



## ИЗБОРЕН НАТПРЕВАР ЗА ИМО 2021

ДЕН 1

Сабота, 29. Мај 2021

**Задача 1.** Нека  $k \in \mathbb{N}$  задоволува  $2 \leq k \leq 2020$ . Нека  $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$  е монотono опаѓачка низа од ненегативни реални броеви така што

$$\sum_{i=n}^{2021} a_i \leq ka_n$$

за секој  $n = 1, 2, \dots, 2021$ . Докажете дека  $a_{2021} \leq 4\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2021} a_1$ .

**Задача 2.** Нека  $ABC$  е остроаголен триаголник таков што  $AB < AC$ . Нека  $A'$  е слика на  $A$  при осна симетрија во однос на  $BC$ . Опишаната кружница на  $\triangle A'BC$  ги сече полуправите  $AB$  и  $AC$  по втор пат во точки  $D$  и  $E$  соодветно, така што  $B$  е помеѓу  $A$  и  $D$ , а  $E$  е помеѓу  $A$  и  $C$ . Да ги означиме со  $P$ ,  $Q$  и  $S$  средишните точки на отсечките  $CD$ ,  $BE$  и  $BC$ , соодветно. Докажете дека правите  $BC$  и  $AA'$  се сечат на опишаната кружница на  $\triangle PQS$ .

**Задача 3.** За група луѓе велиме дека е *добра* доколку секој член има парен број (вклучително нула) познаници во групата (познанствата се обострани). Докажете дека секоја група луѓе може да се разбие на два добри дела (дозволено е некој од деловите да биде празен).

*Време: 4 саати и 30 минути.*

*Секоја задача вреди 7 поени.*



## ИЗБОРЕН НАТПРЕВАР ЗА ИМО 2021

ДЕН 2

Недела, 30. Мај 2021

**Задача 4.** Нека  $S = \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$  и  $f : S \rightarrow S$  е пресликување такво што  $f^{(n)}(n) = n$  за секој  $n \in S$ . Одредете ги сите можни вредности на  $f(2021)$ .  
(Тука,  $f^{(n)}(n) = \underbrace{f(f(f \dots f(n)))}_{n \text{ пати}} \dots$ .)

**Задача 5.** Најдете ги сите функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такви што за секои  $a, b \in \mathbb{N}$  се исполнети следните услови:

- (i)  $f(f(a) + b) \mid b^a - 1$ ;
- (ii)  $f(f(a)) \geq f(a) - 1$ .

**Задача 6.** Нека  $H$  е ортоцентарот на остроаголен триаголник  $ABC$  таков што  $AB < AC$ . Висините  $BH$  и  $CH$  ги сечат  $AC$  и  $AB$  во  $B_1$  и  $C_1$ , соодветно. Нека  $M$  е средишна точка на  $BC$ . Нека  $l$  е права паралелна со  $BC$  која поминува низ  $A$ . Опишаната кружница на  $\triangle CMC_1$  ја сече  $l$  во  $X$  и  $Y$ , така што  $X$  е на истата страна од  $AH$  како и  $B$ , додека  $Y$  е на истата страна од  $AH$  како и  $C$ . Правите  $MX$  и  $MY$  ја сечат  $CC_1$  во  $U$  и  $V$ , соодветно. Докажете дека опишаните кружници на  $\triangle MUV$  и  $\triangle B_1C_1H$  се допираат.

Време: 4 саати и 30 минути.  
Секоја задача вреди 7 поени.



## ИЗБОРЕН НАТПРЕВАР ЗА ИМО 2021

## РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

1. Нека  $k \in \mathbb{N}$  задоволува  $2 \leq k \leq 2020$ . Нека  $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$  е монотono опаѓачка низа од ненегативни реални броеви така што

$$\sum_{i=n}^{2021} a_i \leq ka_n$$

за секој  $n = 1, 2, \dots, 2021$ . Докажете дека  $a_{2021} \leq 4\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2021} a_1$ .

**Решение.** Нека  $m = 2021 - k$ . За  $i = m + 1, m + 2, \dots, 2021$  имаме (поради монотоноста)  $a_i \geq a_{2021}$ . Користејќи го ова и неравенството  $ka_m \geq \sum_{i=m}^{2021} a_i$  добиваме

$$a_m \geq \frac{2021 - m}{k - 1} a_{2021} = \frac{k}{k - 1} a_{2021}. \quad (2п)$$

*Забелешка:* Ако е добиено неравенството  $a_n \geq \frac{2021-n}{k-1} a_{2021}$  без да се издвои специјалниот случај  $n = 2021 - k$  тогаш се доделува само (1п).

