

**ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2020
25.01.2020 год.**

I година

1А, 2Б. (Сигма 115, стр. 16, зад. 4) Пресметај ја разликата на изразите $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2020^2$ и $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2019 \cdot 2021$.

Решение 1. Ќе го трансформираме вториот израз на следниот начин:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2019 \cdot 2021 &= (2-1) \cdot (2+1) + (3-1) \cdot (3+1) + \dots + (2020-1) \cdot (2020+1) \stackrel{(10)}{=} \\ &= 2^2 - 1 + 3^2 - 1 + \dots + 2020^2 - 1 = 1^2 + 2^2 + \dots + 2020^2 - 2020. \end{aligned} \quad (10)$$

Јасно, сега разликата на двата изрази е еднаква на

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + 2020^2 - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2019 \cdot 2021) &= \\ = 1^2 + 2^2 + \dots + 2020^2 - (1^2 + 2^2 + \dots + 2020^2 - 2020) &= 2020. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение 2. Ги групираме собироките и извлекуваме заеднички множител пред заграда, па имаме

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + 2019^2 + 2020^2 - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2019 \cdot 2021) &= \\ = (1^2 - 1 \cdot 3) + (2^2 - 2 \cdot 4) + \dots + (2019^2 - 2019 \cdot 2021) + 2020^2 &\stackrel{(5)}{=} \\ = 1 \cdot (1 - 3) + 2 \cdot (2 - 4) + \dots + 2019 \cdot (2019 - 2021) + 2020^2 &\stackrel{(5)}{=} \\ = -2 \cdot (1 + 2 + \dots + 2019) + 2020^2 &\stackrel{(5)}{=} -2 \cdot \frac{2019 \cdot 2020}{2} + 2020^2 \stackrel{(5)}{=} \\ = 2020 \cdot (-2019 + 2020) &= 2020. \end{aligned} \quad (5)$$

1Б. Во два сада има вкупно 35 литри вода. Ако од првиот сад претуриме во вториот сад онолку вода колку што има во вториот сад, тогаш во првиот сад ќе има пет литри повеќе вода отколку во вториот. Одреди ја почетната количина на вода во садовите.

Решение. Нека на почетокот во првиот сад има x литри вода, а во вториот сад има y литри вода. Тогаш, имаме дека $x + y = 35$ (5) и $x - y = 2y + 5$ (5). Системот $\begin{cases} x + y = 35 \\ x - y = 2y + 5 \end{cases}$, има решенија $x = 27,5$ и $y = 7,5$, значи на почетокот во првиот сад имало 27,5 литри вода, а во вториот сад имало 7,5 литри вода (15).

2А. На натпреварите на еден фудбалски турнир за победа се добива еден поен, за пораз се губи поен, а нерешениот резултат не ги менува поените. Фудбалскиот тим на Дарко на крајот од првите 20 одиграни натпревари имал 15 поени, а по уште 25 одиграни натпревари завршил со 37 поени. Покажи дека барем еден натпревар во последните 25 натпревари за тимот на Дарко завршил нерешено.

Решение. Во последните 25 натпревари, тимот на Дарко успеал да освои уште $37 - 15 = 22$ поени (5). Нека во последните 25 натпревари, тимот на Дарко победил во x натпревари, а изгубил во y натпревари и ниту еден натпревар не завршил со нерешен резултат. Тогаш,

го добиваме системот $\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 22 \end{cases}$ (10). Овој систем нема целобројни решенија, од каде

заклучуваме дека барем еден натпревар во последните 25 натпревари, за тимот на Дарко, завршил нерешено (10).

3Б. (Сигма 114, стр. 29, зад. 4) Дали може броевите од 1 до 555 да се поделат на четири групи, така што збирот на броевите од втората група е за 10 поголем од збирот на броевите во првата група, збирот на броевите од третата група да е за 10 поголем од збирот на броевите во втората група и збирот на броевите од четвртата група да е за 10 поголем од збирот на броевите во третата група?

