f^2=(a+c)^2+(b+d)^2$ **(6)**
Ако ги собереме трите равенства, добиваме
$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=2(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)+2(ce+df+ea+fb+ac+bd)$
и оттука $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2(ce+df+ea+fb+ac+bd)=0 \ldots (*)$**(6)**.
Модулот на квадрат на $z_1+z_2+z_3$ е еднаков на
$(a+c+e)^2+(b+d+f)^2=a^2+c^2+e^2+b^2+d^2+f^2+2(ac+ae+ce+bd+bf+df)$ **(6),**
и поради (*) добиваме $(a+c+e)^2+(b+d+f)^2=0$ **(3).**
Затоа, $z_1+z_2+z_3=0$ **(4).**

Решение 2. Од $|z_1|=|z_2+z_3|$ следува $|z_1|^2=|z_2+z_3|^2$ и оттука $z_1\overline{z_1}=(z_2+z_3)\overline{(z_2+z_3)}=$
$=z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}$.
Слично, $z_2\overline{z_2}=z_3\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}+z_1\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}$ и $z_3\overline{z_3}=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$ **(6)**.
Ако ги собереме сите три равенства добиваме
$z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}=z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}+z_3\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}+z_1\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$ и оттука следува $0=z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}+z_1\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$ **(6)**.
Тогаш, $0=z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}+z_1\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=$
$=(z_2+z_3+z_1)\overline{z_3}+(z_3+z_1+z_2)\overline{z_2}+(z_3+z_1+z_2)\overline{z_1}=(z_2+z_3+z_1)(\overline{z_3}+\overline{z_2}+\overline{z_1})=|z_1+z_2+z_3|^2$ **(6)**
и бидејќи модулот е ненегативен број добиваме $|z_1+z_2+z_3|=0$ **(3)**, па затоа $z_1+z_2+z_3=0$ **(4).**

А4. Силвија избрала три природни броеви a, b и c. Петар добил дека вредноста на $a+\frac{b}{c}$ е 101, Лина добила дека вредноста на $\frac{a}{c}+b$ е 68, а Марија дека вредноста на $\frac{a+b}{c}$ е k. Најди ги a, b, c и k.

Решение. Од $a+\frac{b}{c}=101$ и a е природен број следува дека $\frac{b}{c}$ е природен број и затоа $b=cx$, каде x е природен број **(2)**. Слично, од $\frac{a}{c}+b=68$ следува дека $\frac{a}{c}$ е природен број и затоа $a=cy$, каде y е природен број **(2)**. Имаме $a+x=101$ и $y+b=68$ и оттука $a+x+y+b=169$ **(2)**. Бидејќи $k=\frac{a+b}{c}$, следува и дека k е природен број, и уште $k=x+y$. Имаме, $cy+x+y+cx=169$, $(x+y)(c+1)=169$ т.е. $k(c+1)=169$ **(5)**. Делители (природни) на 169 се 1, 13 и 169. Бидејќи $k=x+y\geq 1+1=2$ имаме дека $k\neq 1$, а бидејќи $c+1\geq 1+1=2$ следува дека $k\neq 169$ **(4)**. Затоа, $k=13$ и $c+1=13$, т.е. $c=12$ **(2)**. Од $\frac{a}{c}+b=68$, следува дека $b\leq 68$ и е делив со 12. Затоа, $b\in\{12,24,36,48,60\}$ **(3)**. Бидејќи

$a+k+b=169$ имаме $a+b=156$ и оттука $a=156-b\in\{144,132,120,108,96\}$ (**3**). Од $a+\frac{b}{c}=101$, следува дека $a\leq 101$ и тогаш имаме $a=96$, $b=60$ (**2**). Конечно, $a=96$, $b=60$, $c=12$ и $k=13$.

Б3. За линеарните функции $f(x)=mx+m^2-1$ и $g(x)=(m-1)x+m(m+2)$, $m\neq 0{,}1$, важи дека постои број a така што $f(a)=g(a)$. За кое m важи дека $|a|<3$?