Размислувајќи аналогно и користејќи дека  $ka_{m-1} \geq \sum_{i=m-1}^{2021} a_i$ , добиваме

$$(k-1)a_{m-1} \geq \sum_{i=m}^{2021} a_i = a_m + \sum_{i=m+1}^{2021} a_i \geq \frac{k}{k-1} a_{2021} + (2021-m)a_{2021} = \frac{k^2}{k-1} a_{2021}. \quad (1п)$$

Со продолжување на оваа постапка (или со индукција) заклучуваме дека за  $0 \leq n < m$

$$a_{m-n} \geq \left(\frac{k}{k-1}\right)^{n+1} a_{2021}. \quad (2п)$$

Земајќи  $n = m - 1 = 2020 - k$ , едноставни пресметки даваат дека

$$a_{2021} \leq \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2021}}{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k} a_1. \quad (1п)$$

Конечно, бидејќи именителот е растечка функција од аргумент  $k \geq 2$  (ова може да се докаже едноставно со помош на неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина), го добиваме посакуваното неравенство

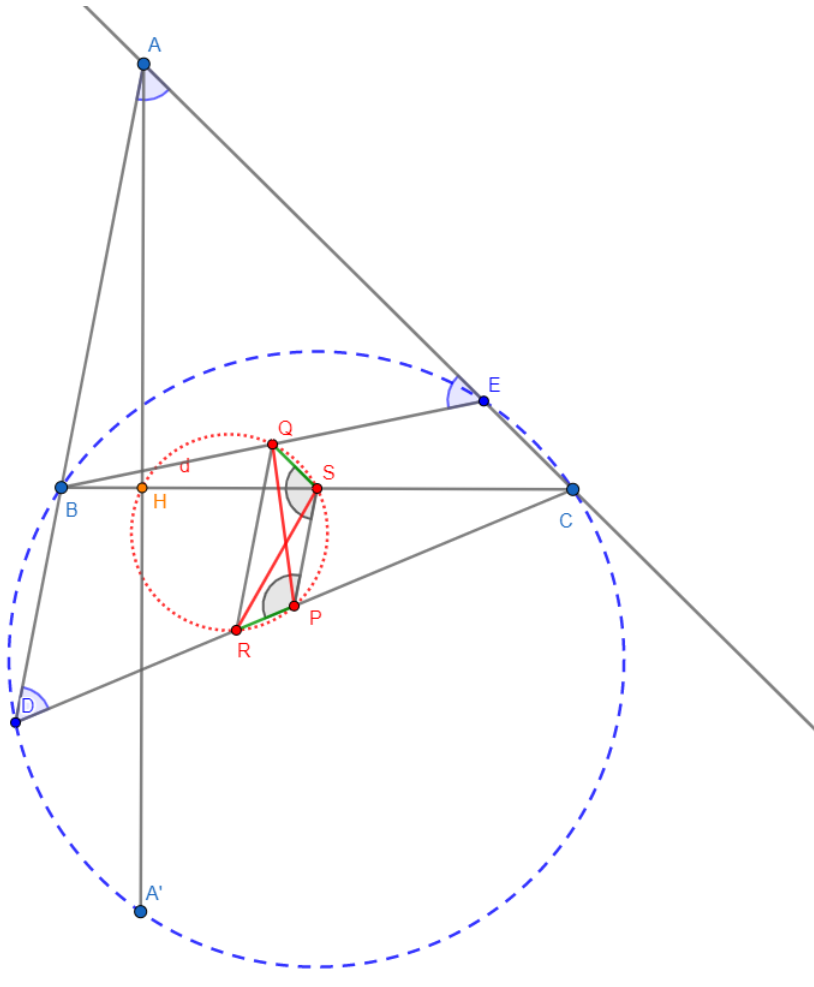
$$a_{2021} \leq 4\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2021} a_1. \quad (1п)$$

□

2. Нека  $ABC$  е остроаголен триаголник таков што  $AB < AC$ . Нека  $A'$  е слика на  $A$  при осна симетрија во однос на  $BC$ . Опишаната кружница на  $\triangle A'BC$  ги сече полуправите  $AB$  и  $AC$  по втор пат во точки  $D$  и  $E$  соодветно, така што  $B$  е помеѓу  $A$  и  $D$ , а  $E$  е помеѓу  $A$  и  $C$ . Да ги означиме со  $P$ ,  $Q$  и  $S$  средишните точки на отсечките  $CD$ ,  $BE$  и  $BC$ , соодветно. Докажете дека правите  $BC$  и  $AA'$  се сечат на опишаната кружница на  $\triangle PQS$ .