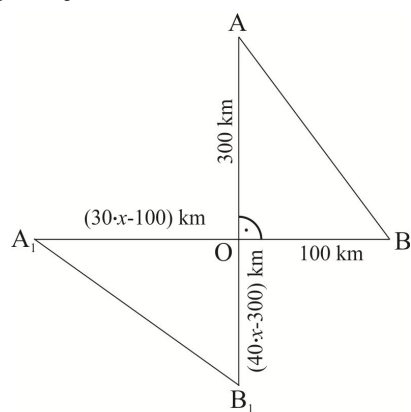
Решение. Нека S е збирот на броевите од првата група. Тогаш збирот на броевите од сите четири групи изнесува $S + (S + 10) + (S + 20) + (S + 30) = 4 \cdot S + 60$. Овој збир е делив со 4 (12). Од друга страна, збирот на броевите од 1 до 555 изнесува

$$1 + 2 + 3 + \dots + 555 = \frac{555 \cdot (555 + 1)}{2} = 555 \cdot 278 = 154290. \text{ Но, овој број не е делив со } 4, \text{ па}$$

бараната поделба не е можна (13).

3А, 4Б. Бродовите А и В се движат по праволиниски патеки нормални една на друга, кои се сечат во замислена точка О. Бродот А е одалечен 300 km од точката О и се движи со брзина од 40 km/h, а бродот В е одалечен 100 km од точката О и се движи со брзина од 30 km/h. И двата брода се движат во насока кон точката О. Бродовите се доволно далеку од брегот, така што по одредено време растојанието меѓу нив повторно ќе стане еднакво со почетното растојание. По колку часа ќе се случи тоа?

Решение. Нека А и В се точките во кои се наоѓаат бродовите на почетокот. Тогаш, триаголникот АОВ е правоаголен со катети $\overline{OA} = 300 \text{ km}$ и $\overline{OB} = 100 \text{ km}$, па за почетното растојание \overline{AB} имаме $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 300^2 + 100^2 = 100000$ (5). Нека после x часа,



растојанието меѓу бродовите повторно е еднакво на почетното растојание. Во тој момент и двата брода ќе ја имаат поминато точката О, и ќе бидат во точките A_1 и B_1 соодветно, кои се на растојание $\overline{OA_1} = 40x - 300$ и $\overline{OB_1} = 30x - 100$ од точката О (види цртеж.) (5).

Тогаш, за растојанието $\overline{A_1B_1}$ имаме

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{OB_1}^2 = (40x - 300)^2 + (30x - 100)^2 \quad \text{и од}$$

$$\overline{A_1B_1} = \overline{AB}, \text{ добиваме дека}$$

$$(40x - 300)^2 + (30x - 100)^2 = 100000 \text{ (5)}. \text{ По средување на}$$

изразот добиваме дека $x^2 - 12x = 0$ (5), односно $x(x - 12) = 0$. Бидејќи времето $x > 0$ имаме дека $x - 12 = 0$, односно дека по $x = 12$ часа, растојанието меѓу бродовите повторно ќе биде еднакво на почетното (5).

4А. (Сигма 114, стр. 31, зад. 1519) Еден четирицифрен број е делив со 7 и 19. Кога тој број ќе го помножиме со 29 и го поделиме со 41 се добива остаток 39. Кој е тој број?

Решение. Ако бројот е делив со 7 и со 19, тогаш постои природен број a , таков што нашиот четирицифрен број е еднаков на $7 \cdot 19 \cdot a = 133 \cdot a$ (3). Од условот на задачата важи дека постои природен број x , таков што $133a \cdot 29 = 41x + 39$ (5), односно $x = \frac{133a \cdot 29 - 39}{41} = 94a - 1 + \frac{3a + 2}{41}$. (5) Од $\frac{3a + 2}{41} \in \mathbb{N}$ имаме дека $3a + 2 = 41k$, за некој природен број k . Сега од тоа што бараниот број е четирицифрен, следи дека $1000 \leq 133a \leq 9999$, односно $8 \leq a \leq 75$, од каде $26 \leq 3a + 2 \leq 227$, па $3a + 2 \in \{41, 82, 123, 164, 205\}$. (7) Бидејќи само бројот 41 дава остаток 2 при делење со 3, следи дека $3a + 2 = 41$, односно $a = 13$. Бараниот четирицифрен број е $7 \cdot 19 \cdot 13 = 1729$ (5).

**ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2020
25.01.2020 год.**

Втора година

1АБ. (Сигма 114, стр. 29, зад. 3) Реши го системот
$$\begin{cases} x^2 + 7x - y + 11 = 0 \\ y^2 + 3x - y + 15 = 0 \end{cases}$$
.

Решение. Собирајќи ги двете равенки добиваме

$$x^2 + 10x + y^2 - 2y + 26 = 0 \stackrel{(10)}{\Leftrightarrow} (x+5)^2 + (y-1)^2 = 0 \stackrel{(10)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Единственото решение на системот е парот $(-5, 1)$ **(5)**.

2АБ. (Сигма 115, стр. 17, зад. 4) Корените на квадратната равенка $x^2 + ax + b + 1 = 0$ се природни броеви. Докажи дека $a^2 + b^2$ е сложен број.

Решение. Користејќи ги Виетовите правила имаме $x_1 + x_2 = -a$ и $x_1 x_2 = b + 1$ **(5)**. Тогаш $a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 x_2)^2 + 1 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$ **(10)**. Јасно, корените се природни броеви, па множителите се природни броеви $x_1^2 + 1, x_2^2 + 1 \geq 2$, од каде $a^2 + b^2$ е сложен број **(10)**.

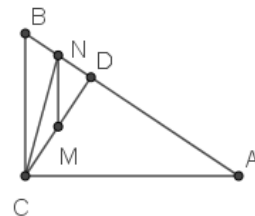
3А. Најди ги сите комплексни броеви за кои важи $\frac{1}{\operatorname{Re} z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$.

Решение. Нека $z = a + ib$, каде што a и b се реални броеви. Тогаш $\operatorname{Re} z = a$ и $\bar{z} = a - ib$ и добиваме $\frac{1}{a} = \frac{1}{a + ib} + \frac{1}{a - ib}$. Јасно, заради условот во задачата $a \neq 0$ **(5)**. Оттука, $\frac{1}{a} = \frac{a - ib + a + ib}{a^2 + b^2} = \frac{2a}{a^2 + b^2}$ и важи $2a^2 = a^2 + b^2$, $a^2 = b^2$, односно $a = \pm b$ **(15)**. Бараните комплексни броеви го имаат обликот $z = a \pm ia$, каде што a е произволен реален број, различен од нула **(5)**.

4А. Во правоаголен триаголник ($\sphericalangle C = 90^\circ$) е повлечена висината CD . Ако точката M е средина на отсечката CD , а N е средина на BD тогаш $AM \perp CN$. Докажи!

Решение. Од тоа што M и N се средини на CD и BD соодветно следува дека MN е средна линија за триаголникот $\triangle DBC$, па $MN \parallel BC$ **(10)**.

Тогаш $AC \perp BC \Leftrightarrow MN \perp AC$, од друга страна $CD \perp AN$ и оттука следува дека M е ортоцентар за $\triangle CAN$ **(10)**, AM е трета висина па $AM \perp CN$ **(5)**.



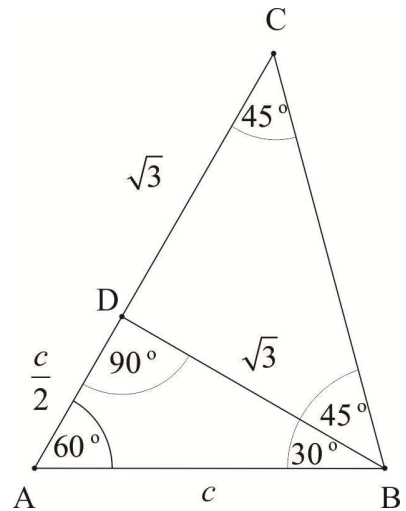
3Б. Даден е петцифрениот природен број a . Од него го формираме шестцифрениот број b така што од десно, на крајот на бројот a допишуваме 1. Го формираме и шестцифрениот

број c така што од лево, на почетокот на бројот a допишуваме 1. Најди го бројот a , ако бројот b е трипати поголем од бројот c .

