XLIX Републички натпревар по математика за учениците од средното образование
Куманово, 18.III-2006 година

I година

1. Определи го најмалиот природен број чија половина е полн квадрат, третина е полн куб, а петтината е полн петти степен.

Решение. Бараниот број мора да е делив со 2,3 и 5 (од условот), па мора да е од облик $n=2^x3^y5^z$. Ако има други множители нема да биде најмал. Од условот на задачата имаме:

$$\frac{n}{2}=2^{x-1}3^y5^z \quad (1) \qquad \frac{n}{3}=2^x3^{y-1}5^z \quad (2) \qquad \frac{n}{5}=2^x3^y5^{z-1} \quad (3)$$

Од (1) следи дека x-1, y, z мора да се парни. Од (2) следи дека x, y-1, z мора да се деливи со три. Од (3) следи дека x, y, z-1 мора да се деливи со пет.

Значи $\boldsymbol{x}$ е непарен, делив со 3 и со 5, $\boldsymbol{y}$ е парен, делив со 5 и дава остаток 1 при делење со 3, $\boldsymbol{z}$ е парен, делив со 3 и дава остаток 1 при делење со 5. Бидејќи $\boldsymbol{n}$ е најмал, тогаш и $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ мора да се најмали, па имаме:

$\boldsymbol{x}$**=15,** $\boldsymbol{y}$**=10,** $\boldsymbol{z}$**=6.** Значи $n=2^{15}3^{10}5^6=30\ 233\ 088\ 000\ 000$.

2. Ако $\frac{a_1}{1+b_1}+\frac{a_2}{1+b_2}+\cdots+\frac{a_n}{1+b_n}=\frac{A}{1+B}$ и

$$\frac{a_1(B-b_1)}{1+b_1}+\frac{a_2(B-b_2)}{1+b_2}+\cdots+\frac{a_n(B-b_n)}{1+b_n}=0,$$

докажи дека $a_1+a_2+\cdots+a_n=A$.

Решение. Нека $k_i=\frac{a_i}{1+b_i}, i=1,2,\ldots,n,$ тогаш од првото равенство следи дека $A=(1+B)(k_1+k_2+\cdots+k_n)=*$. Од второто равенство имаме

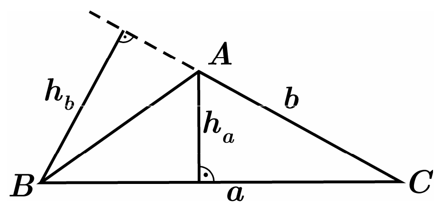
$$k_1(B-b_1)+k_2(B-b_2)+\cdots+k_n(B-b_n)=0\Rightarrow B(k_1+k_2+\cdots+k_n)=k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n.$$

Тогаш,

$$*=k_1+k_2+\cdots+k_n+B(k_1+k_2+\cdots+k_n)=k_1+k_2+\cdots+k_n+k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n=$$
$$=k_1(1+b_1)+k_2(1+b_2)+\cdots+k_n(1+b_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

што требаше да се докаже.

3. Нека $\triangle ABC$ е тапоаголен со тап агол кај темето A. Нека $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b$, h_a-висината спуштена од темето A и h_b- висината спуштена од темето B. Докажи дека $a+h_a>b+h_b$.



Решение. Од условот на задачата имаме:

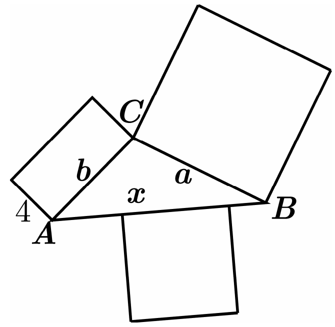
$$a>b>h_a \quad (1)$$

Според тоа

$$2P=bh_b=ah_a\overset{(1)}{<}ab\Rightarrow\frac{2P}{ab}<1\Rightarrow\frac{2P}{ab}(a-b)<a-b\Rightarrow\frac{2P}{b}-\frac{2P}{a}<a-b\Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_b-h_a<a-b\Rightarrow b+h_b<a+h_a.$$

4. Градовите A, B и C се поврзани со праволиниски патишта. Покрај патот A-B се наоѓа квадратно поле со страна $0{,}5\overline{AB}$, а покрај патот B-C се наоѓа квадратно поле со страна $\overline{BC}$; покрај патот A-C постои шума со правоаголна форма, чија должина е $\overline{AC}$, а ширина 4 километри. Најди ја плоштината на шумата, ако таа е за 20 километри поголема од збирот на плоштините на квадратните полиња.