**Решение.** Ќе дадеме две независни решенија.

**Прво решение.** Нека  $k$  е опишаната кружница на  $\triangle PQS$ . Да ја означиме со  $R$  другата пресечна точка на  $k$  и  $CD$ . Тогаш важи  $\angle PRS = \angle PQS$ . Правата  $PS$  е средна линија во триаголникот  $BCD$ , и оттука  $PS \parallel BD$ . Слично,  $QS$  е средна линија во  $\triangle CBE$ , па важи  $QS \parallel CE$  и  $QS = \frac{1}{2} \cdot CE$ . Имаме дека  $\angle BDC = \angle BA'C = \angle BAC$  (ова следува од симетрија и од фактот дека четириаголникот  $BDA'C$  е тетивен). Оттука,  $CD = CA$ . **(1п)** Важат и равенствата  $\angle RPS = 180^\circ - \angle CPS = 180^\circ - \angle CDB = 180^\circ - \angle BAC$ . Од  $QS \parallel AC$ ,  $PS \parallel AB$  и од распоредот на точките, заклучуваме дека  $\angle PSQ = 180^\circ - \angle BAC$ . Оттука, равенствата  $\angle RPS = \angle QSP$ ,  $\angle PRS = \angle PQS$  и  $PS = PS$  кажуваат дека триаголниците  $PRS$  и  $SQP$  се складни. Следствено,  $PR = SQ = \frac{1}{2} \cdot CE$ . **(2п)** Да забележиме и дека  $AB = BE$  (бидејќи  $\angle BAE = \angle BA'C = \angle BDC = \angle BEA$ , што следува од симетрија и фактот дека  $BDA'CE$  е тетивен пентаголник). Нека  $H$  е пресекот на  $BC$  и  $AA'$ .



Ќе докажеме дека  $\overline{CS} \cdot \overline{CH} = \overline{CP} \cdot \overline{CR}$ , од што (како последица на повратната насока на теоремата за степен на точка, или поедноставно од сличност) ќе можеме да заклучиме дека  $H$  лежи на посакуваната кружница. **(1п)** Најпрво да ги воочиме следните пресметки:

$$\begin{aligned} \overline{CP} \cdot \overline{CR} &= \overline{CP} \cdot (\overline{CP} + \overline{PR}) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot CD + \frac{1}{2} \cdot CE \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \overline{AC} \cdot (\overline{AC} + \overline{EC}) \end{aligned}$$

Воведуваме ознаки:  $AB = c, BC = a, CA = b$  и  $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma$ . Користејќи дека  $AB = BE$ , добиваме  $AE = 2c \cos \alpha$ . Оттука,

$$\overline{CP} \cdot \overline{CR} = \frac{b(b + b - 2c \cos \alpha)}{4} = \frac{b(b - c \cos \alpha)}{2}. \quad (2\text{п})$$

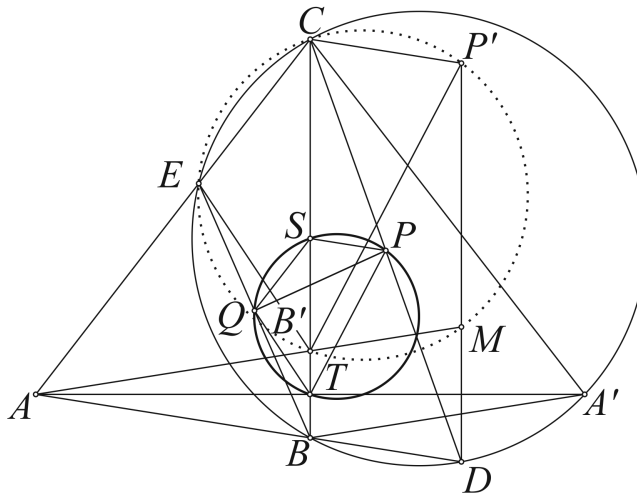
Лесно се добива дека  $CH = b \cos \gamma$  и  $CS = \frac{a}{2}$ . Сега имаме:

$$\begin{aligned} \overline{CS} \cdot \overline{CH} = \overline{CP} \cdot \overline{CR} &\iff \frac{ab \cos \gamma}{2} = \frac{b(b - c \cos \alpha)}{2} \\ &\iff a \cos \gamma = b - c \cos \alpha \iff a \cos \gamma + c \cos \alpha = b. \end{aligned}$$