Решение. Според условите во задачата $b=10a+1$ и $c=100000+a$ (15). Бидејќи $b=3c$, добиваме $10a+1=300000+3a$ и оттука $7a=299999$, односно $a=42857$ (10).

4Б. Аглите во триаголникот ABC се $\alpha=60^\circ, \beta=75^\circ$. Ако висината спуштена од темето B изнесува $\sqrt{3}$ cm, пресметај ја плоштината на триаголникот.

Решение. Нека висината спуштена од темето B е отсечката BD , $\overline{BD}=\sqrt{3}$ cm. Тогаш $\angle DBC=45^\circ$, триаголникот DBC е рамнокрак правоаголен и затоа $\overline{DC}=\sqrt{3}$ cm (7). Од правоаголниот триаголник ABD со остри агли 60° и 30° , следува дека $\overline{AD}=\frac{c}{2}$, каде што $\overline{AB}=c$ (5). Од Питагоровата теорема за триаголникот ABD имаме $c^2-\frac{c^2}{4}=3$ и оттука $c^2=4$, односно $c=2$ cm (5). Добиваме дека $\overline{AC}=1+\sqrt{3}$ cm и затоа за плоштината на триаголникот ABC добиваме $\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+3}{2}$ cm² (8).



**ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2020
25.01.2020 год.**

Трета година

1А. Реши ја равенката $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$.

Решение: Решенијата на дадената равенка ги бараме при услови $\log x \geq 0$ и $4 - \log x \geq 0$, од каде дефиниционата област на равенката е $0 \leq \log x \leq 4$, односно $1 \leq x \leq 10000$ (5). Тогаш, заради позитивноста на двете страни, квадрираме па добиваме еквивалентни равенки $4 - \log x = 3\sqrt{\log x} \Leftrightarrow 16 - 8\log x + \log^2 x = 9\log x \Leftrightarrow \log^2 x - 17\log x + 16 = 0$ (10). Со смена $\log x = t$, последната равенка станува $t^2 - 17t + 16 = 0$ и има решенија $t = 1$ и $t = 16$ (5). Од тоа што $0 \leq t \leq 4$, следува дека $t = 1$, односно $x = 10$ (5).

1Б. Бројот 18 е напишан како збир на два броја. Да се определат тие броеви така да нивниот производ достигнува најголемата можна вредност.

Решение. Нека двата броја чиј збир е 18, се x и $y = 18 - x$ (5). Треба да определиме за која вредност на променливата x , производот на броевите, односно функцијата $f(x) = x(18 - x) = -x^2 + 18x$ достигнува максимум (10). Максимумот за квадратната функција, отворена надолу, се достигнува во темето на параболата, односно за $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{-2} = 9$ (5). Тогаш бараните броеви се $x = 9$ и $y = 9$ (5).

2А, 3Б. (Сигма 114, стр.30, зад. 4) Докажи дека $\left(1 + \frac{7}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{19}{\cos x}\right) > 293$, за сите $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.
$$\left(1 + \frac{7}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{19}{\cos x}\right) = 1 + \frac{7}{\sin x} + \frac{19}{\cos x} + \frac{2 \cdot 7 \cdot 19}{2 \sin x \cos x} =$$
$$\stackrel{(10)}{=} 1 + \frac{7}{\sin x} + \frac{19}{\cos x} + \frac{266}{\sin 2x} \stackrel{(5)}{>} 1 + 7 + 19 + 266 = 293,$$

затоа што $0 < \sin x < 1, 0 < \cos x < 1, 0 < \sin 2x < 1$ (10) (за користење на ограничувањата).

