XIV Македонска математичка олимпијада
14.IV-2007

Задачи:

1. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи:

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq\frac{6}{a+b+c}.$$

Решение. За позитивните реални броеви a,b,c, според неравенството на Коши Буњаковски имаме

$$ab+bc+ca\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2}=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca).$$

Според тоа

$$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$$

$$\frac{ab+bc+ca}{3}\leq\frac{(a+b+c)^2}{9}$$

$$\frac{3}{ab+bc+ca}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2},$$

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq1+\frac{9}{(a+b+c)^2}=\left(1-\frac{3}{a+b+c}\right)^2+\frac{6}{a+b+c}\geq\frac{6}{a+b+c},$$

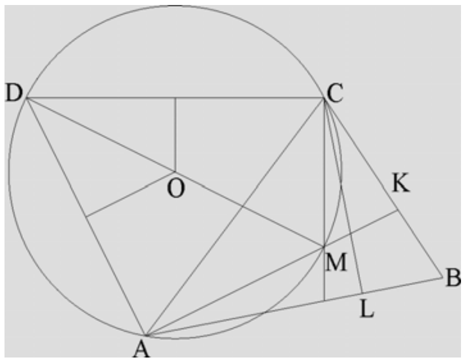
Значи,

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq\frac{6}{a+b+c}.$$

2. Нека ABCD е трапез со основа AD, CL е нормала спуштена од C на AB (L е на AB), AK е нормала на AD и K е на BC. Нека O е центар на опишаната кружница на триаголникот ACD. Нека правите AK, CL и DO се сечат во една точка. Докажи дека четириаголникт е паралелограм.

Решение: Нека M е пресекот на опишаната кружница со DO.

$$\angle CAM=\angle ODC=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle DOC)=$$
$$=90^\circ-\angle DAC=\angle CAK$$



Од претходното следува дека AK минува низ M то ест правите AK, CL и DO се сечат во M.

$$\angle ACL=\angle ACM=\angle ODA=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle DOA)=$$
$$=90^\circ-\angle DCA\Rightarrow\angle DCL=90^\circ$$

Од ова следува дека AB и DC се паралелни, па четириаголникот е паралелограм.

3. Природните броеви a,b и c се различни меѓу себе и за нив важи:

$$a\,|\,b+c+bc,\qquad b\,|\,a+c+ac,\qquad c\,|\,a+b+ab.$$

Докажи дека барем еден од броевите a,b и c не е прост број.

Решение. Нека претпоставиме дека сите три броја a,b и c се прости броеви. Од условите за деливост имаме дека

$$a\,|\,a+b+c+ac+ab+bc$$

$$b\,|\,a+b+c+ac+ab+bc$$

$$c\,|\,a+b+c+ac+ab+bc.$$

Бидејќи a,b,c се различни прости броеви, имаме дека $abc\,|\,a+b+c+ac+ab+bc+abc$, па според тоа

$$\frac{a+b+c+ac+ab+bc}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\quad(*),$$

е природен број.

Ниеден од броевите не може да биде 2 бидејќи тогаш би добиле дека 2 е делител на непарен број.

Затоа изразот од десната страна во (*) прима најголема вредност за $a=3,b=5,c=7$, односно имаме

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}+\frac{1}{21}=\frac{86}{105}<1,$$

што е спротивно со тврдењето дека $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$ е природен број.

4. Да се определат сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x^3+y^3)=x^2f(x)+yf(y^2).$$

Решение. Бидејќи равенството е исполнето за секои x и y, за $x=0,y\in\mathbb{R}$ добиваме

$$f(y^3)=f(0^3+y^3)=0^2f(0)+yf(y^2)=yf(y^2)$$

Аналогно, за $x\in\mathbb{R}, y=0$ добиваме дека

$$f(x^3)=f(x^3+0^3)=x^2f(x)+0f(0^2)=x^2f(x).$$

Ако $x^2f(x)$ и $yf(y^2)$ ги замениме во почетната равенка, добиваме дека

$$f(x^3+y^3)=f(x^3)+f(y^3).$$

Ако $u,v\in\mathbb{R}$ се произволно зададени реални броеви, тогаш постојат x и y така што $u=x^3, v=y^3$, па според тоа

$$f(u+v)=f(x^3+y^3)=f(x^3)+f(y^3)=f(u)+f(v),$$

односно функцијата f е адитина. Од равенството $f(u+v)=f(u)+f(v)$ добиваме дека $f(0)=0$. Од друга страна, за броевите $x,0$ и $0,x$ имаме

$$f(x^3)=f(x^3+0^3)=x^2f(x)+0f(0^2)=x^2f(x)$$
$$f(x^3)=f(0^3+x^3)=0^2f(0)+xf(x^2)=xf(x^2),$$

па според тоа точно е равенството

$$x^2f(x)=xf(x^2),$$

односно

$$f(x^2)=xf(x).$$

Користејќи ја адитивноста и последното равенство добиваме

$$f((x+1)^2)=(x+1)f(x+1)=(x+1)[f(x)+f(1)]=xf(x)+f(x)+xf(1)+f(1)$$
$$f((x+1)^2)=f(x^2+2x+1)=f(x^2+x+x+1)=f(x^2)+2f(x)+f(1)=xf(x)+2f(x)+f(1)$$

Од последните две равенства имаме

$$xf(x)+f(x)+xf(1)+f(1)=xf(x)+2f(x)+f(1)$$

односно $f(x)=f(1)x$.