Последното е точно според законот за проекција. (1п)

*Забелешка:* Доказот дека  $CD = CA$  или  $AB = BE$  носи 1 поен дури и во случај кога и двете равенства се докажани. Обидот да се дојде до решение така што ќе се докаже дека  $\overline{CS} \cdot \overline{CH} = \overline{CP} \cdot \overline{CR}$  носи 1 дополнителен поен.  $\diamond$

**Второ решение.** Нека  $T$  е точката во која се сечат правите  $AA'$  и  $BC$ , точките  $B'$  и  $P'$  се такви што  $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BT}$  и  $\overrightarrow{BP'} = 2\overrightarrow{BP}$ , (1п) и  $M$  е точка на полуправата  $AB'$  таква што  $AM = AD$ . (1п)



За степенот на точката  $A$  во однос на  $(BECD)$  имаме  $\overline{AE} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB'} \cdot \overline{AM}$ , па четириаголникот  $B'MCE$  е тетивен. (1п) Бидејќи  $\overline{CP'} = 2\overline{SP} = \overline{BD}$ , четириаголникот  $BDP'C$  е паралелограм (1п). Од тоа што  $BDMB'$  е рамнокрак трапез, заклучуваме дека  $CP'MB'$  е исто така рамнокрак, што повлекува дека  $P'$  лежи на опишаната кружница на  $B'MCE$  ( $\angle CB'M + \angle CP'M = \angle CB'M + \angle B'MP' = 180^\circ$ ). (1п)

Нека  $\chi_{B,2}$  е хомотетија со центар  $B$  и коефициент 2. Имаме дека  $\chi_{B,2}(TPSQ) = B'P'CE$ , па заклучуваме дека  $T$  е на кружницата опишана околу  $\triangle PSQ$ . (2п)  $\diamond$   $\square$

**3.** За група луѓе велиме дека е *добра* доколку секој член има парен број (вклучително нула) познаници во групата (познанствата се обострани). Докажете дека секоја група луѓе може да се разбие на два добри дела (дозволено е некој од деловите да биде празен).

**Решение.** Вршме индукција по бројот  $n$  на членови во групата. Индуктивната основа  $n = 1$  е тривијално исполнета. Нека  $G$  е група од  $n \geq 2$  луѓе. Можеме да претпоставиме дека  $G$



не е добра (во спротивно, разбивањето  $\{G, \emptyset\}$  задоволува). Нека  $Z$  е член за кој множеството  $P$  од негови познаници во групата е непарно. (За конечно множество велиме дека е *непарно* (одн., *парно*) доколку има непарен (одн., парен) број на елементи.) Да ја разгледаме групата  $G'$  добиена од  $G - \{Z\}$  со заменување на релацијата 'познанство' со 'непознанство' во  $P$ . (Со други зборови, секоја двојка познаници на  $Z$  во  $G$  се непознаници во  $G'$  и обратно.) **(3п)**

Според индуктивната претпоставка, постои 'добро' разбивање  $\{X', Y'\}$  на  $G'$ . Точно едно од множествата  $A \cap X'$  и  $A \cap Y'$  е парно, нека такво е првото. **(1п)**

Забележуваме дека, бидејќи  $A \cap Y'$  е непарно, групата  $Y'$  е добра и со почетната релација 'познанство'. **(1п)**

Од друга страна, со почетната релација 'познанство', групата  $X'$  не е добра: имено, нејзините 'лоши членови' го сочинуваат точно  $A \cap X'$ . **(1п)**

Но, тоа значи дека групата  $X' \cup \{Z\}$  е добра, што го комплетира индуктивниот доказ. **(1п)**

*Забелешка:* Не се доделуваат поени доколку е само кажано: да претпоставиме дека групата не е добра, и да разгледаме нејзин член кој има непарен број познаници.  $\square$

**4.** Нека  $S = \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$  и  $f : S \rightarrow S$  е пресликување такво што  $f^{(n)}(n) = n$  за секој  $n \in S$ . Одредете ги сите можни вредности на  $f(2021)$ .