2Б. (Сигма 114, стр. 30, зад. 2) Реши ја неравенката $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2x} \cdot \left(\frac{49}{4}\right)^{2x} \leq \left(\frac{7}{2}\right)^{2x^2+4}$.

Решение. Со трансформации неравенката се сведува на облиците $\left(\frac{7}{2}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{4x} \leq \left(\frac{7}{2}\right)^{2x^2+4} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^{6x} \leq \left(\frac{7}{2}\right)^{2x^2+4}$ (15). Имајќи во предвид дека $\frac{7}{2} > 1$, директно следува дека $6x < 2x^2 + 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ (10).

3А, 4Б. Бочните сидови на права тристрана призма имаат плоштини $26\text{cm}^2, 28\text{cm}^2, 30\text{cm}^2$. Пресметај го волуменот на призмата, ако нејзината плоштина е 126cm^2 .

Решение. Од $2B + 26 + 28 + 30 = 126$, добиваме дека плоштината на основата на призмата е $B = 21\text{cm}^2$ (5). Нека a, b, c се страните на триаголникот кој е основа на призмата и H е висината на призмата. Тогаш, $aH = 26, bH = 28, cH = 30$, од каде $a = \frac{26}{H}, b = \frac{28}{H}, c = \frac{30}{H}$ (5).

Според Хероновата формула за плоштина на триаголник, $B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, каде

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{26+28+30}{2H} = \frac{42}{H} \quad (5). \text{ Тогаш,}$$

$$21^2 = \frac{42}{H} \cdot \left(\frac{42}{H} - \frac{26}{H}\right) \cdot \left(\frac{42}{H} - \frac{28}{H}\right) \cdot \left(\frac{42}{H} - \frac{30}{H}\right) = \frac{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}{H^4},$$

$$\text{од каде } H^4 = \frac{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}{21^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3}{3^2 \cdot 7^2} = 2^8 = (2^2)^4,$$

односно $H = 2^2 = 4\text{cm}$. Тогаш, волуменот на призмата е $V = B \cdot H = 21 \cdot 4 = 84\text{cm}^3$ (10).

4А. (Сигма 115, стр. 17, зад. 1) Нека $a < b < c$, $a + c = 2b$ и $\frac{r}{R} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, каде

$a = \overline{BC}, b = \overline{AC}$ и $c = \overline{AB}$ се должините на страните, а r и R се радиусите на впишаната и опишаната кружница на $\triangle ABC$. Одреди ја големината на аголот во темето B .

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$ т.е. $b = 2R \sin \beta$ (5). Плоштината на

$\triangle ABC$ е $P = sr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{abc}{4R}$, од каде со замена на условот $a+c=2b$ се добива:

$$\frac{3b}{2} \cdot r = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow 6rR = ac \quad (5). \text{ Од косинусната теорема имаме}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = (a+c)^2 - 2ac - 2ac \cos \beta = (a+c)^2 - 2ac(1 + \cos \beta) = (2b)^2 - 2 \cdot 6rR(1 + \cos \beta)$$

$$12rR(1 + \cos \beta) = 3b^2 \Leftrightarrow 4rR(1 + \cos \beta) = 4R^2 \sin^2 \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r(1 + \cos \beta) = R(1 + \cos \beta)(1 - \cos \beta) \quad (8)$$

Ако последното равенство го скратиме со $1 + \cos \beta$, бидејќи $\beta \neq 180^\circ$, ќе добиеме дека

$$r = R(1 - \cos \beta). \text{ Од условот на задачата имаме дека } \frac{r}{R} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = 1 - \cos \beta \text{ од каде следува}$$

$$\text{дека } \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ т.е. } \beta = 30^\circ \quad (7).$$

**ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2020
25.01.2020 год.**

Четврта година

1АБ. (Сигма 114, стр. 30, зад. 2) За која вредност на x , низата $\sqrt{x-5}, \sqrt[4]{10x+4}, \sqrt{x+2}$ е геометриска прогресија?