Решение. Од условот $f(a)=g(a)$ следува дека $ma+m^2-1=(m-1)a+m(m+2)$ **(4)** и оттука $ma-(m-1)a=m(m+2)-m^2+1$, односно $a=2m+1$ **(6).** За да важи $|a|<3$, потребно е $-3<2m+1<3$ **(5),** па оттука $-4<2m<2$, односно $-2<m<1$ **(5).** Значи, $m\in(-2{,}1)\setminus\{0\}$ **(5).**

Б4. За реалните броеви $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2021}$ важи дека збирот на кои било три броеви чии индекси се последователни броеви $i, i+1, i+2$, $i=1,....,2019$, изнесува 2021. Ако $a_1=1000$ и $a_{2021}=900$, определи ги останатите.

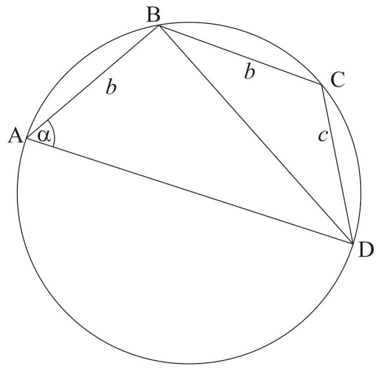
Решение. Го добиваме системот $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=2021 \\ a_2+a_3+a_4=2021 \\ \vdots \\ a_{2018}+a_{2019}+a_{2020}=2021 \\ a_{2019}+a_{2020}+a_{2021}=2021 \end{cases}$ **(6).** Од првите две равенки следува дека $a_1-a_4=0$, од следните две $a_2-a_5=0$, па $a_3-a_6=0$ и така натаму до $a_{2017}-a_{2020}=0$ и $a_{2018}-a_{2021}=0$ **(6).** Имаме $a_1=a_4=...=a_{2017}=a_{2020}=1000$ **(4),** $a_2=a_5=...=a_{2018}=a_{2021}=900$ **(4)** и тогаш за $a_3=a_6=a_9=...=a_{2016}=a_{2019}$ добиваме $a_3=a_6=...=a_{2019}=2021-1000-900=121$ **(5).**

Трета година

АБ1. Дадена е функцијата $f(x)=(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+(a-5),$ каде a е реален параметар. Одреди ги оние вредности на параметарот a од множеството природни броеви, за кои функцијата f има еден корен поголем од 1, а другиот помал од 1?

Решение. Коефициентот пред квадратниот член, $a^2+a+1,$ е позитивен па функцијата f е конвексна (отворена нагоре). **(5)** Нека x_1 и x_2 се корените на равенката $f(x)=0.$ Да претпоставиме дека $x_1<x_2$, па согласно условот на задачата мора $x_1<1<x_2.$ Од конвексноста на функцијата јасно е дека за секој $x\in(x_1,x_2)$ (вклучително и за 1) важи $f(x)<0.$ **(10)** Оттука важи и $f(1)<0,$ односно $a^2+a+1+2a-3+a-5<0$ од каде ја добиваме квадратната неравенка $a^2+4a-7<0.$ **(5)** Од неравенката добиваме $a\in\left(-2-\sqrt{11},-2+\sqrt{11}\right).$ Ги бараме само природните вредности на параметарт $a,$ па единствена таква вредност е $a=1.$ **(5)**

А2. (Сигма 116, стр. 34, зад. 3) Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник така што важи: $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{3}$, $\overline{CD}=2$ и $\measuredangle BAD=30^{\circ}.$ Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.



Решение. Нека $\overline{AB}=\overline{BC}=b=\sqrt{3}\,,\overline{CD}=c=2$ и $\measuredangle BAD=30^{\circ}.$ Четириаголникот $ABCD$ е тетивен четириаголник па $\measuredangle BCD=180^{\circ}-30^{\circ}=150^{\circ}.$ **(5)** Ќе ја искористиме косинусната теорема, применета на ΔBAD и ΔBCD, соодветно. Од ΔBAD имаме

$$\overline{BD}^2=b^2+\overline{AD}^2-2b\cdot\overline{AD}\cos 30^{\circ},$$

а пак од ΔBCD имаме

$$\overline{BD}^2=b^2+c^2-2bc\cos 150^{\circ}.\ \mathbf{(5)}$$

Со изедначување на двете равенства добиваме дека

$b^2+\overline{AD}^2-2b\cdot\overline{AD}\cos 30^{\circ}=b^2+c^2-2bc\cos 150^{\circ}$, односно