(Тука,  $f^{(n)}(n) = \underbrace{f(f(f \dots f(n)))}_{n \text{ пати}} \dots$ .)

**Решение.** Да забележиме дека  $f$  е сурјекција: имено, ако за произволен  $n \in S$  земеме  $m = f^{(n-1)}(n)$  тогаш  $f(m) = n$ . **(1п)** Со оглед на тоа дека множеството  $S$  е конечно, сурјективноста повлекува дека  $f$  е биекција (пермутација на  $S$ ), што значи дека може да се разбие на циклуси. За секој  $k \in S$ , нека  $C_k$  е циклусот во кој е содржан  $k$ . Тогаш  $f^{(r)}(k) \in C_k$  за секој  $r > 0$ . **(1п)** Притоа,  $f^{(r)}(k) = k$  ако и само ако  $r$  е делив со  $|C_k|$  (бројот на елементи на циклусот  $C_k$ ). Означувајќи  $|C_k| = c_k$ , имаме дека  $c_{2021} \mid 2021$ . Факторизација  $2021 = 1 \cdot 43 \cdot 47$  отвора 4 можности: **(3п)**

I) :  $c_{2021} = 1$ , односно  $f(2021) = 2021$ . Оваа можност се реализира, на пример, со идентичната функција  $f(n) = n$  за секој  $n \in S$ .

II) :  $c_{2021} = 43$ , односно  $C_{2021}$  има 43 елементи, и сите се содржатели на 43. Со оглед на тоа дека постојат вакви 43-елементни помножества  $S_0$  од  $S$  во кои елемент е 2021, лесно заклучуваме дека  $f(2021)$  може да биде било кој елемент од  $S$  што е делив со 43. Имено, доволно е да дефинираме  $f(n) = n$  за секој  $n \in S \setminus S_0$ , и да користиме соодветна циклична пермутација на некое  $S_0$ .

III) :  $c_{2021} = 47$ , односно  $C_{2021}$  има 47 елементи, и сите се содржатели на 47. Но ова е невозможно, бидејќи  $47^2 > 2021$ .

IV) :  $c_{2021} = 2021$ , односно пермутацијата има единствен циклус од големина 2021. Ова е повторно невозможно, бидејќи тогаш е потребно секој број од  $S$  да е делив со 2021. **(2п)**

Да сумираме,  $f(2021)$  може да биде било кој елемент од  $S$  што е делив со 43.  $\square$

**5.** Најдете ги сите функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такви што за секои  $a, b \in \mathbb{N}$  се исполнети следните услови:

$$(i) \quad f(f(a) + b) \mid b^a - 1;$$

$$(ii) \quad f(f(a)) \geq f(a) - 1.$$

**Решение.** Нека  $f(1) = s$ . Од (i) имаме  $f(s + 2) = f(f(1) + 2) \mid 2^1 - 1$ ; значи  $f(s + 2) = 1$ . Најпрво ќе покажеме дека  $f(k) \neq 2$  за секој  $k > 2$ . Претпоставувајќи го спротивното, нека таков број  $k$  постои. Во случај  $k$  да е парен број, ставајќи  $k = 2u$ , според условот (i), добиваме  $2 = f(2u) = f(f(2u) + 2u - 2) \mid (2u - 2)^{2u} - 1$ ; но, ова е очигледно невозможно.



Слично, доколку претпоставениот  $k$  е непарен, ставајќи  $k = 2u + 1$ , повторно од (i), имаме  $2 = f(2u + 1) = f(f(s + 2) + 2u) \mid (2u)^{s+2} - 1$ , што е истата противречност. **(1п)**

Бидејќи  $f(s + 3) = f(f(1) + 3) \mid 3^1 - 1 = 2$  и  $s + 3 > 2$ , следува дека  $f(s + 3) = 1$ . Да ги искористиме изведените равенства  $f(s + 2) = 1 = f(s + 3)$ : од (i),

$$f(k) = f(f(s + 2) + k - 1) = f(f(s + 3) + k - 1) \mid \text{НЗД}((k - 1)^{s+2} - 1, (k - 1)^{s+3} - 1);$$