Решение. За да бидат дефинирани броевите, јасно е дека мора $x \geq 5$ (5). Членовите на низата формираат геометриска прогресија ако и само ако $(\sqrt[4]{10x+4})^2 = \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x+2}$ (10).

Со квадрирање добиваме $10x+4 = x^2 - 3x - 10$. После средувањето добиваме равенка $x^2 - 13x - 14 = 0$, чии решенија се $x_1 = 14$ и $x_2 = -1$. Заради ограничувањето за x , бараната вредност за x е 14 (10).

2А. Нека $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е функција зададена со $f(x) = ax^5 + bx^3 + c \sin x - 1$, каде a, b, c се реални броеви. Ако $f(-2019) = 2019$, одреди ја вредноста $f(2019)$.

Решение. Функциите $x^5, x^3, \sin x$ се непарни функции, па за функцијата во 2019 и -2019 важи: $f(-2019) = -2019^5 a - 2019^3 b - c \sin 2019 - 1$, $f(2019) = 2019^5 a + 2019^3 b + c \sin 2019 - 1$ (15). Го пресметуваме збирот $f(2019) + f(-2019) = -2$, од каде $f(2019) = -2 - f(-2019) = -2 - 2019 = -2021$ (10).

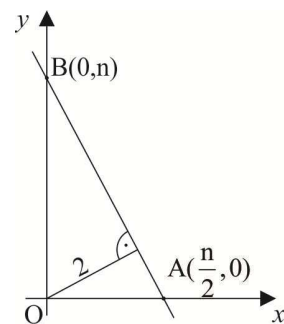
2Б. Права со коефициент на правец -2 е оддалечена за 2 cm од координатниот почеток. Пресметај ја плоштината на триаголникот формиран од дадената права и координатните оски.

Решение 1. Од условите на задачата дадената права има равенка $y = -2x + n$ (5). Нека A и B се пресечните точки на дадената права со x и y -оската, соодветно. Ако замениме $y = 0$ и $x = 0$

во правата, соодветно, ги добиваме пресечните точки $A\left(\frac{n}{2}, 0\right)$ и

$B(0, n)$ (5). Триаголникот формиран од дадената права и координатните оски е AOB , каде $O(0,0)$ е координатниот почеток. Должините на страните на правоаголниот триаголник

AOB се $\overline{OA} = \frac{|n|}{2}$, $\overline{OB} = |n|$ и $\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{n}{2} - 0\right)^2 + (0 - n)^2} = \frac{|n|\sqrt{5}}{2}$ (5).



Бидејќи правата е оддалечена 2 cm од координатниот почеток, висината на триаголникот спуштена од темето O е $h = 2$ cm. Тогаш $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = h \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow \frac{|n|}{2} \cdot |n| = 2 \cdot \frac{|n|\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |n| = 2\sqrt{5}$.

Должините на катетите на правоаголниот триаголник AOB се $\overline{OA} = \frac{|n|}{2} = \sqrt{5}$ cm и $\overline{OB} = |n| = 2\sqrt{5}$ cm. На крај, за плоштината на триаголникот AOB добиваме

$$P_{\Delta AOB} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5 \text{ cm}^2 \quad (10).$$

Забелешка. Во случај да се заборават апсолутните вредности, а се друго е во ред, да се одземат само 2 бода.

Решение 2. Каноничната равенка на права со коефициент -2 гласи $y = -2x + n$ (5).

