XIX Регионален натпревар по математика за учениците од средното образование 18.II-2006

I - година

1.(АБ) Одреди ги сите парови природни броеви за кои разликата меѓу нивниот НЗС и НЗД е 15.

Решение. (Збирка за I година - Просветно дело)

Нека x и y е парот природни броеви за кои разликата меѓу нивниот НЗС и НЗД е 15. Нека $d = \text{НЗД}(x,y)$ и $s = \text{НЗС}(x,y)$. Тогаш, постојат природни броеви a и b така што $x = da$, $y = db$, $\text{НЗД}(a,b) = 1$ **(5)** и $s = dab$ **(5)**. Од условот на задачата имаме дека $s - d = 15$, каде ако замениме $s = dab$ се добива $dab - d = 15 \Rightarrow d(ab-1) = 15 \Rightarrow d \in \{1, 3, 5, 15\}$ **(5)**.

1) За $d = 1$, имаме
$ab - 1 = 15 \Rightarrow ab = 16 \Rightarrow a = 1, b = 16 \Rightarrow x = 1, y = 16$ **(2)**,

2) За $d = 3$, имаме
$ab - 1 = 5 \Rightarrow ab = 6 \Rightarrow a = 1, b = 6$ или $a = 2, b = 3 \Rightarrow x = 3, y = 18$ или $x = 6, y = 9$ **(4)**,

3) За $d = 5$, имаме
$ab - 1 = 3 \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow x = 5, y = 20$ **(2)**,

4) За $d = 15$, имаме
$ab - 1 = 1 \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow x = 15, y = 30$ **(2)**.

Значи, бараните парови природни броеви се: 1 и 16, 3 и 18, 6 и 9, 5 и 20, 15 и 30.

2.(АБ) Нека a,b,c и x,y,z се дадени реални броеви, $abc \neq 0$, $xyz \neq 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ и $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Докажи дека $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. (Сигма 69, стр. 48, зад. 832)

Ако воведеме смени $\frac{x}{a} = u$, $\frac{y}{b} = v$, $\frac{z}{c} = w$, тогаш точни се равенствата $u + v + w = 1$ и $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$.

Од второто равенство $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$, добиваме дека $\frac{vw + uw + uv}{uvw} = 0$ **(5)**, од каде имаме $uv + vw + wu = 0$ **(5)**. Ако равенството $u + v + w = 1$ го квадрираме, добиваме $(u + v + w)^2 = 1^2$, т.е. $u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2vw + 2uw = 1$ **(10)**.

Ако го искористиме условот $uv + vw + wu = 0$, добиваме

$$u^2 + v^2 + w^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + uw) = 1.$$

т.е. $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ **(5)**. Ако се вратиме на старите променливи, ја добиваме точноста на бараното равенство $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3.(А) Секое од темињата на една коцка нумерирано е со еден од броевите -1 и 1, а на секој ѕид е запишан производот на броевите со кои се означени темињата на тој ѕид. Дали збирот на така добиените 14 броеви може да биде еднаков на

а) 7, б) 0?

Решение. Ако сите темиња на коцката се нумерирани со единици, тогаш вкупнот збир е $14\cdot1=14$ **(5)**. Ако се смени еден број на некое теме од коцката, тогаш се менуваат и производите запишани на ѕидовите на коцката, а вкупниот збир се менува за $+8,+4,0,-4,$ или -8 **(10)**. Следува дека вкупниот збир е секогаш од облик $4n+2, n\in Z$ **(5)**.