$\overline{AD}^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\overline{AD}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4+2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Значи добиваме квадратна равенка по должината на страната AD, $\overline{AD}^2-3\cdot\overline{AD}-10=0,$ а решение по $\overline{AD}$ е само позитивниот корен, $\overline{AD}=5.$ **(10)**

Сега за плоштината на четириаголникот $ABCD$ ќе искористиме дека

$$P_{\square ABCD}=P_{\Delta ABD}+P_{\Delta BCD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}\sin 30^{\circ}+\frac{\overline{BC}\cdot\overline{DC}}{2}\sin 150^{\circ},$$

од каде со замена добиваме

$$P_{\square ABCD}=\frac{\sqrt{3}\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$$ квадратни единици. **(5)**

Б2. (Сигма 119, стр. 49, зад. 3) Докажи дека за секоја вредност на променливата x од множеството $\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\}$ важи неравенството $16\sin^2 x - 9\text{tg}^2 x \le 1$.

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со $16\sin^2 x - 9\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 \le 0$. Заради дефиниционата област на функцијата $\text{tg}x$ мора да важи $\cos x \ne 0$, односно $x \ne (2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **(5)** За секоја вредност на x од множеството $\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\}$ последното неравенство може да го помножиме со $\cos^2 x$. Тогаш добиваме

$$16\sin^2 x - 9\text{tg}^2 x - 1 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16\sin^2 x\cos^2 x - 9\sin^2 x - \cos^2 x \le 0. \ \textbf{(5)}$$

Овде, по замената на основното тригонометриско равенство $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ги добиваме следните еквивалентни неравенства:

$$16\sin^2 x(1-\sin^2 x) - 9\sin^2 x - (1-\sin^2 x) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(4\sin^2 x - 1\right)^2 \ge 0. \ \textbf{(10)}$$

Последното важи за секоја вредност на променливата, а заради еквивалентноста на чекорите важи тврдењето на задачата. **(5)**

АБ3. (Сигма 114, стр. 30, зад. 3) Реши го системот за $x, y\in\mathbb{R}$, $y>1$

$$\begin{cases} 2\log_{y+2}(x^2+3y+y^2) - \log_{x^2+3y+y^2}(y^3+x^2y+5y^2+2x^2+6y) = \frac{5}{2} \\ y^3 + x^2 = 134 \end{cases}.$$

Решение. Користејќи го разложувањето $y^3+x^2y+5y^2+2x^2+6y = (x^2+3y+y^2)(y+2)$, од својствата на логаритмите добиваме дека

$$\log_{x^2+3y+y^2}(y^3+x^2y+5y^2+2x^2+6y) = \log_{x^2+3y+y^2}(x^2+3y+y^2)(y+2) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\log_{y+2}(x^2+3y+y^2)}. \quad \textbf{(10)}$$

Да означиме $\log_{y+2}(x^2+3y+y^2) = A$. Забележуваме дека за $y>1$ важи $y+2>1$ и $x^2+3y+y^2>1$, од каде $A = \log_{y+2}(x^2+3y+y^2) > 0$. Заменувајќи во првата равенка на системот добиваме равенка $2A - 1 - \frac{1}{A} = \frac{5}{2}$, еквивалентна со равенката $4A^2 - 7A - 2 = 0$, а чии решенија се $A = -\frac{1}{4}$ и $A = 2$. Од двете решенија за A, останува да го разгледаме само случајот кога $A = 2$. **(8)**

Сега со замена добиваме $(y+2)^2 = x^2+3y+y^2$, од каде $y+4 = x^2$.

