63 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 15-16.08.2020

Прва година

1. а) Нека x, y и z се цели броеви. Докажи дека ако $x^3+y^3+z^3$ е делив со 7, тогаш барем еден од броевите x, y и z е делив со 7.

б) Нека x, y, z и t се цели броеви, такви што збирот $x^4+y^4+z^4+t^4$ е делив со 7. Дали е можно 7 да не е делител на ниту еден од броевите x, y, z, t? Образложи!

Решение. а) Да претпоставиме дека ниту еден од броевите x, y и z не е делив со 7. Лесно се проверува дека нивните трети степени, при делење со 7, даваат остатоци 1 или 6. Тогаш $x^3+y^3+z^3$, при делење со 7, дава остаток 1, 3, 4 или 6, што е контрадикција на „$x^3+y^3+z^3$ е делив со 7". Следува дека барем еден од броевите x, y и z е делив со 7.

б) Да, можно е. Имено, нека $x=1, y=2, z=2, t=2$. Тогаш ниту еден од броевите не е делив со 7, додека $x^4+y^4+z^4+t^4=49$.

2. Секој од учениците во еден клас игра барем една од следните компјутерски игри: Minecraft, Fortnite, GTA или Clash of Clans. Тој што игра Minecraft или Clash of Clans, игра и Fortnite; тој што игра GTA, игра и Clash of Clans; тој што игра Fortnite и GTA, игра и Minecraft. Која од овие игри ја играат најмногу, а која најмалку ученици? Образложи го одговорот.

Решение. Дадените услови ќе ги означиме со: (i) Тој што игра Minecraft или Clash of Clans, игра и Fortnite; (ii) Тој што игра GTA, игра и Clash of Clans; (iii) Тој што игра Fortnite и GTA, игра и Minecraft. Нека A_1, A_2, A_3, A_4 се множествата од ученици кои играат Minecraft, Fortnite, GTA, Clash of Clans соодветно. Тогаш, условите (i)-(iii) преминуваат во: (i) $A_1 \cup A_4 \subseteq A_2$; (ii) $A_3 \subseteq A_4$; (iii) $A_2 \cap A_3 \subseteq A_1$. Сега, од (i) имаме дека $A_1 \subseteq A_2$ и $A_4 \subseteq A_2$. Од $A_4 \subseteq A_2$ и (ii) следува дека $A_3 \subseteq A_2$. Добивме дека $A_1 \subseteq A_2$, $A_3 \subseteq A_2$ и $A_4 \subseteq A_2$, што значи дека множеството A_2 е најбројно множество од сите четири множества, а бидејќи секој ученик припаѓа на барем едно од тие множества, заклучуваме дека Fortnite ја играат најмногу ученици (**сите**). Понатаму, од $A_3 \subseteq A_2$ следува $A_2 \cap A_3 = A_3$. Од последното равенство и (iii) следува дека $A_3 \subseteq A_1$. Добивме дека $A_3 \subseteq A_1$, $A_3 \subseteq A_2$ и $A_3 \subseteq A_4$, што значи дека множеството A_3 е најмалубројно од сите четири множества, а бидејќи секој ученик припаѓа на барем едно од тие множества, заклучуваме дека GTA ја играат најмалку од учениците.

3. Нека за реалните броеви $a, b, c \neq 0$ важи равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Докажи дека за секој непарен број n важи и равенството $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$.

Решение. Со низата еквивалентни трансформации

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b+c)(bc+ac+ab)=abc$$

$$\Leftrightarrow abc+a^2c+a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2=0$$

$\Leftrightarrow \ (a^2b+abc)+(a^2c+ac^2)+(abc+bc^2)+(ab^2+b^2c)=0$

$\Leftrightarrow \ ab(a+c)+ac(a+c)+bc(a+c)+b^2(a+c)=0 \ \Leftrightarrow \ (a+c)(ab+ac+bc+b^2)=0$

$\Leftrightarrow \ (a+c)(a(b+c)+b(b+c))=0 \ \Leftrightarrow \ (a+b)(a+c)(b+c)=0$,