а) Вкупниот збир не може да биде 7, бидејќи $7=4\cdot1+3$.
б) Вкупниот збир не може да биде 0, бидејќи $0=4\cdot0$. **(5)**

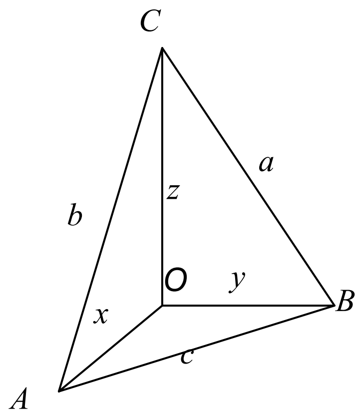
3.(Б) Меѓу 9 златници се наоѓа еден неисправен златник кој има помала тежина од останатите златници. Како со помош на две мерења на вага без тегови ќе го издвоиме неисправниот златник?

Решение. I мерење: Прво 9-те златници ги делиме на три групи од по три златници (по случаен избор). Избираме било кои две од трите групи и по една група ставаме на секоја страна на вагата. Ако тежините се исти во овие две групи, тогаш бараниот златник се наоѓа во третата група. Ако пак, едната страна на вагата е полесна од другата, тогаш во полесната група се наоѓа бараниот златник **(15)**.

II мерење: Од групата со три златници во која се наоѓа полесниот златник, избираме по случаен избор два и по еден од нив ставаме на секоја страна од вагата. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш бараниот златник е оној што останал. Ако пак, вагата покаже дека едната страна е полесна, тогаш златникот на полесната стана е бараниот златник **(10)**.

4.(А) Нека OA, OB, OC се три заемно нормални отсечки. Дали може да се изберат должини за отсечките OA, OB, OC, за да страните на триаголникот ABC се однесуваат како $3:4:6$?

Решение. Нека $\overline{OA}=x$, $\overline{OB}=y$, $\overline{OC}=z$, $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ (цртеж) **(5)**. Нека $c:a:b=3:4:6$, значи постои $k\in R\setminus\{0\}$ така да $c=3k, a=4k, b=6k$ **(5)**. Триаголниците AOB, BOC, AOC се правоаголни, од каде се добива дека



$$\begin{cases}x^2+y^2=c^2\\ y^2+z^2=a^2\\ x^2+z^2=b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=9k^2\\ y^2+z^2=16k^2\\ x^2+z^2=36k^2\end{cases} \textbf{(5)}$$

Ако ги собереме првата и втората равенка и од тој збир ја одземеме третата равенка ќе добиеме
$(x^2+y^2)+(y^2+z^2)-(x^2+z^2)=9k^2+16k^2-36k^2 \Rightarrow$
$2y^2=-11k^2 \Rightarrow y^2=-\frac{11}{2}k^2$, што не е можно **(5)**.

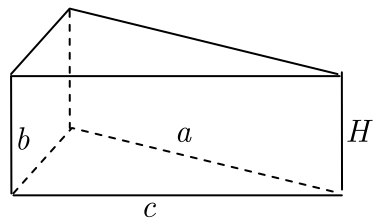
Заради добиената контрадикција, заклучуваме дека не може да се изберат должини за отсечките OA, OB, OC на тој начин, за да односот на страните на триаголникот ABC биде $3:4:6$ **(5)**.

4.(Б) Основата на права призма е правоаголен триаголник, со катети кои се однесуваат како $24:7$, хипотенузата на основата се однесува кон висината на призмата како $5:2$, а бочната површина на призмата е $140m^2$. Најди го волуменот на призмата.

Решение. Од $a:b=24:7$ и $c:H=5:2$ имаме дека $b=\frac{7}{24}a$ и $c=\frac{5}{2}H$ **(5)**. Од Питагоровата теорема за правоаголен триаголник имаме

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2+\frac{49}{576}a^2=\frac{25}{4}H^2 \Rightarrow \frac{625}{576}a^2=\frac{25}{4}H^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2=\frac{144}{25}H^2 \Rightarrow a=\frac{12}{5}H$



Со замена во $b=\frac{7}{24}a$, добиваме

$b=\frac{7}{24}\cdot\frac{12}{5}H=\frac{7}{10}H$ **(5)**.