Добиениот услов ќе го замениме во втората равенка од системот. Добиваме $y^3 + x^2 = y^3 + y + 4 = 134$, од каде $y^3 + y - 130 = 0$. Последниов израз со додавање и одземање на членови може да се запише во облик $y^3 - 5y^2 + 5y^2 + y - 130 = 0$ и да се разложи до $y^2(y-5)+(5y+26)(y-5)=0$, односно $(y-5)(y^2+5y+26)=0$. Јасно за $y>1$ важи $y^2+5y+26>0$ па останува само можноста $y=5$ и од таму и $x=\pm 3$. **(7)**

А4. Пресметај ја вредноста на изразот $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\cdot\ldots\cdot\cos 1010x$ за $x=\dfrac{2\pi}{2021}$.

Решение. Да воведеме ознаки:
$P=\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\cdot\ldots\cdot\cos 1010x$ и $Q=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\cdot\ldots\cdot\sin 1010x$.
Ќе го разгледаме и трансформираме изразот $2^{1010}\cdot P\cdot Q$

$$2^{1010}\cdot P\cdot Q=2\cos x\cdot\sin x\cdot 2\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot\ldots\cdot 2\cos 1010x\cdot\sin 1010x$$

Користејќи ја формулата $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ за двоен агол за сите парови и промената на функцијата $\sin\alpha=-\sin(2\pi-\alpha)$ за втората половина од добиените синуси, го трансформираме горниот израз на следниот начин:

$$\begin{aligned}2^{1010}\cdot P\cdot Q&=2\cos x\cdot\sin x\cdot 2\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot\ldots\cdot 2\cos 1010x\cdot\sin 1010x\\&=\sin 2x\cdot\sin 4x\cdot\ldots\cdot\sin 1010x\cdot\sin 1012x\cdot\ldots\cdot\sin 2020x=\\&=\sin 2x\cdot\sin 4x\cdot\ldots\cdot\sin 1010x\cdot(-\sin(2\pi-1012x))\cdot\ldots\cdot(-\sin(2\pi-2020x))=\\&=\sin 2x\cdot\sin 4x\cdot\ldots\cdot\sin 1010x\cdot\sin(2\pi-1012x)\cdot\ldots\cdot\sin(2\pi-2020x)\cdot(-1)^{505}\quad\textbf{(10)}\end{aligned}$$

Во следниот чекор, секој израз $\sin(2\pi-2kx)$, $k=506,\ldots,1010$ ќе го трансформираме заменувајќи ја вредноста на $x=\dfrac{2\pi}{2021}$.

Имаме,

$$\sin(2\pi-1012x)=\sin\left(2\pi-1012\cdot\frac{2\pi}{2021}\right)=\sin\left(2\pi\left(1-\frac{1012}{2021}\right)\right)=\sin 2\pi\frac{1009}{2021}=\sin 1009x$$

На истиот начин, $\sin(2\pi-1014x)=\sin 1007x,\ \sin(2\pi-1016x)=\sin 1005x,\ldots$, се до последниот член $\sin(2\pi-2020x)=\sin 2\pi\left(1-\dfrac{2020}{2021}\right)=\sin 2\pi\dfrac{1}{2021}=\sin x$. **(5)**

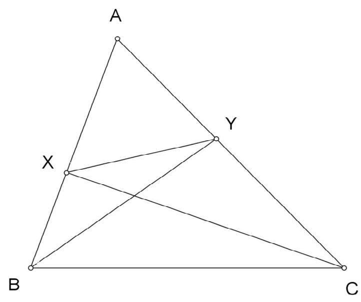
Ја продолжуваме низата трансформации со:

$$\begin{aligned}2^{1010}\cdot P\cdot Q&=\sin 2x\cdot\sin 4x\cdot\ldots\cdot\sin 1010x\cdot\sin(2\pi-1012x)\cdot\ldots\cdot\sin(2\pi-2020x)\cdot(-1)^{505}=\\&=\sin 2x\cdot\sin 4x\cdot\ldots\cdot\sin 1010x\cdot\sin 1009x\cdot\sin 1007x\cdot\ldots\cdot\sin x\cdot(-1)^{505}=\\&=-\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\cdot\ldots\cdot\sin 1010x=-Q.\quad\textbf{(5)}\end{aligned}$$

