51-ви Републички натпревар по математика за учениците од средното образование
Скопје, 22.III-2008 година

I година

1. Колку делители на бројот 30^{2008} не се делители на бројот 20^{2007}?

Решение. Бидејќи $30^{2008}=2^{2008}\cdot 3^{2008}\cdot 5^{2008}$ и $20^{2007}=2^{4014}\cdot 5^{2007}$, тогаш сите делители на 30^{2008} кои не се делители на 20^{2007} се од облик

1) $2^k\cdot 3^l\cdot 5^m$, $l=1,2,\dots,2008$, $k,m=0,1,2,\dots,2008$ и нив ги има вкупно $2008\cdot 2009^2$, или од облик

2) $2^k\cdot 5^m$, $m=2008$, $k=0,1,2,\dots,2008$ и нив ги има $1\cdot 2009=2009$. Значи, има вкупно $2008\cdot 2009^2+2009$ делители на бројот 30^{2008} не се делители на бројот 20^{2007}.

---

2. Нека за реалните броеви x,y,z и a важат равенствата $x+y+z=a$ и

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}. \qquad (1)$$

Докажи дека барем еден од броевите x,y,z е еднаков на a.

Решение. Заради равенството (1), броевите x,y,z и a се ненулти. Според тоа $x+y+z\neq 0$, и заради равенството $x+y+z=a$ добиваме

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{a}. \qquad (2)$$

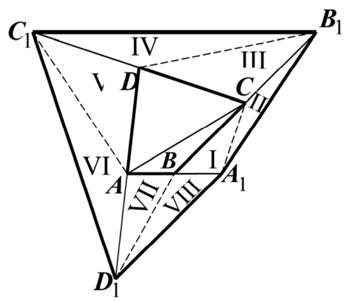
Од (1) и (2) го добиваме равенството $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$,

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)=xyz,$$
$$x^2y+xy^2+xyz+xyz+y^2z+yz^2+zx^2+xyz+z^2x=xyz,$$
$$x^2(y+z)++yz(y+z)+xy(y+z)+xz(y+z)=0,$$
$$(y+z)(x^2+xy++yz+zx)=0,$$
$$(y+z)[x(x+y)+z(x+y)]=0,$$
$$(x+y)(y+z)(z+x)=0. \qquad (3)$$

Од равенството $x+y+z=a$ добиваме дека $x+y=a-z$, $y+z=a-x$, $z+x=a-y$, и ако замениме во (3) добиваме $(a-z)(a-x)(a-y)=0$. Според последното равенство, барем еден од броевите $a-x,a-y,a-z$ е еднаков на нула. Значи, $x=a$ или $y=a$ или $z=a$.

---

3. Даден е конвексен четириаголник ABCD со плоштина P. Ја продолжуваме страната AB преку B до A_1, т.ш. $\overline{AB}=\overline{BA_1}$, потоа BC преку C до B_1, т.ш. $\overline{BC}=\overline{CB_1}$, па CD преку D до C_1, т.ш. $\overline{CD}=\overline{DC_1}$ и DA преку A до D_1, т.ш. $\overline{DA}=\overline{AD_1}$. Колкава е плоштината на четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$?



Решение: Ги спојуваме A со C_1, B со D_1, C со A_1, D со B_1. Тогаш,

$$P_{\triangle ABC}=P_I=P_{II}$$
$$P_{\triangle BCD}=P_{III}=P_{IV}$$
$$P_{\triangle CDA}=P_V=P_{VI}$$
$$P_{\triangle DAB}=P_{VII}=P_{VIII}$$

каде што

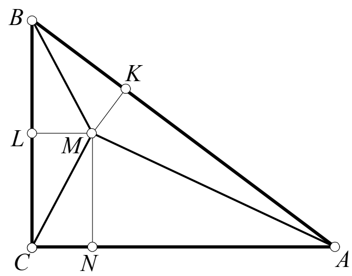
$$P_I=P_{\triangle BA_1C}, P_{II}=P_{\triangle CA_1B_1}, P_{III}=P_{\triangle DCB_1}, P_{IV}=P_{\triangle C_1DB_1},$$
$$P_V=P_{\triangle C_1DA}, P_{VI}=P_{\triangle C_1D_1A}, P_{VII}=P_{\triangle AD_1B}, P_{VIII}=P_{\triangle BD_1A_1}$$

Имаме:

$$P_{\triangle ABC}+P_{\triangle BCD}+P_{\triangle CDA}+P_{\triangle DAB}=P_I+P_{III}+P_V+P_{VII}=P_{II}+P_{IV}+P_{VI}+P_{VIII}=2P$$
$$P_1=P+(P_I+P_{II}+P_{III}+P_{IV}+P_V+P_{VI}+P_{VII}+P_{VIII})=P+(2P+2P)=5P$$

---

4. Страните на еден триаголник имаат должини $a=3$, $b=4$ и $c=5$. Дали постои точка во внатрешноста на триаголникот која е на растојание помало од 1 од секоја од страните на триаголникот.



Решение. Нека ABC е триаголник во кој $\overline{BC}=a=3$, $\overline{AC}=b=4$ и $\overline{AB}=c=5$ се должините на страните. Заради равенството

$$a^2+b^2=3^2+4^2=5^2=c^2,$$

според обратната теорема на Питагора триаголникот е правоаголен.

Нека M е точка од внатрешноста на траиголникот која е на растојание помало од 1 од секоја страна на триаголникот ABC.Нека точките K,L и N се подножја на нормалите повлечени од точката M кон страните AB,BC и CA соодветно (види цртеж). Тогаш отсечките MK,ML и MN се висини во триаголниците AMB,BMC и CMA соодветно. При тоа

$$P_{ABC}=P_{AMB}+P_{BMC}+P_{CMA}\,. \tag{1}$$

Ако $\overline{MK}=x,\overline{ML}=y$ и $\overline{MN}=z$, тогаш според претпоставката на задачата $x,y,z<1$.

Од друга страна $P_{BMC}+P_{CMA}+P_{AMB}=\frac{xa}{2}+\frac{yb}{2}+\frac{zc}{2}<\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}=\frac{12}{2}=6=P_{ABC}$,
што е во спротивност со (1). Значи, таква точка M не постои.