Имаме дека $M=140m^2$,

а од друга страна $M=(a+b+c)\cdot H$, значи

$140m^2=(a+b+c)\cdot H=(\frac{12}{5}H+\frac{7}{10}H+\frac{5}{2}H)\cdot H=\frac{56}{10}H^2 \Rightarrow H^2=140\cdot\frac{10}{56}m^2=25m^2$З

начи $H=5m$ **(5)**, од каде се добива дека $a=\frac{12}{5}H=12m$ и $b=\frac{7}{10}H=3{,}5m$ **(5)**.

Тогаш, за волуменот на призмата имаме

$V=B\cdot H=\frac{a\cdot b}{2}\cdot H=\frac{12\cdot 3{,}5}{2}\cdot 5=105m^3$ **(5)**.

Втора година

1. (АБ) а) За кои вредности на m и n изразот $\dfrac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$ има најголема вредност?

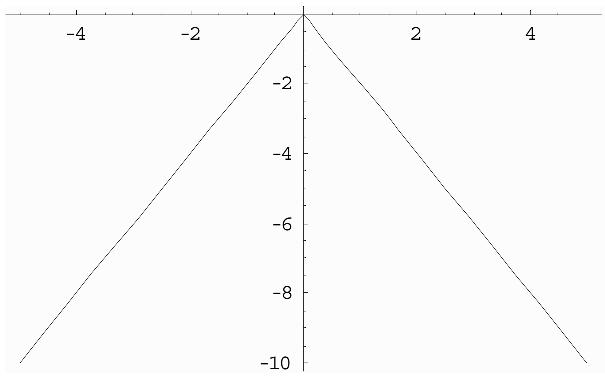
б**)** Нацртај график на функцијата $y=(4m+6n-2)|x|+2m+3n$ за сите вредности на m и n за кои изразот $\dfrac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$ има најголема вредност.

Решение. а) Изразот $\dfrac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$ има најголема вредност ако $4m^2+12mn+9n^2+1$ има најмала вредност **(5)**. Бидејќи

$4m^2+12mn+9n^2+1=(2m+3n)^2+1\geq 1$

(5), најмалата вредност на $4m^2+12mn+9n^2+1$ се добива ако $2m+3n=0$ **(5)**.

б) Бидејќи $2m+3n=0$ добиваме дека функцијата е $y=-2|x|$ **(5)** а нејзиниот график **(5)** е:



2. (А збирка) Ако за комплексниот број $z\neq -3+2i$ важи $\left|\dfrac{z-2+3i}{z+3-2i}\right|=1$ тогаш $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)$. Докажи!

Прво решение. Од $\left|\dfrac{z-2+3i}{z+3-2i}\right|=1$, имаме

$(z-2+3i)(\overline{z}-2-3i)=(z+3-2i)(\overline{z}+3+2i)$ **(10)**. Последното равенство е еквивалентно со $(z+\overline{z})+i(z-\overline{z})=0$ **(5)**. Бидејќи $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$ и $z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}(z)$ **(5)**, добиваме $\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=0$, т.е $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$ **(5)**.

Второ решение: Ако $z=a+bi$ тогаш од условот во задачата добиваме $|(a-2)+(b+3)i|=|(a+3)+(b-2)i|$, а оттука $(a-2)^2+(b+3)^2=(a+3)^2+(b-2)^2$

(15). Од последното равенство имаме $10a-10b=0$ па $\mathrm{Re}(z)=a=b=\mathrm{Im}(z)$ **(10)**.

2. (Б) (збирка) Докажи дека корените на равенката $x^2-(m^2+1)x+m^2=0$ се позитивни реални броеви за секој $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

б) За кои вредности на параметарот m, корените x_1 и x_2 на дадената равенката ја задоволуваат релацијата $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$?

Решение. а) Дискриминантата на равенката е

$D=(m^2+1)^2-4m^2=(m^2-2m+1)(m^2+2m+1)=(m-1)^2(m+1)^2\geq 0$ **(5)**.