Секој член $\sin kx=\sin\dfrac{2k\pi}{2021}, k=1,2,\ldots 1010$ е различен од нула. Имено $2\le 2k\le 2020$, па $0<\dfrac{2}{2021}\pi\le\dfrac{2k\pi}{2021}\le\dfrac{2020}{2021}\pi<\pi$, од каде $\sin kx\ne 0$, за $k=1,2,\ldots 1010$. Тогаш и производот $Q\ne 0$, од каде за равенката $2^{1010}\cdot P\cdot Q=-Q$ добиваме $P=-\dfrac{1}{2^{1010}}$. **(5)**

Б4. Даден е триаголник ABC за кој $\overline{AB}=20$. На страните $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ на триаголникот ABC се избрани точки X и Y така што $\overline{AX}=\overline{AY}=15$ и плоштината на триаголникот ABC е два пати поголема од плоштината на триаголникот AXY. Најди го односот на плоштините на триаголниците BXY и CXY.

Решение. Да го означиме аголот во темето A со α. За плоштината на двата триаголници имаме $P_{\Delta ABC}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\alpha}{2}=10\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha=2\cdot P_{\Delta AXY}$



и $P_{\Delta AXY}=\dfrac{\overline{AX}\cdot\overline{AY}\cdot\sin\alpha}{2}=\dfrac{225\cdot\sin\alpha}{2}$. **(5)**

Тогаш според условот $10\cdot\overline{AC}\sin\alpha=225\cdot\sin\alpha$, па оттука $10\cdot\overline{AC}=225$, односно $\overline{AC}=\dfrac{45}{2}$.

Сега $\overline{XB}=5$ и $\overline{YC}=\dfrac{15}{2}$. **(5)**

Триаголниците AXY и BXY имаат заедничка висина спуштена од темето Y па затоа $\dfrac{P_{\Delta AXY}}{P_{\Delta BXY}}=\dfrac{\overline{AX}}{\overline{BX}}=3$. **(5)** Слично, триаголниците CYX и AYX имаат заедничка висина спуштена од темето X, па оттука важи $\dfrac{P_{\Delta AXY}}{P_{\Delta CXY}}=\dfrac{\overline{AY}}{\overline{CY}}=2$. **(5)** Тогаш бараниот однос на плоштините на триаголниците BXY и CXY е $\dfrac{P_{\Delta BXY}}{P_{\Delta CXY}}=\dfrac{\frac{P_{\Delta AXY}}{3}}{\frac{P_{\Delta AXY}}{2}}=\dfrac{2}{3}$. **(5)**

Четврта година

А1. (Сигма 116, стр. 34, зад. 3)

а) Нека f е реална функција дефинирана на $\mathbb{R}$. Најди ја реалната функција $g(x)$, ако $f(x)=3x+2$ и $f\left(x^2+xg(x)\right)=3x^2+6x+5$, за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

б) Нека $f(x)=x+2$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Најди функција $g(x)$, таква што $f(g(f(x))=5x-1$.

Решение. а) Ако $f(x)=3x+2$, тогаш $f(x^2+xg(x))=3(x^2+xg(x))+2$, па имаме $3x^2+6x+5=3x^2+3xg(x)+2$, од каде $g(x)=\frac{6x+3}{3x}=2+\frac{1}{x}$, за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **(8)**
Со непосредна проверка добиваме дека важи условот

$$f(x^2+xg(x))=f\left(x^2+x\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)=f(x^2+2x+1)=3(x^2+2x+1)+2=3x^2+6x+5,$$

за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогаш $g(x)=2+\frac{1}{x}$ е бараната функција. **(4)**