почетното равенство се сведува на

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0. \qquad (1)$$

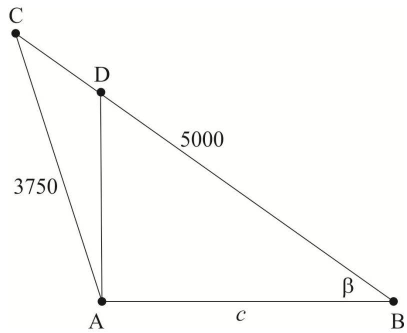
Ако наместо a,b,c ставиме a^n,b^n,c^n, соодветно, тогаш равенството кое треба да го покажеме, т.е. $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$, ќе биде точно ако и само ако важи

$$(a^n+b^n)(a^n+c^n)(b^n+c^n)=0. \ (2)$$

Ако n е непарен број, (2) следува од (1). Имено, БГО можеме да претпоставиме дека $a+b=0$. Тогаш $b=-a$ и $a^n+b^n=a^n+(-a)^n=a^n-a^n=0$, од каде следува (2), односно равенството кое требаше да го покажеме.

4. Домот на Матеј, неговото основно училиште и неговото средно училиште формираат триаголник ABC по тој редослед на темињата. Растојанието од домот на Матеј до неговото средно училиште изнесува 3750 m, а растојанието од средното до неговото основно училиште изнесува 5000 m. Колку изнесува растојанието од домот на Матеј до основното училиште, ако се знае дека аголот $\measuredangle BAC$ е за $90°$ поголем од аголот $\measuredangle ABC$?

Решение. Домот на Матеј се наоѓа во точката A, основното училиште во точката B и средното училиште во точката C. Тогаш, за триаголникот ABC имаме $a=\overline{BC}=5000\,\text{m}$, $b=\overline{AC}=3750\,\text{m}$ и $\alpha=\beta+90°$, каде $\alpha=\measuredangle BAC$ и $\beta=\measuredangle ABC$. Се бара да се одреди должината на страната $c=\overline{AB}$. Од точката A издигаме нормала на страната AB, која ја сече страната BC во точката D (види цртеж). Тогаш $\measuredangle BAD=90°$ и $\measuredangle DAC=\beta$, а $\measuredangle ADC=\beta+90°$ (како надворешен агол на аголот во темето D во триаголникот ABD).



Од $\measuredangle ABC=\measuredangle DAC=\beta$ и $\measuredangle BAC=\measuredangle ADC=\beta+90°$ следува дека триаголниците ABC и DAC се слични. Од сличноста имаме дека важи $\overline{BC}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{DC}$, односно $5000:3750=3750:\overline{DC}$, од каде пак се добива дека $\overline{DC}=\frac{3750\cdot 3750}{5000}=\frac{5625}{2}$ m.

Тогаш, $\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{DC}=5000-\frac{5625}{2}=\frac{4375}{2}$ m, а бидејќи BAD е правоаголен триаголник, добиваме дека

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{\left(\frac{4375}{2}\right)^2-c^2}.$$

Повторно од сличноста на истите триаголници, имаме дека $\overline{BC}:\overline{AB}=\overline{AC}:\overline{DA}$, односно $5000:c=3750:\sqrt{\left(\frac{4375}{2}\right)^2-c^2}$, од каде $\sqrt{\left(\frac{4375}{2}\right)^2-c^2}=\frac{3750c}{5000}=\frac{3c}{4}$. Со квадрирање на последното равенство се добива $\left(\frac{4375}{2}\right)^2-c^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2c^2$, односно $c^2=\frac{\left(\frac{4375}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1750^2$, од каде $c=1750\,\mathrm{m}$.

63 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
15-16.08.2020

Втора година

1. Две парчиња легура на злато и сребро содржат вкупно $a\,\mathrm{kg}$ злато. Ако процентот на злато во првото парче е ист со процентот на злато во второто парче, двете парчиња би имале вкупно $b\,\mathrm{kg}$ злато, а ако процентот на злато во второто парче е ист со процентот на злато во првото парче, двете парчиња би имале вкупно $c\,\mathrm{kg}$ злато. Колку килограми злато има во првото, а колку во второто парче?