Затоа равенката има реални корени. Корените се $x_1=m^2$ и $x_2=1$ **(5)** и бидејќи $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ тие се позитивни **(5)**.

б) Ако $x_1=m^2$ и $x_2=1$ ја задоволуваат релацијата $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$, добиваме $|m|+1=3$ **(5)** од каде што следува дека $m=\pm 2$ **(5)**.

3. (А сигма 69) За $x\neq 1$ и $x\geq 0$, докажи дека вредноста на изразот

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}$$

не зависи од x.

Решение. Изразот е дефиниран за $x\geq 0, x\neq 1$. За $x\geq 0, x\neq 1$ важи

$\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}=\sqrt[3]{(\sqrt{x})^3-3(\sqrt{x})^2 2+3(\sqrt{x})2^2-2^3}=\sqrt{x}-2$ **(5)** и

$\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}$ **(5)**. Користејќи и дека $3\pm 2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\pm 1\right)^2$ **(5)** имаме:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=1.$$

(10)

3. (Б сигма 69) Ако m,n,p,a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $m:a=n:b=p:c$ тогаш $(ma)^{1/2}+(nb)^{1/2}+(pc)^{1/2}=[(m+n+p)(a+b+c)]^{1/2}$. Докажи!

Решение.

$$\sqrt{ma}+\sqrt{nb}+\sqrt{pc}=\sqrt{\frac{m}{a}}\cdot a+\sqrt{\frac{n}{b}}\cdot b+\sqrt{\frac{p}{c}}\cdot c=\sqrt{\frac{m}{a}}\cdot(a+b+c)= \qquad (10)$$
$$=\sqrt{\frac{m}{a}}\cdot\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b+c}= \qquad (5)$$
$$=\sqrt{m+\frac{m}{a}b+\frac{m}{a}c}\cdot\sqrt{a+b+c}=\sqrt{m+\frac{n}{b}b+\frac{p}{c}c}\cdot\sqrt{a+b+c}= \qquad (8)$$
$$=\sqrt{m+n+p}\cdot\sqrt{a+b+c}=\sqrt{(m+n+p)(a+b+c)} \qquad (2)$$

4. (АБ) Нека a,b,c се должини на страни на триаголник при што a е најдолгата. Докажи дека триаголникот е правоаголен ако и само ако важи

$$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c}\right)=\sqrt{2}(a+b+c).$$

Решение. Даденото равенство ќе го квадрираме и го добиваме равенството

$$2\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right)=(a+b+c)^2 \qquad (1).$$

Поради позитивноста на левата и десната страна на равенството (1) двете равенства се еквивалентни.
Нека триаголникот е правоаголен. Бидејќи a е најдолгата страна важи $a^2=b^2+c^2$ **(1)**.
Тогаш $2\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right)=2(a+c)(a+b)=2a^2+2ab+2ac+2bc=$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$, односно важи (1) **(9).**
Нека е исполнето равенството (1) и нека $a^2>b^2+c^2$ **(1)**. Тогаш важи
$(a+b+c)^2=2\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right)>2(a+c)(a+b)=2a^2+2ab+ac+bc>$
$>a^2+b^2+c^2+2ab+ac+bc=(a+b+c)^2$, што е невозможно **(9)**.
Слично, добиваме контрадикција ако претпоставиме дека $a^2<b^2+c^2$ **(3)**.
Значи важи $a^2=b^2+c^2$ па триаголникот е правоаголен **(2)**.