Ако воведеме ознака $f(1)=k$, добиваме дека $f(x)=kx$, каде $k\in\mathbb{R}$. Не е тешко да се провери дека секоја функција од облик $f(x)=kx$ ја задоволува равенката.

5. Нека n е природен број кој е делив со 4. Да се определи бројот на биекции f, $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ кои што го исполнуваат условот:

$$f(j)+f^{-1}(j)=n+1,\ j=1,2,\ldots,n$$

Решение. Ако σ е биекција која што го исполнува условот од задачата тогаш $\sigma(j)\neq j$. Навистина, ако $\sigma(j)=j$ (значи j е неподвижен елемент), тогаш $\sigma^{-1}(j)=j$ па според тоа $\sigma(j)+\sigma^{-1}(j)=2j$. Бидејќи $2j\neq n+1$ за било кој природен број j, $j=1,2,3,\ldots,n$, добиваме контрадикција. Според тоа, било која пермутација која го задоволува условот

$$\sigma(j)+\sigma^{-1}(j)=n+1$$

нема неподвижни елементи.

Нека σ е пермутација која го задоволува равенството (1) и нека $\sigma(a)=b$. Значи, $a\neq b$ и од равенството

$$\sigma(a)+\sigma^{-1}(a)=n+1,$$

добиваме дека $\sigma^{-1}(a)=n+1-b$, односно $\sigma(n+1-b)=a$. Бидејќи $\sigma^{-1}(b)=a$, од равенството

$$\sigma(b)+\sigma^{-1}(b)=n+1,$$

добиваме $\sigma(b)=n+1-a$, па според тоа $\sigma^{-1}(n+1-a)=b$ од каде имаме дека $\sigma(b)=n+1-a$. Од равенствата $\sigma^{-1}(n+1-a)=b$ и $\sigma(n+1-a)+\sigma^{-1}(n+1-a)=n+1$, добиваме дека $\sigma(n+1-a)=n+1-b$ и $\sigma^{-1}(n+1-b)=n+1-a$. Значи, ако $a,b\in\{1,2,3,\ldots,n\}$, $a\neq b$ и $\sigma(a)=b$, тогаш имаме

$$a\xrightarrow{\sigma}b\xrightarrow{\sigma}n+1-a\xrightarrow{\sigma}n+1-b\xrightarrow{\sigma}a.$$

Според тоа, ако $n=4k$, секоја пермутација σ која го исполнува условот на задачата го разбива множеството елементи н $\{1,2,3,\ldots,n\}$ на групи од, по четири елементи така што тие формираат циклус.

Обратно, нека од множеството $\{1,2,3,\ldots,n\}$, каде $n=4k$ формираме групи од по четири елементи од обликот $\{p,q,n+1-p,n+1-q\}$ каде $a\neq b$. Бидејќи множеството $\{1,2,3,\ldots,n\}$ има $n=4k$ елементи, добиваме дека такво разбивање е можно и при тоа делбените множества се попарно дисјунктни. За секое такво четириелементно множество определуваме по едно пресликување

$$p\to q\to n+1-p\to n+1-q\to p.$$

Треба да го определиме бројот различни такви разбивања.

Заради дисјунктноста на множеството, и тоа што секое вакво пресликување е биекција добиваме дека на $\{1,2,3,\ldots,n\}$ е определена биекција и не е тешко да се провери дека таа ги исполнува бараните својства.

Според тоа, елементите на секое множество $\{j,n+1-j\}$ се членови на еден циклус на пермутацијата, и секој циклус со должина 4 кој е дел од пермутацијата се состои од елементите од две такви множества.Множеството $\{j,n+1-j\}$, $j=1,2,3,\ldots,2k$ ќе го означиме со A_j. Ако $i\neq j$, тогаш $A_i\cap A_j=\varnothing$.

Од множеството $\{A_1,A_2,\ldots,A_{2k}\}$ два елементи можеме да избереме на $\binom{2k}{2}$ начини. Од преостанатите елементи можеме да избереме на $\binom{2k-2}{2}$-начини две множества. Продолжувајќи на тој начин добиваме дека низа со должина k во која на секое место има запишано две множества(не е битен редоследот на запис на двете множества на даденото место) можеме да формираме на

$$\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{(2k)!}{2^k}$$

начини.

За секоја низа од $\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{(2k)!}{2^k}$-те можни низи , секоја од кои се состои од k парови множества A_pA_q, $p\neq q$ (во еден запис има k такви парови) за секој пар определени се две биекции

$$p\to q\to n+1-p\to n+1-q\to p$$
$$p\to n+1-q\to n+1-p\to q\to p$$

Според тоа, со секоја низа со должина k определени се 2^k различни пермутации кои го задоволуваат условот на задачата.

Бројот на такви двоелементни подмножества е еднаков на $2k$. Бројот на разбивања на множеството $\{1,2,3,\ldots,n\}$ на такви четириелементни подмножества запишани во даден редослед е еднаков на

$$\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}\binom{2k-4}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{(2k)!}{2^k}.$$

Бидејќи редоследот на запис на четириелементните множества од лево кон десно не е битен, можеме да ги сметгаме за еднакви, добиваме дека со еден запис исти такви има $k!$. Бидејќи нив ги сметаме за еднакви, добиваме дека бројот на такви пермутации е еднаков на

$$\frac{1}{k!}\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}\binom{2k-4}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{(2k)!}{k!2^k}2^k=2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4k-2).$$