I година

1. Цената на еден билет е 50 денари. Кога цената е снижена, бројот на посетителите е зголемен за 50%, а заработувачката за 20%. За колку е снижена цената на влезниот билет?

Решение А. Две лица, по старата цена би платиле 100 денари, а три лица (50% повеќе), по новата цена би платиле 120 денари (20% повеќе од 100 денари). Значи, едно лице, по новата цена, би платило 40 денари, од каде што следува дека снижувањето е 20% (од 50 денари на 40 денари).

Решение Б. Нека бројот на посетители е p, заработувачката z, а новата цена на еден билет x. Тогаш, $50p=z$ и $x\cdot\frac{150}{100}p=\frac{120}{100}z$. Ако ги поделиме последните две равенства, добиваме $\frac{50p}{x\cdot 1{,}5p}=\frac{z}{1{,}2z}$, од каде се добива дека $x=40$. Значи, снижувањето е 20%.

Решение В. Нека бројот на посетители е x, тогаш заработувачката е $50x$. Ако новата цена на билетот е y, тогаш бројот на посетителите е $1{,}5x$ (за 50% повеќе), а заработувачката $60x$ (за 20% повеќе од $50x$). Тогаш, $1{,}5x\cdot y=60x$, од каде што $y=40$. Следствено, снижувањето е 20%.

---

2. Природните броеви од 1 до n се поделени на две множества. Едното множество содржи два од дадените броеви, а второто множество ги содржи останатите $n-2$ броеви. Производот на двата броја од првото множество е еднаков на збирот од сите броеви од второто множество. Дали може оваа поделба да се направи за: а) $n=10$, б) $n=15$?

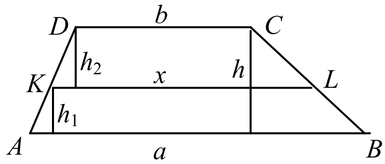
Решение. а) Нека x и y се броевите од првото множество, при што $1\le x<y\le 10$. Тогаш, од условот имаме $1+2+...+10-x-y=xy$, од каде $xy+x+y=55$, со додавање на 1 од двете страни се добива $xy+x+y+1=56$, од каде $(x+1)(y+1)=56$. Ако $x+1=7$ и $y+1=8$, односно ако $x=6$ и $y=7$, можна е поделбата на две такви множества за $n=10$. Имено, важи $1+2+3+4+5+8+9+10=6\cdot 7$.

б) Нека x и y се броевите од првото множество, при што $1\le x<y\le 15$. Тогаш, од условот имаме $1+2+...+15-x-y=xy$, од каде $xy+x+y=120$, па слично како претходно се добива $(x+1)(y+1)=121$. Како $x<y$ можни се следните случаи $x+1=1$, $y+1=121$ или $x+1=11$, $y+1=11$. Во првиот случај се добива $x=0$, $y=120$, што не е можно затоа што $x\ge 1$ и $y\le 15$. Во вториот случај се добива $x=y=10$, што пак не е можно затоа што треба $x\ne y$. Значи, за $n=15$ не е можна поделбата.

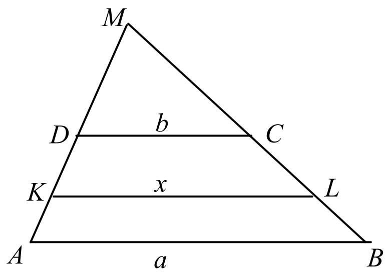
---

3. Даден е трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$. Најди ја должината на отсечката за која се исполнети условите

- паралелна е со AB и CD
- го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини
- нејзините крајни точки лежат на краците на трапезот.



Решение А. Нека правата $p\,||\,AB\,||\,CD$ ги сече краците AD и BC во точките K и L соодветно и го преполовува трапезот $ABCD$ на два енаквоплоштни дела. Нека P е плоштината на трапезот $ABCD$, а h е неговата висина, нека P_1 е плоштината на трапезот $ABLK$ со висина h_1, а P_2 плоштината на трапезот $KLCD$ со висина h_2. Нека $\overline{KL}=x$.(види цртеж) Тогаш, важи $h=h_1+h_2$ и $P_1=P_2=\frac{1}{2}P$. Од $P=\frac{a+b}{2}\cdot h$, $P_1=\frac{a+x}{2}\cdot h_1$ и $P_2=\frac{x+b}{2}\cdot h_2$, имаме дека $h=\frac{2P}{a+b}$, $h_1=\frac{2P_1}{a+x}=\frac{P}{a+x}$ и $h_2=\frac{2P_2}{x+b}=\frac{P}{x+b}$. Со замена во $h=h_1+h_2$, добиваме $\frac{2P}{a+b}=\frac{P}{a+x}+\frac{P}{x+b}$, т.е. $\frac{2}{a+b}=\frac{1}{a+x}+\frac{1}{x+b}$, односно $2(a+x)(x+b)=(a+b)(x+b)+(a+b)(a+x)$.Со средување на последното равенство се добива $2x^2=a^2+b^2$, од каде $x=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}=\sqrt{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{2}})^2}$.



Решение Б. Нека правата $p\,||\,AB\,||\,CD$ ги сече краците AD и BC во точките K и L соодветно и го преполовува трапезот $ABCD$ на два енаквоплоштни дела. Нека $\overline{KL}=x$. Ги продолжуваме краците AD и BC до нивниот пресек M.(види цртеж) Тогаш, триаголниците ΔABM, ΔKLM и ΔDCM се слични, па следи дека $P_{ABM}:P_{KLM}:P_{DCM}=a^2:x^2:b^2$, односно $P_{ABM}=ka^2$, $P_{KLM}=kx^2$ и $P_{DCM}=kb^2$. Од условот $P_{ABLK}=P_{KLCD}$ добиваме $P_{ABM}-P_{KLM}=P_{KLM}-P_{DCM}$, т.е $ka^2-kx^2=kx^2-kb^2$, од каде се добива $x^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, па $x=\sqrt{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{2}})^2}$.

---

4. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a, b и c важи неравенството $\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<1$.

Решение.Од равенството $c-a=(c-b)+(b-a)$ добиваме

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-b}{c+a}+\frac{b-a}{c+a}=(a-b)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}\right)+(b-c)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right)=$$

$$=\frac{(a-b)(c-b)}{(a+b)(c+a)}+\frac{(b-c)(a-b)}{(b+c)(c+a)}=\frac{(a-b)(b-c)}{c+a}\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b}\right)=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Од неравенствата $|a-b|<a+b$, $|b-c|<b+c$ и $|c-a|<c+a$ се добива бараното неравенство, односно

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|=\left|\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|=\frac{|a-b||b-c||a-c|}{(a+b)(b+c)(c+a)}<\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1.$$