ТРЕТА ГОДИНА

1АБ. (Збирка) Докажи дека

$$\frac{1}{\log_x a\cdot\log_x a^2}+\frac{1}{\log_x a^2\cdot\log_x a^3}+\ldots+\frac{1}{\log_x a^{n-1}\cdot\log_x a^n}=\frac{n-1}{n}\log_a{}^2 x\,.$$

Решение. За секој од собироците ќе го примениме својството $\log_x a^k=k\log_x a$, со што за збирот имаме

$$\frac{1}{\log_x a\cdot\log_x a^2}+\frac{1}{\log_x a^2\cdot\log_x a^3}+\ldots+\frac{1}{\log_x a^{n-1}\cdot\log_x a^n}=$$
$$=\frac{1}{\log_x a\cdot 2\log_x a}+\frac{1}{2\log_x a\cdot 3\log_x a}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\log_x a\cdot n\log_x a}= \qquad \textbf{....(5)}$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\log_x{}^2 a}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\log_x{}^2 a}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot\log_x{}^2 a}=$$
$$=\frac{1}{\log_x{}^2 a}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

Во општ случај секоја од дропките $\frac{1}{(k-1)k}$ може да се запише во облик $\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, па ако ова се замени во изразот погоре се добива

$$=\frac{1}{\log_x{}^2 a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\log_x{}^2 a}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{\log_x{}^2 a} \textbf{....(10)}$$

На крај со користење на својството $\frac{1}{\log_x a}=\log_a x$, збирот го доведуваме до облик $\frac{1}{\log_x a\cdot\log_x a^2}+\frac{1}{\log_x a^2\cdot\log_x a^3}+\ldots+\frac{1}{\log_x a^{n-1}\cdot\log_x a^n}=\frac{n-1}{n}\log_a{}^2 x$ што требаше да докажеме **(5)**.

2.АБ. Реши ја равенката $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{16}$.

Решение. Сигма 68 зад. 823
Равенката можеме да ја запишеме во облик
$16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=1$, или $(2\cos x)(2\cos 2x)(2\cos 4x)(2\cos 8x)=1$. **(5)**
Ако последната равенка ја помножиме со $\sin x$, добиваме

$(2\cos x\sin x)(2\cos 2x)(2\cos 4x)(2\cos 8x)=\sin x$, **(10)**

и ако го искористиме идентитетот $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, добиваме

$(2\sin 2x\cos 2x)(2\cos 4x)(2\cos 8x)=\sin x$, $(2\sin 4x\cos 4x)(2\cos 8x)=\sin x$,

$2\sin 8x\cos 8x=\sin x$, $\sin 16x=\sin x$. **(5)**

Ако го искористиме идентитетот $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, за равенката $\sin 16x-\sin x=0$, добиваме $2\sin\frac{16x-x}{2}\cos\frac{16x+x}{2}=0$, т.е. $\sin\frac{15x}{2}\cos\frac{17x}{2}=0$. Равенката $\sin\frac{15x}{2}=0$ има решенија $\frac{15x}{2}=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, т.е. $x=\frac{2k\pi}{15}, k\in\mathbb{Z}$. Равенката $\cos\frac{17x}{2}=0$ има решенија $\frac{17x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, т.е. $x=\frac{\pi+2k\pi}{17}$, $k\in\mathbb{Z}$. **(5)**

Решенија на равенката се $x=\frac{2k\pi}{15}, k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi+2k\pi}{17}$, $k\in\mathbb{Z}$, каде $k\neq 15s$ и $2k+1\neq 17s$, $s\in\mathbb{Z}$. ■

3А. Многуаголник, опишан околу кружница со радиус r, е разбиен на произволен начин на триаголници. Докажи дека збирот на радиусите на впишаните кружници во тие триаголници е поголем од r.

Решение. Да ги означиме радиусите на впишаните кружници во триаголниците со $r_1,r_2,\dots,r_n$, периметрите на триаголниците со $L_1,L_2,\dots,L_n$, а нивните плоштини со $P_1,P_2,\dots,P_n$ соодветно. Нека плоштината и периметарот на многуаголникот се означени со P и L соодветно.