Решение. Нека првото парче содржи p проценти злато и има $x\,\mathrm{kg}$, а второто содржи q проценти злато и има $y\,\mathrm{kg}$. Тогаш, според условите, важи $px+qy=100a$, $qx+qy=100b$ и $px+py=100c$. Тогаш, $qy-py=100(a-c)$ и $px-qx=100(a-b)$. Имаме $x=100\frac{a-b}{p-q}$ и $y=100\frac{c-a}{p-q}$. Уште важи $\frac{b}{q}=\frac{c}{p}$, па $p-q=p-p\frac{b}{c}=\frac{p(c-b)}{c}=\frac{q(c-b)}{b}$. Тогаш, $\frac{p}{100}x=\frac{p}{100}\cdot 100\cdot\frac{a-b}{p-q}=p\frac{a-b}{\frac{p(c-b)}{c}}=\frac{c(a-b)}{c-b}\mathrm{kg}$ и

$$\frac{q}{100}y=\frac{q}{100}\cdot 100\cdot\frac{c-a}{p-q}=q\frac{c-a}{\frac{q(c-b)}{b}}=\frac{b(c-a)}{c-b}\mathrm{kg}.$$

2. Ако за ненултите реални броеви a,b,c важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{2}}{c}$ и $ab>0$, докажи дека $\frac{a+c}{a\sqrt{2}-c}+\frac{b+c}{b\sqrt{2}-c}\geq 2+2\sqrt{2}$.

Решение. Од $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{2}}{c}$ и $c\neq 0$ следува дека $a+b\neq 0$ и $c=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Тогаш,

$$\frac{a+c}{a\sqrt{2}-c}+\frac{b+c}{b\sqrt{2}-c}=\frac{a+\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}{a\sqrt{2}-\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}+\frac{b+\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}{b\sqrt{2}-\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}=\frac{a+b+b\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-b\sqrt{2}}+\frac{a+b+a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-a\sqrt{2}}$$

$$=\frac{a+b+b\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}+\frac{a+b+a\sqrt{2}}{b\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{(1+\sqrt{2})b}{a\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{(1+\sqrt{2})a}{b\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right),$$

и бидејќи важи $ab>0$, имаме

$$\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}2=\frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2+2\sqrt{2}.$$

3. Реши го системот во множеството реални броеви: $x^2+x^2y^2+x^2y^4=525$ и $x+xy+xy^2=35$.

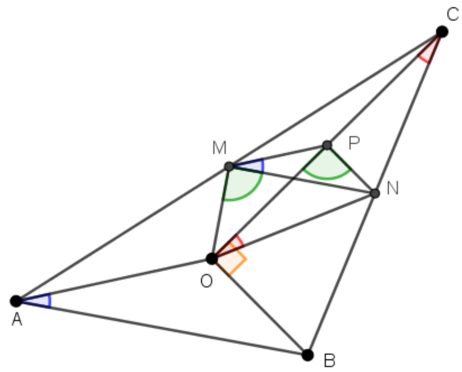
Решение. Од $525=x^2+x^2y^2+x^2y^4=(x+xy^2)^2-x^2y^2=(x+xy^2-xy)(x+xy^2+xy)$ и $x+xy+xy^2=35$ следува дека $x-xy+xy^2=15$. Од $x+xy+xy^2=35$ и $x-xy+xy^2=15$ следува дека $2xy=20$, односно $xy=10$. Јасно $x\neq 0$, па ако замениме $y=\frac{10}{x}$ во $x+xy+xy^2=35$, добиваме $x+x\frac{10}{x}+x\frac{100}{x^2}=35$, односно $x^2-25x+100=0$. Решенија на последната равенка се $x_1=5$ и $x_2=20$. Конечно, решенија на дадениот систем се $(5,2)$ и $(20,\frac{1}{2})$.

4. Точка O се наоѓа во внатрешноста на триаголник ABC и важи $\angle BOC=90°$ и $\angle BAO=\angle BCO$. Ако M и N се средини на страните AC и BC соодветно, докажи дека $\angle OMN=90°$.