Решение. Нека $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{AC}=x$. При тоа $a+b\geq x$.



Според условот

$$4x=\frac{a^2}{4}+b^2+20 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+5$$

$$a+b\geq\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+5\Rightarrow \quad 16a+16b\geq a^2+4b^2+80$$

$$a^2-16a+4b^2-16b+80\leq 0\Rightarrow \quad (a-8)^2+4(b-2)^2\leq 0$$

$$\Rightarrow a=8, b=2 \quad\Rightarrow x=10 \quad\Rightarrow\quad P=40km^2$$

II година

1. Најди го реалниот број m така што равенката $(x^2-2mx-4(m^2+1))(x^2-4x-2m(m^2+1))=0$ има точно три различни реални корени.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки $\left[\begin{array}{l}x^2-2mx-4(m^2+1)=0\\ x^2-4x-2m(m^2+1)=0\end{array}\right.$. Дискриминантата на првата равенка е $D_1=4(5m^2+4)$, а на втората $D_2=4(4+2m(m^2+1))$. Јасно е дека $D_1>0$. Тогаш, бидејќи првата равенка има секогаш два различни реални корени, можни се следниве случаи:

А) Втората равенка има точно еден реален корен, различен од корените на првата.

Б) Втората равенка има два различни реални корени, но еден од нив е еднаков со корен на првата равенка.

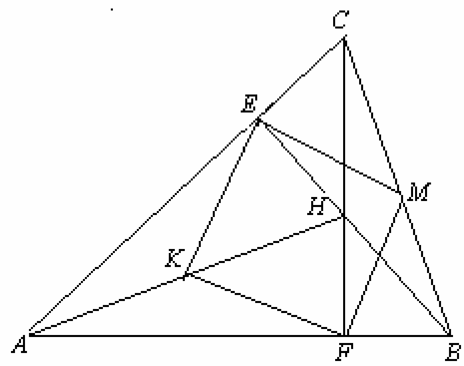
А) Во овој случај ја добиваме равенката $D_2=m^3+m+2=(m+1)(m^2-m+2)=0$ која во множеството реални броеви има едно решение $m=-1$. Тогаш решенија на првата равенка се 2 и -4, а на втората решение е 2, односно $(x^2-2mx-4(m^2+1))(x^2-4x-2m(m^2+1))=0$ има две реални решенија. Значи $m=-1$ не е бараното решение.

Б) Нека x_0 е заедничкиот корен на равенките од системот. Тогаш ако од ${x_0}^2-2mx_0-4(m^2+1)=0$ ја одземеме ${x_0}^2-4x_0-2m(m^2+1)=0$ добиваме $(4-2m)x_0=(m^2+1)(4-2m)$. Ако $m=2$ тогаш првата и втората равенка од системот се еднакви па $(x^2-2mx-4(m^2+1))(x^2-4x-2m(m^2+1))=0$ има точно два реални различни корени. Значи $m\neq 2$, а тогаш $x_0=m^2+1$. Со замена на x_0 во првата равенка ја добиваме равенката $(m^2+1)(m^2-2m-3)=0$, а нејзини реални решенија се $m_1=-1$ и $m_2=3$. Од дискусијата под А), $m=-1$ не е бараното решение. Ако $m=3$ тогаш корени на првата равенка се 10 и -4, а на втората -4 и -6. Значи бараното решение е $m=3$.

2. За кои вредности на реалниот параметар a, системот $\begin{cases}x+y+z=\sqrt{3a-1}\\ x^2+y^2+z^2=a\\ xy=z^2\end{cases}$ има различни реални решенија?