но, користејќи дека  $((k - 1)^{s+3} - 1) - (k - 1)((k - 1)^{s+2} - 1) = k - 2$ , добиваме

$$f(k) \mid k - 2 \quad \text{за секој } k \geq 2. \quad \mathbf{(2п)}$$

Следствено, за секој  $k \geq 3$  важи  $f(k) \leq k - 2$ . Последното неравенство, во комбинација со (ii), повлекува дека  $Im(f)$ , множеството слики на  $f$ , е содржано во  $\{1, 2\}$ . Навистина, доколку претпоставиме дека постои  $k \geq 1$  за кој  $f(k) \geq 3$ , ги добиваме противречните неравенства  $f(k) - 1 \leq f(f(k)) \leq f(k) - 2$ .

За момент да сумираме, досега имаме заклучено дека

$$(1) \quad Im(f) \subseteq \{1, 2\} \quad \text{и} \quad f^{-1}(2) \subseteq \{1, 2\}. \quad \mathbf{(2п)}$$

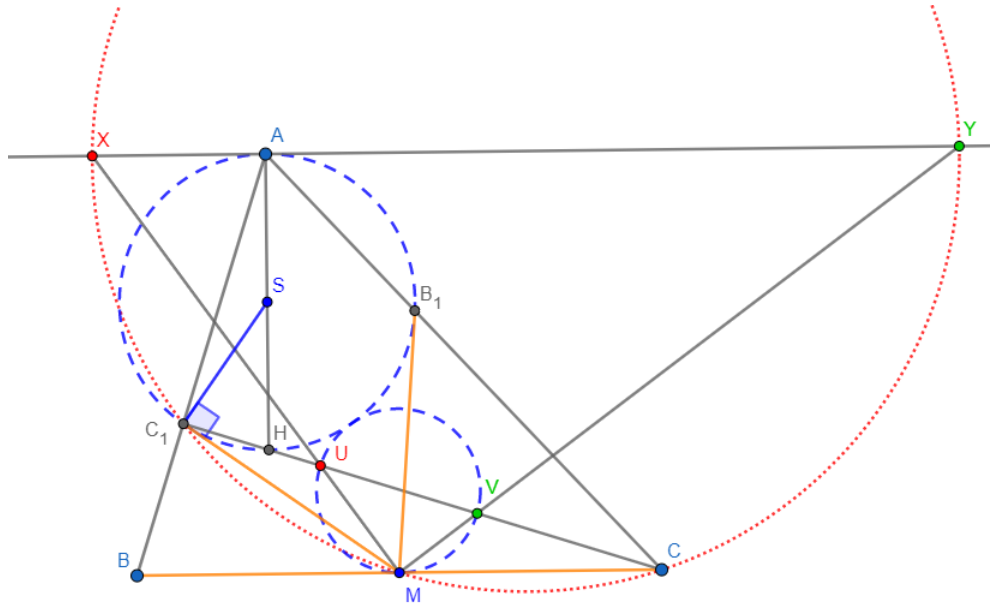
Нека  $f(2) = t$ . Од (1) имаме  $s, t \in \{1, 2\}$ . Со други зборови, постојат четири функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  за кои (1) е исполнето. За секоја таква  $f$ , условот (ii) е секако исполнет. Ова важи и за условот (i). Имено, ако  $b = 1$  тогаш било кој  $a$  задоволува; ако пак  $b > 1$  тогаш  $f(a) + b \geq 3$ , што повлекува  $f(f(a) + b) = 1$ . **(1п)**

Значи, постојат точно четири функции кои ги исполнуваат условите на задачата. Да ги нумерираме со  $f_1, f_2, f_3$  и  $f_4$  согласно следното:  $f_1 \equiv 1$ ;  $f_2(1) = f_2(2) = 2$  и  $f_2(n) = 1$  за секој  $n > 2$ ;  $f_3(2) = 2$  и  $f_3(n) = 1$  за секој  $n \neq 2$ ;  $f_4(1) = 2$  и  $f_4(n) = 1$  за секој  $n \neq 1$ . **(1п)**  $\square$