Решение. Нека P е средина на отсечката OC. Точката N е центар на опишаната кружница околу правоаголниот триаголник BOC бидејќи е средина на хипотенузата BC, па имаме $\angle BCO=\angle NCP=\angle NOP$. Точките M и P се средини на страните AC и OC соодветно, па значи MP е средна линија за триаголникот АOC т.е. $MP \parallel AO$. Аналогно, $MN \parallel AB$.

Оттука добиваме $\angle NMP=\angle BAO=\angle BCO=\angle NOP$.

Следува дека четириаголникот $ONPM$ е тетивен, па $\angle OMN=\angle OPN=\angle CPN=\angle COB=90^\circ$.



63 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
15-16.08.2020

Трета година

1. Одреди ги минималната и максималната вредност на функцијата $f(x)=\frac{x^2}{ax^4+b}$, каде $a,b>0$, а потоа одреди за кои вредности на аргументот x тие се достигнуваат.

Решение 1. Јасно $x^2\geq 0$, а од условот $a,b>0$ следи и $ax^4+b>0$. Тогаш $f(x)\geq 0$, па минималната вредност на функцијата е $f(x)=0$ и истата се достигнува единствено за $x=0$.

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните броеви ax^4 и b добиваме $ax^4+b\geq 2\sqrt{ax^4\cdot b}=2x^2\sqrt{ab}$. Оттука, $\frac{x^2}{ax^4+b^2}\leq\frac{x^2}{2x^2\sqrt{ab}}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}$. Значи, максималната вредност на дадената функција е $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$. Максимумот се достигнува кога неравенството $ax^4+b\geq 2x^2\sqrt{ab}$ станува равенство, т.е. кога $ax^4=b$. Решавајќи ја равенката $ax^4=b$, добиваме $x=\pm\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$.

Решение 2. Минималната вредност се одредува исто како во претходното решение. За да ја одредиме максималната вредност на функцијата, го трансформираме равенството $f(x)=y$ во облик $ayx^4-x^2+by=0$, односно $ayt^2-t+by=0$, за $t=x^2$. Последната равенка има реални корени по променливата t ако и само ако дискриминантата на квадратната равенка $D\geq 0$, односно

$$1-4aby^2\geq 0\ \Leftrightarrow\ 4aby^2\leq 1\ \Leftrightarrow\ y^2\leq\frac{1}{4ab}\ \Leftrightarrow |y|\leq\frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

Од ненегативноста на y следува дека $y\in\left[0,\frac{1}{2\sqrt{ab}}\right]$. Тогаш, максималната вредност на функцијата е $y=f(x)=\frac{1}{2\sqrt{ab}}$. Останува да се одредат вредностите на променливата x за кои се достигнува максимумот. Ако во разгледуваната квадратна равенка $ayt^2-t+by=0$ ставиме $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}$, добиваме $\frac{a}{2\sqrt{ab}}t^2-t+\frac{b}{2\sqrt{ab}}=0$, односно $at^2-2t\sqrt{ab}+b=0$. Последната равенка е еквивалентна со $\left(t\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=0$, со решенија по t, $t_{1,2}=\sqrt{\frac{b}{a}}$. Оттука $x=\pm\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$. Јасно, максималната вредност на дадената функција се достигнува за две вредности на променливата, $x=-\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$ и $x=\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$.

2. Пресметај го збирот $f(\frac{1}{2020})+f(\frac{2}{2020})+...+f(\frac{2019}{2020})$, каде што $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}, x\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $x\in\mathbb{R}$. Тогаш $f(1-x)=\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x}+2}=\dfrac{4}{4+2\cdot 4^x}=\dfrac{2}{2+4^x}$ и важи

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=1. \qquad (1)$$

Да забележиме дека збирот што треба да го пресметаме има 2019 собироци и уште

$$\frac{1}{2020}+\frac{2019}{2020}=\frac{2}{2020}+\frac{2018}{2020}=\ldots=\frac{1009}{2020}+\frac{1011}{2020}=1. \qquad (2)$$