За плоштината на секој од триаголниците важи $P_k=r_k s_k$, каде s_k е полузбирот од страните на триаголникот, односно $s_k=\frac{L_k}{2}$. Тогаш $P_k=\frac{r_k L_k}{2}$, од каде $r_k=\frac{2P_k}{L_k}$...**(5)**. Од друга страна периметарот на секој триаголник е помал од периметарот на многуаголникот, односно $L_k<L$ или уште повеќе $\frac{1}{L_k}>\frac{1}{L}$...**(5)**. Сега за збирот на радиусите на впишаните кружници важи

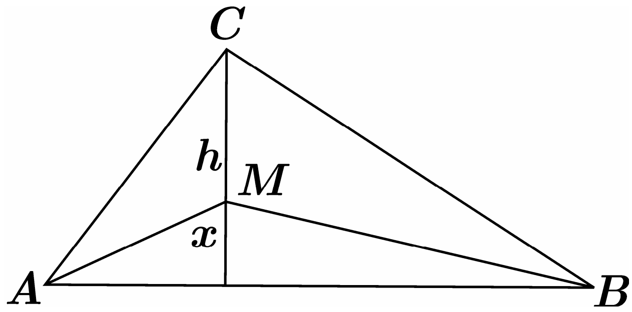
$$r_1+r_2+\dots+r_n=\frac{2P_1}{L_1}+\frac{2P_2}{L_2}+\dots+\frac{2P_n}{L_n}>\frac{2P_1}{L}+\frac{2P_2}{L}+\dots+\frac{2P_n}{L}=\frac{2}{L}(P_1+P_2+\dots+P_n)$$

Да забележиме дека плоштината на многуаголникот претставува збир од плоштините на триаголниците на кои е разбиен, односно $P=P_1+P_2+\dots+P_n$....**(10).** Уште повеќе, плоштината на многуаголникот се пресметува и како $P=\frac{Lr}{2}$. Тогаш имаме

$r_1+r_2+\dots+r_n>\frac{2}{L}(P_1+\dots+P_n)=\frac{2}{L}P=\frac{2}{L}\cdot\frac{Lr}{2}=r$. Со тоа покажавме дека навистина $r_1+r_2+\dots+r_n>r$ **(5)**.

3Б. Даден е триаголник ABC со страни $\overline{AC}=b,\overline{BC}=a$ и висината спуштена од темето C $\overline{CD}=h$. Одреди точка M на висината таква да збирот $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2$ е најмал.

Решение. Нека $\overline{MD}=x$. Тогаш $\overline{CM}=h-x$, односно $\overline{CM}^2=(h-x)^2$. Користејќи Питагорова теорема можеме да ги изведеме и следниве релации:
$\overline{AM}^2=\overline{AD}^2+x^2=b^2-h^2+x^2$ и
$\overline{BM}^2=\overline{BD}^2+x^2=a^2-h^2+x^2$ **(5)**. Со замена за збирот добиваме