**6.** Нека  $H$  е ортоцентарот на остроаголен триаголник  $ABC$  таков што  $AB < AC$ . Висините  $BH$  и  $CH$  ги сечат  $AC$  и  $AB$  во  $B_1$  и  $C_1$ , соодветно. Нека  $M$  е средишна точка на  $BC$ . Нека  $l$  е права паралелна со  $BC$  која поминува низ  $A$ . Опишаната кружница на  $\triangle CMC_1$  ја сече  $l$  во  $X$  и  $Y$ , така што  $X$  е на истата страна од  $AH$  како и  $B$ , додека  $Y$  е на истата страна од  $AH$  како и  $C$ . Правите  $MX$  и  $MY$  ја сечат  $CC_1$  во  $U$  и  $V$ , соодветно. Докажете дека опишаните кружници на  $\triangle MUV$  и  $\triangle B_1C_1H$  се допираат.

**Решение.** Ќе дадеме две независни решенија.

**Прво решение.** Да забележиме дека  $B_1$  и  $C_1$  се на кружницата со дијаметар  $BC$  и центар  $M$ . Да ја означиме оваа кружница со  $k$ . Нека  $\Phi$  е инверзија во однос на  $k$ . **(1п)** Тогаш очигледно важи  $\Phi(B) = B$ ,  $\Phi(C_1) = C_1$ ,  $\Phi(B_1) = B_1$  и  $\Phi(C) = C$  бидејќи  $MB = MC = MB_1 = MC_1$ . Нека  $\omega$  е опишаната кружница на  $\triangle CMC_1$ . Ќе докажеме дека слика од правата  $CC_1$  е кружницата  $\Phi(CC_1) = \omega$ . Навистина,  $\Phi(CC_1)$  е кружница што минува низ  $M$ , и притоа  $\Phi(C) = C$  и  $\Phi(C_1) = C_1$ , што е токму  $\omega$ . **(1п)** Јасно, правите  $MU$  и  $MV$  остануваат неподвижни (како целини), па сликите  $\Phi(U)$  и  $\Phi(V)$  се пресечни точки на  $MU$  и  $MV$  со  $\Phi(CC_1) = \omega$ , соодветно. Имаме дека  $\Phi(U) = X$  и  $\Phi(V) = Y$ . Тоа значи дека  $\Phi((MUV))$  е права која поминува низ  $\Phi(U) = X$  и  $\Phi(V) = Y$ , а тоа е токму  $l$ . Следствено, имајќи предвид дека секоја инверзија е инволуција,  $\Phi(l)$  е опишаната кружница на триаголникот  $MUV$ . **(1п)**



Сега ќе докажеме дека опишаната кружница на  $\triangle B_1C_1H$  е неподвижна (како целина) при  $\Phi$ . За таа цел, нека  $S$  е средишна точка на  $AH$ . Тогаш, опишаната кружница на  $\triangle B_1C_1H$  има дијаметар  $AH$  и центар  $S$ . Едноставна пресметка со аглиите ни дава  $SC_1 \perp MC_1$ :

$$\angle MC_1S = \angle MC_1C + \angle HC_1S = (90^\circ - \angle ABC) + \angle ABC = 90^\circ.$$

Во пресметката користевме дека  $MC = MC_1$  и  $SA = SC_1$ . Оттука,  $k$  е ортогонална на кружницата со дијаметар  $AH$ , па инверзијата во однос на  $k$  ја остава неподвижна (како целина) опишаната кружница на  $\triangle B_1C_1H$ . **(3п)** Останува да забележиме дека  $l$  е тангентата на  $(B_1C_1H)$ , па нивните слики при  $\Phi$ , кои што се опишаните кружници на  $\triangle MUV$  и  $\triangle B_1C_1H$ , исто така се допираат. **(1п)**