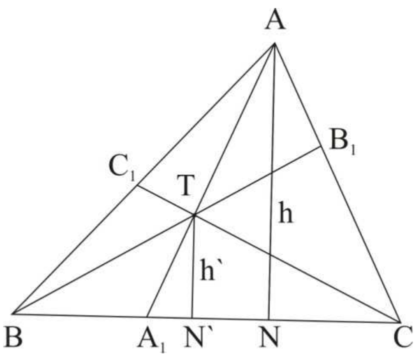
Имајќи ги предвид (1) и (2), за дадениот збир добиваме:

$$f(\frac{1}{2020})+f(\frac{2}{2020})+\ldots+f(\frac{2019}{2020})$$

$$=\left(f(\frac{1}{2020})+f(\frac{2019}{2020})\right)+\left(f(\frac{2}{2020})+f(\frac{2018}{2020})\right)+\ldots+\left(f(\frac{1009}{2020})+f(\frac{1011}{2020})\right)+f(\frac{1010}{2020})$$

$$=1009\cdot 1+f(\frac{1}{2})=1009+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2}=1009+\frac{1}{2}=1009,5.$$

3. Нека T е произволна точка од внатрешноста на триаголник ABC и нека A_1,B_1,C_1 се пресеците на правите AT,BT,CT со страните BC,CA,AB, соодветно. Докажи дека важи $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{A_1T}}\cdot\dfrac{\overline{BT}}{\overline{B_1T}}\cdot\dfrac{\overline{CT}}{\overline{C_1T}}\geq 8$.



Решение. Нека P е плоштината на триаголникот ABC, а P_1,P_2,P_3 се плоштините на триаголниците BCT,CAT,ABT, соодветно. Триаголниците ABC и BCT имаат заедничка страна, па плоштините им се однесуваат како соодветните висини, т.е. $\dfrac{P}{P_1}=\dfrac{h}{h'}$. Нека N е подножјето на висината во триаголникот ABC, спуштена од темето A, а N' е подножјето на висината во триаголникот BCT, спуштена од T.

Од сличноста на триаголниците AA_1N и TA_1N', следува дека $h:h'=\overline{AA_1}:\overline{TA_1}$. Значи $\dfrac{h}{h'}=\dfrac{P}{P_1}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{TA_1}}$, односно $\dfrac{P_1+P_2+P_3}{P_1}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{TA_1}}$. Оттука, $\dfrac{P_2+P_3}{P_1}=\dfrac{\overline{AA_1}-\overline{TA_1}}{\overline{TA_1}}=\dfrac{\overline{AT}}{\overline{TA_1}}$.

Аналогно добиваме $\dfrac{P_1+P_2}{P_3}=\dfrac{\overline{CT}}{\overline{TC_1}}$ и $\dfrac{P_1+P_3}{P_2}=\dfrac{\overline{BT}}{\overline{TB_1}}$. Користејќи ги добиените односи и неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{A_1T}}\cdot\frac{\overline{BT}}{\overline{B_1T}}\cdot\frac{\overline{CT}}{\overline{C_1T}}=\frac{(P_2+P_3)(P_1+P_3)(P_1+P_2)}{P_1P_2P_3}\geq\frac{2\sqrt{P_2P_3}\cdot 2\sqrt{P_1P_3}\cdot 2\sqrt{P_1P_2}}{P_1P_2P_3}=8.$$

4. Докажи дека меѓу тринаесет дадени реални броеви секогаш постојат два, a и b, за кои важи $0 \le \frac{a-b}{1+ab} < 2-\sqrt{3}$.

Решение. Функцијата $\operatorname{tg}x$ е еднозначно дефинирана на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, а нејзиното множество вредности е целото множество $\mathbb{R}$. Имајќи го предвид графикот на функцијата, се забележува дека на секој реален број може да му придружиме единствен агол помеѓу $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, така што дадениот број е еднаков со тангенсот на придружениот агол. Со други зборови, за секој $c \in \mathbb{R}$, постои единствен агол $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, така што $c = \operatorname{tg}\gamma$.