б) Нека $f(x)=x+2$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Тогаш

$$f(g(f(x)))=g\left(f(x)\right)+2=g(x+2)+2. \quad \textbf{(3)}$$

Ако оваа функција ја изедначиме со функцијата $f(g(f(x)))=5x-1$, добиваме дека $g(x+2)+2=5x-1$, т.е. $g(x+2)=5x-3$, за секој $x\in\mathbb{R}$. **(3)**
Да ја најдеме функцијата $g(x)$. Воведуваме смена $t=x+2$, т.е. $x=t-2$ и добиваме $g(t)=5(t-2)-3$, односно $g(t)=5t-13$. Значи бараната функција е $g(x)=5x-13$, за секој $x\in\mathbb{R}$. **(5)** Со непосредна проверка добиваме дека важи условот

$$f(g(f(x)))=g\left(f(x)\right)+2=g(x+2)+2=5(x+2)-13+2=5x-1,$$

односно $g(x)=5x-13$ е бараната функција. **(2)**

А2. (Сигма 118, стр.22, зад. 3) Нека $a_1,a_2,a_3,....$ е низа од позитивни реални броеви која го исполнува условот $a_1=1$ и $a_{n+1}^2+a_{n+1}=a_n$, за секој природен број n. Докажи дека $a_n\geq\frac{1}{n}$ за секој природен број n.

Решение. Ќе го докажеме неравенството со помош на математичка индукција. Да забележиме дека е очигледно за $n=1$. Претпоставуваме дека неравенството $a_n\geq\frac{1}{n}$ е точно за некоја вредност на n. **(2)** Дефинираме функција f на множеството позитивни реални броеви, зададена со $f(x)=x^2+x.$ Оваа функција е монотоно растечка функција за $x>0.$ Споредено со зададената рекурентна врска, ова значи дека $f(a_{n+1})=a_n.$ Сега, место да покажеме дека $a_{n+1}\geq\frac{1}{n+1}$, доволно е да покажеме дека $f(a_{n+1})\geq f(\frac{1}{n+1})$. **(10)**

Имаме: $f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{n(n+1)^2}<\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{1}{n}\leq a_n=f(a_{n+1})$. **(10)**

Од $f(a_{n+1}) \geq f(\frac{1}{n+1})$, каде f е растечка функција на множеството позитивни реални броеви, следува дека и $a_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$. Со тоа тврдењето е покажано. **(3)**

А3. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се позитивни реални броеви за кои важи $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Докажи го неравенството $(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 1) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n - 1)^2$.

Решение. Без губење на општоста претпоставуваме дека $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$.
Бидејќи $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, важи $a_1 \geq 1 \geq a_n$. Оттука $a_1 + a_2 + \dots + a_n - 1 > 0$, $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 1 > 0$ и $a_1^2 + a_n^2 - 1 > 0$. **(8)** Нека $a_1^2 + a_n^2 - 1 = b_1^2, b_1 > 0$. Од неравенството меѓу квадратна и аритметичка средина за позитивните броеви $b_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ добиваме

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 1) = (n-1)(b_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2) \geq (b_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})^2. \quad \textbf{(10)}$$

Останува да докажеме дека $b_1 \geq a_1 + a_n - 1$, што е еквивалентно на $\sqrt{a_1^2 + a_n^2 - 1} \geq a_1 + a_n - 1$. Квадрирајќи го последното неравенство го добиваме еквивалентното неравенство $2(a_1 - 1)(1 - a_n) \geq 0$, кое важи заради горните услови. **(7)**

АБ4. За прв член на една геометриска прогресија е избран произволен сложен број, а за нејзин количник произволен прост делител на првиот член. Формираме нова низа така што секој нејзин член го претставува бројот на природните делители на соодветниот член од геометриската прогресија. Докажи дека новоформираната низа е аритметичка прогресија.

Решение. Нека $a_1 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot\cdot p_k^{\alpha_k}$ е прв член на геометриската прогресија каде $p_1, p_2, \dots, p_k$ се неговите прости делители, и нека p_i е избран количник за геометриската прогресија.
На тој начин ја добиваме низата:

$$a_1 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot\cdot p_i^{\alpha_i} \cdot\cdot p_k^{\alpha_k}, a_2 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot\cdot p_i^{1+\alpha_i} \cdot\cdot p_k^{\alpha_k}, \dots, a_n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot\cdot p_i^{n-1+\alpha_i} \cdot\cdot p_k^{\alpha_k}. \ \dots \ \textbf{(7)}$$