Решение. За системот да има решение треба $3a-1\geq 0$ и $a\geq 0$, односно $a\geq\frac{1}{3}$. Втората равенка од системот е еквивалентна со равенката $(x+y)^2-2xy+z^2=a$. Тогаш, со смена на $x+y$ и xy од првата и третата равенка, соодветно, ја добиваме равенката $(\sqrt{3a-1}-z)^2-2z^2+z^2=a$, која е еквивалентна со равенката $2\sqrt{3a-1}\,z=2a-1$. Последната равенка има решение во реалните броеви ако $a\neq\frac{1}{3}$, па затоа $a>\frac{1}{3}$. Тогаш $z=\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}$. Со замена на $z=\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}$ во првата и втората равенка на системот, го добиваме системот $\begin{cases} x+y=\frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}} \\ xy=\left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2 \end{cases}$. Тогаш x и y се решенија на квадратната равенка $t^2-\frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}}t+\left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2=0$. Бидејќи системот треба да има различни реални решенија, треба $\left(\frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2-4\left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2>0$. Последната неравенка е еквивалентна со неравенката $\frac{8a-3}{4(3a-1)}>0$, а бидејќи именителот е позитивен следува дека $8a-3>0$. Оттука следува дека $a>\frac{3}{8}$. Конечно, за $a>\frac{3}{8}$ системот има различни реални решенија.

3. Даден е остроаголниот триаголник ABC со агол $\angle BAC=45^\circ$. Нека $\overline{BE}$ и $\overline{CF}$ се висините на триаголникот, H е ортоцентарот, а M и K се средини на $\overline{BC}$ и $\overline{AH}$, соодветно. Докажи дека четириаголникот $KFME$ е квадрат.



Решение. Триаголникот AHE е правоаголен, K е средина на неговата хипотенуза па затоа $\overline{KE}=\overline{KH}=\overline{KA}$. Бидејќи K е средина и на хипотенузата на правоаголниот триаголник AFH, следува $\overline{KF}=\overline{KH}=\overline{KA}$, Оттука добиваме $\overline{KE}=\overline{KF}$ (1). Слично, добиваме дека $\overline{ME}=\overline{MF}$ (2). Триаголниците ABE и HCE се рамнокраки правоаголни па важи $\overline{AE}=\overline{BE}$ и $\overline{HE}=\overline{CE}$. Тогаш триаголниците AHE и BCE се складни и оттука $\overline{AH}=\overline{BC}$. Затоа $\overline{EM}=\frac{\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{AH}}{2}=\overline{KE}$ (3), па од (1), (2) и (3) следува дека четириаголникот $KFME$ е ромб. Бидејќи $\angle KEM=\angle KEH+\angle HEM=\angle KHE+\angle HBM=\angle AHE+\angle EAH=90^\circ$, добиваме дека четириаголникот $KFME$ е квадрат.

4. Дали постои квадратен трином $p(x)=ax^2+bx+c$ каде што a, b, c се цели броеви, $a\neq 0$, така што за секој природен број n кој во својот десетичен запис има само единици, бројот $p(n)$ во својот десетичен запис има само единици?

Решение. Нека $n=\underbrace{11\ldots1}_{k}$, $k\in\mathbb{N}$. Тогаш $9n+2=1\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1$, $(9n+2)n=\underbrace{11\ldots1}_{2k}$. Според тоа, триномот $p(x)=9x^2+2x$ го има бараното својство.

III година

1. Пресметај го збирот $S=S_1+S_2$, каде што S_1 и S_2 се зададени со

$S_1=\frac{1}{\log_{\text{tg}1^0}2}+\frac{2}{\log_{\text{tg}2^0}2^2}+\ldots+\frac{44}{\log_{\text{tg}44^0}2^{44}}$ и

$S_2=\frac{46}{\log_{\text{tg}46^0}2^{46}}+\frac{47}{\log_{\text{tg}47^0}2^{47}}+\ldots+\frac{89}{\log_{\text{tg}89^0}2^{89}}$

Решение. Користејќи го својството за логаритми $\log_x a^k=k\log_x a$, збирот $S=S_1+S_2=$