Нека дадените броеви се $a_1, a_2, ..., a_{13}$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_{13}$. Од претходната дискусија, имајќи предвид дека $\operatorname{tg}x$ е растечка функција, следува дека постојат $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{13} \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, такви што $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge ... \ge \alpha_{13}$ и $a_i = \operatorname{tg}\alpha_i, i = 1,2,..,13$. Тогаш постојат α_p и α_s, $\alpha_p \ge \alpha_s$, такви што $\alpha_p - \alpha_s < \frac{\pi}{12}$ (Во спротивно $\alpha_1 - \alpha_{13} = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + ... + (\alpha_{12} - \alpha_{13}) \ge \pi$, што е контрадикција со $\alpha_1, \alpha_{13} \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$). Значи $a_p = \operatorname{tg}\alpha_p, a_s = \operatorname{tg}\alpha_s$ и $0 \le \alpha_p - \alpha_s < \frac{\pi}{12}$. Од последното, повторно имајќи предвид дека $\operatorname{tg}x$ е монотоно растечка функција на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, добиваме

$$\operatorname{tg}0 \le \operatorname{tg}(\alpha_p - \alpha_s) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}, \text{ од каде } 0 \le \frac{\operatorname{tg}\alpha_p - \operatorname{tg}\alpha_s}{1+\operatorname{tg}\alpha_p \cdot \operatorname{tg}\alpha_s} < \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}, \text{ односно } 0 \le \frac{a_p - a_s}{1+a_p \cdot a_s} < 2-\sqrt{3}.$$

Оттука, земајќи $a = a_p$ и $b = a_s$, се добива почетното тврдење.

63 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
15-16.08.2020

Четврта година

1. Определи ги сите можни пополнувања на празните полиња во табелата, така што броевите во секоја редица и во секоја колона претставуваат аритметичка прогресија.

				14
	10			
		20		
2				

Решение. Да го означиме со a_{ij} елементот што се наоѓа во i-та редица и j-та колона, со r_1 разликата на аритметичката прогресија во првата редица и со k_1 разликата на аритметичката прогресија во првата колона.

(1) Од првата редица имаме $14-a_{11}=4r_1$, а од првата колона $2-a_{11}=4k_1$. Со одземање на овие равенства добиваме $4r_1-4k_1=12$ т.е. $r_1-k_1=3$.

(2) Бидејќи во близина на a_{23} има два броја, ќе го изразиме овој елемент на два различни начини. Од третата колона имаме $a_{23}=\frac{a_{13}+a_{33}}{2}=\frac{14-2r_1+20}{2}=17-r_1$.

Од втората редица имаме $\frac{a_{23}+a_{21}}{2}=a_{22}$ т.е. $\frac{a_{23}+2-3k_1}{2}=10$, од каде $a_{23}=18+3k_1$.

Со изедначување на двата изрази за a_{23}, се добива $r_1+3k_1=-1$.

(3) Од (1) и (2) го добивме системот за разликите на аритметичките прогресии од првата редица и првата колона:

$$\begin{cases} r_1-k_1=3 \\ r_1+3k_1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1-k_1=3 \\ 4k_1=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1=2 \\ k_1=-1 \end{cases}.$$

Сега може да се пополнат првата редица и првата колона, а потоа лесно се пополнуваат и останатите полиња во табелата. Конечно решение:

6	8	10	12	14
5	10	15	20	25
4	12	20	28	36
3	14	25	36	47
2	16	30	44	58

2. Во триаголник ABC познати се должините на страните $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=7$ и $\overline{AC}=5$. Нека $\alpha=\angle BAC$. Пресметај ја вредноста на изразот $\sin^6\frac{\alpha}{2}+\cos^6\frac{\alpha}{2}$.

Решение. Користејќи ја формулата $x^6+y^6=(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)$, имаме:

$$\sin^6\frac{\alpha}{2}+\cos^6\frac{\alpha}{2}=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^3-3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=1-3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=1-3\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2\alpha$$
$$=1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2\alpha\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2\alpha.$$

Применувајќи ја косинусната теорема за триаголникот ABC, добиваме:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\frac{16+25-49}{2\cdot4\cdot5}=-\frac{1}{5}.$$

Оттука, $\sin^6\frac{\alpha}{2}+\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$.

Решение 2. Користиме $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ и $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$. По добивање на $\cos\alpha$, имаме $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{5}$ и $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$, од каде $\sin^6\frac{\alpha}{2}+\cos^6\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{7}{25}$.

