



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА
МАКЕДОНИЈА

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2017

18.02.2017 година

Прва година
Група А

1. Ако $a, b \in \mathbb{N}$, тогаш барем еден од броевите $a+b, a-b, ab$ е делив со 3. Докажи!
2. За природните броеви a, b, c и d е исполнето равенството $ab=ca$. Дали може бројот $a+b+c+d$ да биде прост?
3. Докажи дека ако $x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$ тогаш $xyz=0$.
4. Даден е остроаголен триаголник ABC со ортоцентар H . Докажи дека

$$\overline{AH} \cdot h_a + \overline{BH} \cdot h_b + \overline{CH} \cdot h_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Време за работа 150 минути
Секоја задача се вреднува по 25 поени



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА
МАКЕДОНИЈА

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2017

18.02.2017 година

Втора година
Група А

1. За кои вредности на параметарот n , системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 3x + ny = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$$

има решение што ги исполнува условите $x > 0$ и $y < 0$?

2. Нека a и b се ненулти броеви, такви што равенката

$$a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$$

има единствено решение. Докажи дека $|a| = |b|$.

3. Во правоаголниот триаголник ABC со прав агол при темето C , се конструирани висината CD , симетралата CL на аголот ACB и симетралите DK и DN на аглите ADC и BDC . Притоа $D, L \in AB$, $K \in AC$ и $N \in BC$. Докажи дека точките C , K , L , D и N лежат на иста кружница. Докажи дека $\overline{KN} = \overline{CL}$.

4. Најди ги сите реални броеви a и b , $b > 0$, така што корените на дадените равенки

$$x^2 + ax + a = b \text{ и } x^2 + ax + a = -b$$

се четири последователни цели броеви.

Време за работа 150 минути

Секоја задача се вреднува по 25 поени



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА
МАКЕДОНИЈА

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2017

18.02.2017 година

Трета година
Група А

1. Реши ја равенката

$$\sin 2x + \cos(x + y) = 2.$$

2. Докажи дека производот на корените на равенката

$$x^{\log_{2016} x} \cdot \sqrt{2016} = x^{2016},$$

е природен број. Која е цифрата на единиците на тој број?

3. Реши ја неравенката

$$\sqrt{x^2 - x - 12} > 7x?$$

4. Даден е паралелограм $ABCD$. Симетралата на $\angle DAB$ ја сече страната DC во точка L , а дијагоналата BD во точка K , таква да $\overline{DK} : \overline{KB} = 3 : 4$. Пресметај ја должината на отсечката LC , ако периметарот на паралелограмот е 28.

Време за работа 150 минути

Секоја задача се вреднува по 25 поени



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2017

18.02.2017 година

Четврта година Група А

1. Нека a, b, c и d се четири последователни членови на една геометричка прогресија. Пресметај ја вредноста на изразот $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 - (a-d)^2$.
2. Определи го членот со најголем коефициент во развојот на биномот $(x + \sqrt{2})^{50}$.
3. Производот на осум последователни броеви не може да биде четврт степен на природен број. Докажи!
4. Нека $f(0) = \frac{1}{4}$ и $f(n+1) = \frac{2f(n)+3}{f(n)+2}$, за секој цел број $n \geq 0$.

Докажи дека за секој цел број $n \geq 0$, важи $0 < f(n) < \sqrt{3}$.

Време за работа 150 минути

Секоја задача се вреднува по 25 поени