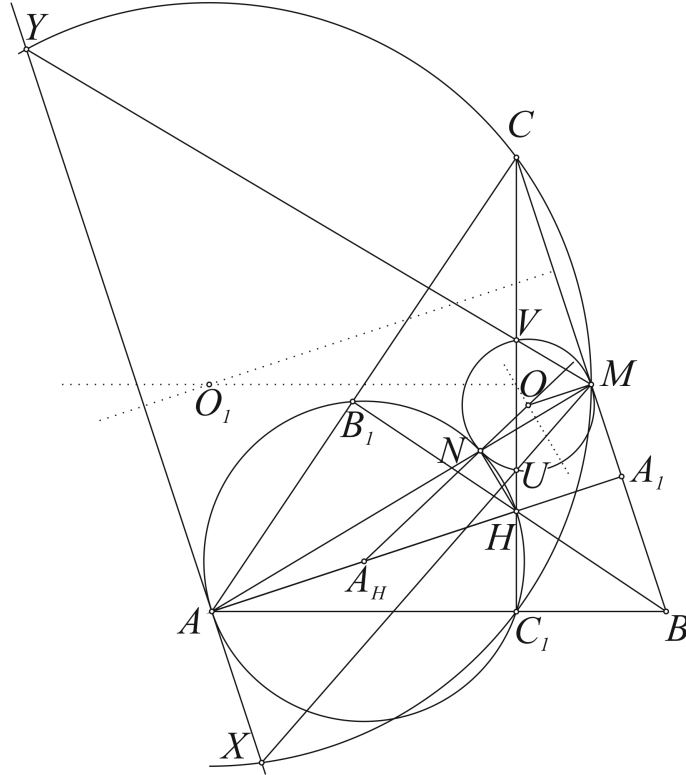
*Забелешка:* Разгледувањето на инверзија во однос на  $k$  носи 1 поен. ◇

**Второ решение.** Нека  $O'$  и  $O_1$  се центри на опишаните кружници на триаголниците  $MUV$  и  $XMY$ . Најпрво ќе докажеме дека  $\triangle XMY$  и  $\triangle VUM$  се слични. Имаме  $\angle XMY = \angle YMX = \angle VMU$  и  $\angle XMY = \angle XYC - \angle MYC = \angle AXM - \angle CC_1M = \angle XMB - \angle C_1CM = \angle MUV$ . **(1п)** Оттука,  $\angle XMO' = \angle YMO_1 = 90^\circ - \angle MXY$ , па важи  $MO' \perp XY$  и  $MO' \perp BC$ . Бидејќи растојанијата од  $M$  до  $UV$  и  $XY$  се  $\frac{BC_1}{2}$  и  $AA_1$  соодветно, коефициентот на сличност е  $\frac{BC_1}{2AA_1}$ , па добиваме:

$$\frac{MO'}{MO_1} = \frac{BC_1}{2AA_1}. \quad (1п)$$

Нека  $A_H$  е средишна точка на  $AH$ , која е центар на опишаната кружница на триаголникот  $\triangle AB_1C_1$  (бидејќи  $\angle AB_1H = \angle AC_1H = 90^\circ$ ). Оваа кружница исто така поминува низ  $H$ . Нека  $N$  и  $O$  се пресечни точки на  $AM$  со опишаната кружница на  $\triangle AB_1C_1$  и со  $MO'$ , соодветно.





Од  $AH \perp BC$  и  $MO \equiv MO' \perp BC$ , имаме  $\angle NMO = \angle NAA_H = \angle ANA_H = \angle ONM = \phi$ .  
Од сличноста  $\triangle MNO \sim \triangle ANA_H$ , заклучуваме

$$\frac{OM}{AA_H} = \frac{MN}{AN}.$$

Користејќи дека  $\triangle ANH \sim \triangle AA_1M$ , добиваме

$$\frac{AN}{AH} = \frac{AA_1}{AM},$$

а потоа и

$$\frac{OM}{AA_H} = \frac{MN}{AA_1} \cdot \frac{AM}{AH}. \quad (1п)$$

Бидејќи  $\angle A_H C_1 M = 90^\circ - \angle AC_1 A_H + \angle CC_1 M = 90^\circ$ , правата  $MC_1$  е тангентата на  $k(A_H, A_H A)$ , па за степенот на точката  $M$  добиваме  $AM \cdot MN = MC_1 \cdot MC_1$ . (1п)

Сега го имаме следното:

$$\frac{MO}{O_1 M} = \frac{MO}{AA_H} \cdot \frac{AA_H}{O_1 M} = \frac{MC_1 \cdot MC_1}{AA_1 \cdot AH} \cdot \frac{AH/2}{a/(4 \cos \beta)} = \frac{a \cos \beta}{2AA_1} \cdot \frac{a^2/4}{a^2/4} = \frac{BC_1}{2AA_1} = \frac{MO'}{O_1 M}$$

што значи дека  $MO = MO'$ , па  $O \equiv O'$ . (2п)

Конечно,  $O, N$  и  $A_H$  се колинеарни па дадените кружници се допираат во  $N$ . (1п)  $\diamond \square$