3. Нека $a_1,a_2,...,a_{2020}$ се позитивни реални броеви за кои важи $a_1\le a_2\le\ldots\le a_{2020}$, $a_1+a_2+\ldots+a_{2020}=2020$ и $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2020}^2=2021$. Докажи дека

$$a_{2019}\ge 1-\frac{1}{\sqrt{2019\cdot2020}}.$$

Решение. Од неравенството меѓу квадратна и аритметичка средина за броевите $a_1,a_2,...,a_{2019}$ добиваме

$$2021-a_{2020}^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2019}^2\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_{2019})^2}{2019}=\frac{(2020-a_{2020})^2}{2019}\quad\text{....(1)}$$

Неравенството (1) е еквивалентно со неравенството $(a_{2020}-1)^2\le\frac{2019}{2020}$ ....(2)

Од условот на задачата лесно се утврдува дека $a_{2020}>1$. Коренувајќи го неравенството (2) добиваме $a_{2020}\le1+\sqrt{\frac{2019}{2020}}$. Од $a_1\le a_2\le\ldots\le a_{2020}$ и од претходното неравенство следува

$$2020=(a_1+a_2+\ldots+a_{2019})+a_{2020}\le2019a_{2019}+1+\sqrt{\frac{2019}{2020}},\ \text{т.е.}$$

$$a_{2019}\ge1-\frac{1}{\sqrt{2019\cdot2020}}.$$

4. Нека n и k се природни броеви за кои важи $n>k\ge4$ и притоа $k(k-1)$ не се дели со $n-1$ и $k(k-1)(k-2)$ не се дели со $n-2$. Докажи дека биномниот коефициент $\binom{n}{k}$ има најмалку два прости делители p и q за кои важи $p\,\big|\,(n-1)$ и $q\,\big|\,(n-2)$.

Решение. Нека НЗД$(n-1,k(k-1))=a$ и НЗД$(n-2,k(k-1)(k-2))=b$. Од условот на задачата следува $a<n-1$ и $b<n-2$. Дополнително, постојат цели броеви x_1,y_1,x_2,y_2

за кои важи $(n-1)x_1+k(k-1)y_1=a$ и $(n-2)x_2+k(k-1)(k-2)y_2=b$.
Оттука добиваме

$$a\cdot\binom{n}{k}=((n-1)x_1+k(k-1)y_1)\cdot\binom{n}{k}=(n-1)\cdot x_1\cdot\binom{n}{k}+k(k-1)y_1\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\binom{n-2}{k-2}$$
$$=(n-1)\left(x_1\cdot\binom{n}{k}+ny_1\cdot\binom{n-2}{k-2}\right).$$

Од последниот идентитет следува дека $(n-1)\Big|a\cdot\binom{n}{k}$, т.е. $\frac{n-1}{a}\Big|\binom{n}{k}$.

Аналогно заклучуваме $\frac{n-2}{b}\Big|\binom{n}{k}$. Бидејќи $a<n-1$ и $b<n-2$ добиваме дека $\frac{n-1}{a}$ и $\frac{n-2}{b}$ се различни од еден. Исто така важи $\frac{n-1}{a}\le n-1<n\le\binom{n}{k}$. Аналогно $\frac{n-2}{b}<\binom{n}{k}$.

Останува да покажеме дека $\frac{n-1}{a}\neq\frac{n-2}{b}$. Да претпоставиме дека $\frac{n-1}{a}=\frac{n-2}{b}$, т.е. $b(n-1)=a(n-2)$. Од последното равенство следува $(n-1)\big|a(n-2)$. Бидејќи $n-1$ и $n-2$ се заемно прости броеви и $a<n-1$, следува дека деливоста не е можна. На крај, нека p и q се прости делители на $\frac{n-1}{a}$ и $\frac{n-2}{b}$, соодветно. Јасно е дека p и q го делат биномниот коефициент $\binom{n}{k}$ и притоа $p\big|(n-1)$ и $q\big|(n-2)$. Од последното и од тоа што $n-1$ и $n-2$ се заемно прости броеви, следува и дека $p\neq q$.