$=\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}1^0} 2}+\frac{2}{\log_{\mathrm{tg}2^0} 2^2}+\ldots+\frac{44}{\log_{\mathrm{tg}44^0} 2^{44}}+\frac{46}{\log_{\mathrm{tg}46^0} 2^{46}}+\ldots+\frac{89}{\log_{\mathrm{tg}89^0} 2^{89}}$
$=\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}1^0} 2}+\frac{2}{2\log_{\mathrm{tg}2^0} 2}+\ldots+\frac{44}{44\log_{\mathrm{tg}44^0} 2}+\frac{46}{46\log_{\mathrm{tg}46^0} 2}+\ldots+\frac{89}{89\log_{\mathrm{tg}89^0} 2}$
$=\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}1^0} 2}+\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}2^0} 2}+\ldots+\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}44^0} 2}+\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}46^0} 2}+\ldots+\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}89^0} 2}$
Користејќи го својството $\frac{1}{\log_x a}=\log_a x$, збирот го доведуваме до облик
$S=\log_2 \mathrm{tg}1^0+\ldots+\log_2 \mathrm{tg}44^0+\log_2 \mathrm{tg}46^0+\ldots+\log_2 \mathrm{tg}89^0$
Ќе ги групираме собироците и од својствата на логаритмите и функциите $\mathrm{tg}x$ и $\mathrm{ctg}x$ добиваме
$S=\log_2 \mathrm{tg}1^0+\log_2 \mathrm{tg}89^0+\log_2 \mathrm{tg}2^0+\log_2 \mathrm{tg}88^0+\ldots+\log_2 \mathrm{tg}44^0+\log_2 \mathrm{tg}46^0$
$=\log_2(\mathrm{tg}1^0\cdot \mathrm{tg}89^0)+\ldots+\log_2(\mathrm{tg}44^0\cdot \mathrm{tg}46^0)$
$=\log_2(\mathrm{tg}1^0\cdot \mathrm{ctg}1^0)+\ldots+\log_2(\mathrm{tg}44^0\cdot \mathrm{ctg}44^0)$
$=44\log_2 1=44\cdot 0=0$

2. Одреди ја најголемата вредност на функцијата $f(x)=3-2x-x^2$ на множеството решенија на равенката $2\cos^2 x+\cos 4x=0$.

Решение. Да го одредиме прво множеството на решенија на равенката. Користејќи ја тригонометриската трансформација $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, равенката се сведува до облик $1+\cos 2x+2\cos^2 2x-1=0$, односно $\cos 2x+2\cos^2 2x=0$. Последното е еквивалентно со $\cos 2x(1+2\cos 2x)=0$, а решенијата тогаш се добиваат од

1) $\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$, за $k\in\mathbb{Z}$.

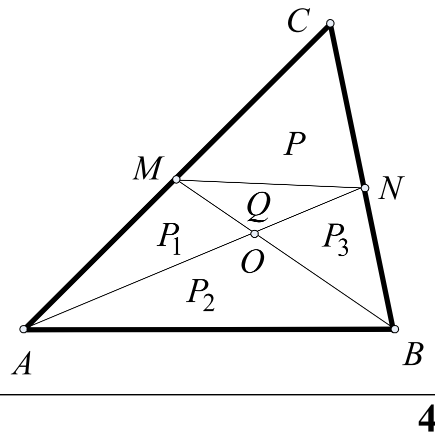
или 2) $\cos 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}$. Последното може заради произволноста на $k\in\mathbb{Z}$ да се запишше во облик $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

Значи множеството решенија на равенката е зададено со
$M=\left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{k\pi\pm\frac{\pi}{3}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Да ја разгледаме функцијата $f(x)=3-2x-x^2$. За неа е точно дека темето и е во точка $T(-1,4)$, истата расте на интервалот $(-\infty,-1)$, а опаѓа на $(-1,\infty)$. Тогаш за најголемата вредност на множеството М, функцијата ќе ја разгледуваме како растечка функција на $M\cap(-\infty,-1)$, а потоа како опаднувачка на $M\cap(-1,\infty)$. На $M\cap(-\infty,-1)$, точка во која функцијата достигнува најголема вредност е $-\frac{\pi}{3}$, а на $M\cap(-1,\infty)$ точка во која функцијата достигнува најголема вредност е $-\frac{\pi}{4}$.

Останува да се споредат уште $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=3+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi^2}{4}$ и $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=3+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}$. Бидејќи $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, најголемата вредност на функцијата на множеството решенија на равенката се достигнува во $-\frac{\pi}{3}$ и изнесува $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=3+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi^2}{4}$.

3. Во триаголникот ABC на страната AC е земена точка M, а на страната BC е земена точка N. Отсечките AN и BM се сечат во точката O. Површините на триаголниците AMO, ABO, BNO се еднакви на P_1, P_2, P_3 соодветно. Пресметај ја плоштината на триаголникот CMN.