Вредноста на n ќе ја утврдиме од условот за растојание, при што ќе сметаме, без губење на општоста, дека $n > 0$ (т.е. правата го сече позитивниот дел од y – оската). Бидејќи за растојанието d имаме $d = -2$, координатниот почеток O од кој се мери растојанието до правата има координати $x_0 = 0, y_0 = 0$ и коефициентите на правата се $a = 2, b = 1$ и $c = -n$,

во формулата за растојание од точка до права имаме: $2 = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - n|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$, од каде следи дека

$n = 2\sqrt{5}$ (10). Значи, равенката на правата е $y = -2x + 2\sqrt{5}$. Нека A и B се пресечните точки на дадената права со x и y - оската, соодветно. Ако замениме $y = 0$ и $x = 0$ во правата, ги добиваме соодветно координатите на пресечните точки $A(\sqrt{5}, 0)$ и $B(0, 2\sqrt{5})$

(5). Триаголникот формиран од дадената права и координатните оски е AOB со катети OA

и OB , па за неговата плоштината добиваме: $P_{\Delta AOB} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5 \text{ cm}^2$. (5)

3А,4Б. (Сигма 114, стр. 32, зад. 1530) На шаховски турнир учествуваат две ученички и неколку ученици. Секој со секого одиграл по една партија. Ученичките освоиле заедно 8 поени. Колку ученици имало на натпреварот, ако се знае дека тие освоиле по еднаков број поени?

Решение. Да го означиме бројот на ученици со x . Тогаш вкупниот број учесници на турнирот е $x + 2$. Бројот на сите одиграни партии е $\binom{x+2}{2} = \frac{(x+2)(x+1)}{2}$ (5). Учениците освоиле по еднаков број поени, секој по y , па тогаш за вкупниот број поени освоен од

учениците важи $xy = \frac{(x+2)(x+1)}{2} - 8$, од каде се добива квадратна равенка

$x^2 - (2y-3)x - 14 = 0$, чии решенија се $x_{1,2} = \frac{2y-3 \pm \sqrt{(2y-3)^2 + 56}}{2}$ (10). Бидејќи x, y се

природни броеви, дискриминантата на квадратната равенка треба да е полн квадрат, па $(2y-3)^2 + 56 = n^2$, односно $(n+2y-3)(n-2y+3) = 56$. Се добиваат три системи од кои

следните два даваат целобројни решенија: $\begin{cases} n+2y-3=28 \\ n-2y+3=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} n+2y-3=14 \\ n-2y+3=4 \end{cases}$ (5). Од

првиот систем го добиваме решението $y=8$, а од вториот систем добиваме $y=4$. Соодветно, бројот на ученици на турнирот е $x=14$ или $x=7$ (5).

3Б. Ако $x + y + z = 4$, тогаш $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{16}{3}$. Докажи.

Решение. Навистина, од $(x+y+z)^2=16$ имаме $16=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$ (5).

Притоа, познато е дека важат следните неравенства:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 2xy \\ y^2+z^2 \geq 2yz \\ x^2+z^2 \geq 2xz \end{cases} \Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2) \geq 2(xy+yz+xz) \quad (10).$$
 Користејќи ги неравенствата,

имаме $16=(x+y+z)^2 \leq x^2+y^2+z^2+2(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow 16 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$, што требаше и да се покаже (10).

4A. Нека c е ненегативен цел број. Дефинираме низа $a_n = n^2 + c, n \geq 1$. Нека d_n е најголемиот заеднички делител за a_n и a_{n+1} . Докажи дека $d_n \leq 4c + 1, \forall n \geq 1$.

Решение. Бидејќи $d_n \mid a_n$ и $d_n \mid a_{n+1}$ следува дека $d_n \mid a_n + a_{n+1}, d_n \mid a_n - a_{n+1}$. (5) Оттука

$d_n \mid 2(a_n + a_{n+1})$ и $d_n \mid -(a_n - a_{n+1})^2$. (5) Дополнително, $d_n \mid 2a_n + 2a_{n+1} - a_n^2 + 2a_n a_{n+1} - a_{n+1}^2$.

(5) Од $a_n = n^2 + c$ и $a_{n+1} = n^2 + 2n + c + 1$ имаме $2a_n + 2a_{n+1} - a_n^2 + 2a_n a_{n+1} - a_{n+1}^2 = 4c + 1$. (5)

Според тоа добиваме дека $d_n \mid 4c + 1$, од каде следува дека $d_n \leq 4c + 1$. (5)