Новоформираната низа која се состои од бројот на природни делители на членовите од горната низа е следната:

$$b_1 = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\cdot(1+\alpha_i)\cdot\cdot(1+\alpha_k), b_2 = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\cdot(2+\alpha_i)\cdot\cdot(1+\alpha_k), \dots$$
$$\dots, b_n = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\cdot(n+\alpha_i)\cdot\cdot(1+\alpha_k). \quad \textbf{(10)}$$

Нека $S = \frac{b_1}{(1+\alpha_i)}$. Јасно $b_1 = S\alpha_i + S$. Аналогно добиваме

$$b_2 = S(2+\alpha_i) = S\alpha_i + 2S, \dots, b_n = S(n+\alpha_i) = S\alpha_i + nS.$$

Оттука следува дека низата $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ е аритметичка прогресија со разлика $d = S$. **(8)**

Б1. (**Сигма 119, стр. 48, зад. 1**) Одреди ги сите парови природни броеви (a,b) за кои $a \leq b$ и притоа важи $\left(a + \frac{6}{b}\right)\left(b + \frac{6}{a}\right) = 25$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик $ab+\frac{36}{ab}+12=25$. Оттука, еквивалентните трансформации на равенката се:

$$(ab)^2-13ab+36=0,$$
$$(ab)^2-4ab-9ab+36=0,$$
$$ab(ab-4)-9(ab-4)=0, \text{ т.е.}$$
$$(ab-4)(ab-9)=0. \quad \mathbf{(15)}$$

Оттука, $ab=4$ или $ab=9$. Имајќи предвид дека $a,b\in N$ и $a\leq b$, имаме дека:

- ако $ab=4$, тогаш $(a,b)=(1,4)$ или $(a,b)=(2,2)$;
- ако $ab=9$, тогаш $(a,b)=(1,9)$ или $(a,b)=(3,3)$.

Со проверка добиваме дека сите четири пара природни броеви се решение на дадената равенка. **(10)**

Б2. (Сигма 114, стр.30, зад.2) За која вредност на x, низата $\sqrt{x-7}$, $\sqrt[4]{2x+19}$, $\sqrt{x+3}$ е геометриска прогресија?

Решение. Најпрво, да утврдиме дека $x\geq 7$. **(4)**

Овие членови образуваат геометриска прогресија ако и само ако важи:

$$\left(\sqrt[4]{2x+19}\right)^2=\sqrt{x-7}\cdot\sqrt{x+3} \quad \text{односно} \quad 2x+19=(x-7)(x+3). \quad \mathbf{(13)}$$

После средувањето се добива равенката $x^2-6x-40=0$, чии решенија се $x_1=-4$ и $x_2=10$. **(5)** Поради условот, x_1 не може да биде решение, па значи единствена вредност на x за која членовите ќе образуваат геометриска прогресија е 10. **(3)**

Б3. Пресметај го збирот $\binom{2021}{1}+2\cdot\binom{2021}{2}+3\cdot\binom{2021}{3}+\ldots+2021\cdot\binom{2021}{2021}$.

Решение. Го означуваме збирот со

$$S=\binom{2021}{1}+2\cdot\binom{2021}{2}+3\cdot\binom{2021}{3}+\ldots+2021\cdot\binom{2021}{2021}\ldots(*)$$

Од идентитетот за биномните коефициенти $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ добиваме

$$S=\binom{2021}{2020}+2\cdot\binom{2021}{2019}+3\cdot\binom{2021}{2018}+\ldots+2021\cdot\binom{2021}{0}\ldots(**). \quad \mathbf{(10)}$$

Со собирање на (*) и (**) добиваме

$$2S=2021\cdot\binom{2021}{0}+(2020+1)\binom{2021}{1}+\ldots+(2020+1)\binom{2021}{2020}+2021\cdot\binom{2021}{2021}=$$
$$2021\cdot(\binom{2021}{0}+\binom{2021}{1}+\ldots+\binom{2021}{2021})=2021\cdot 2^{2021}.$$

Оттука следува дека $S=2021\cdot 2^{2020}$. **(15)**