Решение. Плоштината на триаголникот CMN ќе ја означиме со Π а плоштината на триаголникот MON ќе ја означиме со Q.

Триаголниците AMO и MON имаат еднакви висини кон AO и ON, соодветно, и триаголниците AOB и NOB имаат еднакви висини кон AO и ON, соодветно, па затоа $\frac{P_1}{Q}=\frac{\overline{AO}}{\overline{ON}}=\frac{P_2}{P_3}$.

Од последното равенство добиваме $Q=\frac{P_1P_3}{P_2}$. Од парот триаголници CMN и BMN, и парот триаголници ANC и ANB, (секој пар има еднакви висини спуштени кон CN и NB, соодветно), добиваме: $\frac{P}{Q+P_3}=\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}=\frac{P_1+Q+P}{P_2+P_3}$.

Според тоа, $P(P_2-Q)=Q^2+QP_1+QP_2+P_1P_3$, т.е. $P=\frac{Q^2+QP_1+QP_2+P_1P_3}{P_2-Q}$, и ако во последното равенство замениме $Q=\frac{P_1P_3}{P_2}$, добиваме

$$P=\frac{\left(\frac{P_1P_3}{P_2}\right)^2+\frac{P_1P_3}{P_2}P_1+\frac{P_1P_3}{P_2}P_3+P_1P_3}{P_2-\frac{P_1P_3}{P_2}}=\frac{P_1P_3(P_1+P_2)(P_2+P_3)}{P_2(P_2^2-P_1P_3)}.$$

4. На табла се запишани броевите $2,3,4,\dots,n+1$. Потоа се запишуваат производите на секои два од нив, па се запишуваат производите на секои три од нив и постапката продолжува дури не се запише производот на сите броеви $2,3,4,\dots,n+1$. Пресметај го збирот на реципрочните вредности на сите броеви запишани на таблата.

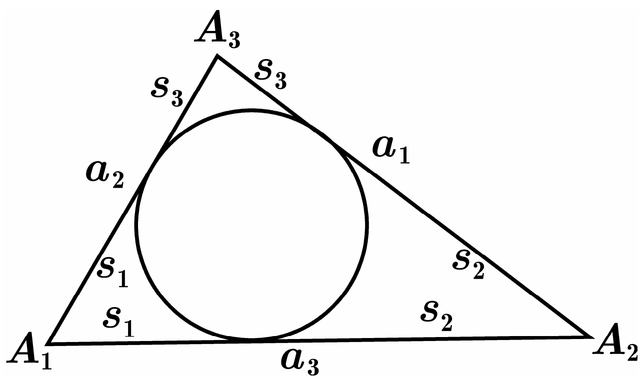
Решение. Да го разгледаме производот $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$. Ако се извршат сите множења се добива бараниот збир на реципрочните вредности зголемен за 1. Според тоа бараниот збир е еднаков на

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-1=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+2}{n+1}-1=\frac{n+2}{2}-1=\frac{n}{2}.$$

IV година

1. Даден е триаголникот $A_1A_2A_3$, со страни $a_1=\overline{A_2A_3}$, $a_2=\overline{A_3A_1}$ и $a_3=\overline{A_1A_2}$. Нека s_1,s_2,s_3 се должините на тангентните отсечки на впишаната кружница во триаголникот, што почнуваат од A_1,A_2,A_3, соодветно.

Докажи дека $\frac{s_1}{a_1}+\frac{s_2}{a_2}+\frac{s_3}{a_3}\geq\frac{3}{2}$. Кога важи равенство?



Решение. Од условите на задачата имаме $s_1+s_2=a_3$, $s_2+s_3=a_1$ и $s_3+s_1=a_2$, па оттука $s_1=\frac{1}{2}(a_2+a_3-a_1)$, $s_2=\frac{1}{2}(a_3+a_1-a_2)$ и $s_3=\frac{1}{2}(a_1+a_2-a_3)$. Затоа

$$\frac{s_1}{a_1}+\frac{s_2}{a_2}+\frac{s_3}{a_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_2+a_3-a_1}{a_1}+\frac{a_3+a_1-a_2}{a_2}+\frac{a_1+a_2-a_3}{a_3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)-3\right)\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$$

Неравенството следува од познатото неравенство $x+\frac{1}{x}\geq 2$, за секој $x>0$.

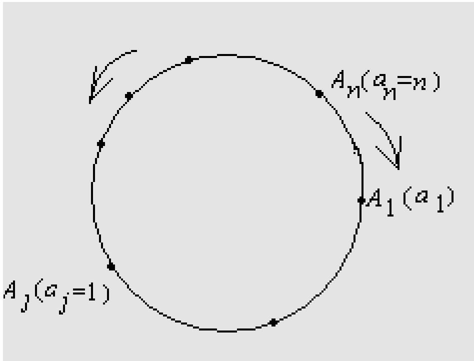
Равенство важи ако и само ако $x=1$, т.е. $\frac{a_1}{a_2}=1, \frac{a_2}{a_3}=1, \frac{a_1}{a_3}=1$. Значи, $a_1=a_2=a_3$, па триаголникот е рамностран. Ако триаголникот е рамностран, јасно е дека важи равенство.

2. Некои членови од аритметичките прогресии $a_n=4n+13$ и $b_n=5n+11$, $n\in\mathbb{N}$, се еднакви. Докажи дека збирот на првите p еднакви членови е еднаков на $p(10p+11)$.

Решение. Од условот $a_n=b_m$ добиваме $4n+13=5m+11$, т.е. $n=m+\frac{m-2}{4}$. Бидејќи n е природен број следува дека $k=\frac{m-2}{4}\in\mathbb{N}$. Значи, $m=4k+2$, па општиот член на заедничкиот дел од низите е $x_k=20k+21$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Притоа $x_k-x_{k-1}=20$. Значи (x_k) е аритметичка прогресија со прв член 21 и разлика 20. Првите p членови се добиваат за $k=0,1,2,\dots,p-1$. За бараниот збир добиваме

$$S_p=\frac{p}{2}(42+(p-1)\cdot 20)=\frac{p}{2}(20p+22)=p(10p+11).$$

3. Дадени се n точки на кружница. Броевите $1,2,\dots,n$ се запишани во произволен распоред покрај дадените точки (по еден број покрај секоја точка). За секој пар соседни точки е определена апсолутната вредност на разликата на броевите запишани покрај точките. Докажи дека збирот на овие апсолутни вредности е поголем или еднаков на $2(n-1)$.



Решение. Точките на кружницата ги означуваме по ред со $A_i, (1\le i\le n)$ движејќи се во позитивна насока така што со A_n ќе биде означена точката покрај која е запишан бројот n. Нека со A_j е означена точката покрај која е запишан бројот 1. Движејќи се од A_n кон A_j, првиот пат во позитивна а вториот пат во негативна насока, добиваме

$$|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\ldots+|a_{j+1}-a_j|\ge(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_{j+1}-a_j)=$$
$$=a_n-a_j=n-1 \qquad (1)$$

$$|a_n-a_1|+|a_1-a_2|+\ldots+|a_{j-1}-a_j|\ge(a_n-a_1)+(a_1-a_2)+\ldots+(a_{j-1}-a_j)=$$
$$=a_n-a_j=n-1 \qquad (2)$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме

$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-a_1|\ge 2(n-1)$, што требаше да се докаже.

4. Докажи дека постојат бесконечно многу подредени двојки од цели броеви (x,y) кои се решенија на равенката $(x-1)^x=x(1-y)-1$.

Решение. Равенката ја доведуваме во обликот $(x-1)^x+xy-(x-1)=0$ (1).

Нека p е произволен прост број. Бидејќи $(p,p-1)=1$, користејќи ја малата теорема на Ферма се добива $(p-1)^p\equiv(p-1)\pmod{p}$. Значи, за произволен прост број p, постои природен број k_p така што $(p-1)^p=k_p p+(p-1)$ (2). За $x=p$ и користејќи го (2), равенката (1) се сведува на $k_p p+(p-1)+py-(p-1)=0$, односно се добива $p(k_p+y)=0$ (3). Од $p\ne 0$ следува $k_p+y=0$, односно $y=-k_p$. Значи секој подреден пар $(p,-k_p)$, каде p е прост број, а k_p се добива со горенаведената конструкција е решение на равенката (1). Од бесконечноста на множеството на прости броеви следува дека постојат бесконечно парови што ја задоволуваат равенката.