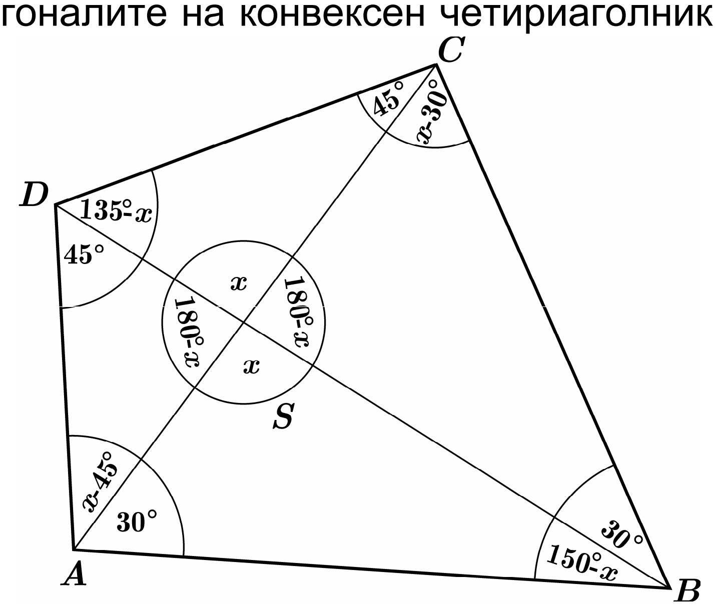


$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2=b^2-h^2+x^2+a^2-h^2+x^2+(h-x)^2$, односно
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2=3x^2-2hx+a^2+b^2-h^2$ **(5)**. Јасно, збирот ќе биде минимален во точката во која квадратната функција $f(x)=3x^2-2hx+a^2+b^2-h^2$ достигнува свој минимум, односно во темето на параболата **(10)**. Темето на параболата е во точката $\left(\frac{h}{3},a^2+b^2-\frac{4}{3}h^2\right)$, од каде заклучуваме дека точката *M* е определена со растојанието $\overline{MD}=\frac{h}{3}$ **(5)**.

4А. Нека *S* е пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$. Одреди го аголот помеѓу дијагоналите на четириаголникот ако е познато дека

$\angle SAB=\angle SBC=30^0$ и
$\angle SCD=\angle SDA=45^0$.

Решение. Од синусната теорема применета на секој од триаголниците *ACD, ABC* и *ABD* дадени на цртежот, ги добиваме следниве равенства



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\sin(180^0-x)}{\sin 45^0}=\frac{\sin x}{\sin 45^0},$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\sin(x-30^0)}{\sin(180^0-x)}=\frac{\sin(x-30^0)}{\sin x}$$ и

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\sin 45^0}{\sin(150^0-x)}$ **(10)**. Со замена во равенството $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$, добиваме равенство

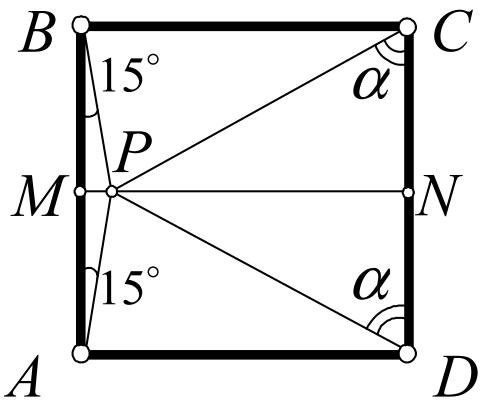
$\frac{\sin 45^0}{\sin(150^0-x)}=\frac{\sin(x-30^0)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sin 45^0}$, еквивалентно со
$\sin^2 45^0=\sin(150^0-x)\sin(x-30^0)$,

односно со равенството $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(\cos 120^0-\cos(180^0-2x))$ **(10)**.

Последната равенка се сведува на $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, чии решенија се $x=60^0$

или $x=120^0$. Значи помалиот агол помеѓу дијагоналите изнесува $x=60^0$ **(5)**.

4Б. Во внатршноста на квадратот $ABCD$ е избрана точка P така што $\angle PAB=\angle PBA=15^\circ$. Докажи дека триаголникот PCD е рамностран.



Решение. Триаголникот ABP е рамнокрак, па затоа неговото теме P припаѓа на симетралата MN на страните AB и CD на квадратот (цртеж)**(5)**. Според тоа, триаголникот DCP е рамнокрак, $\overline{PC}=\overline{PD}$. Нека $\angle PCD=\angle PDC=\alpha$. Ако должината на страната на триаголникот е a, тогаш $\overline{MP}+\overline{PN}=a$. Од правоаголниот триаголник PMB имаме $\overline{MP}=\frac{a}{2}\mathrm{tg}15^\circ$, **(5)** а од правоаголниот триаголник PNC имаме $\overline{MN}=\frac{a}{2}\mathrm{tg}\alpha$. **(5)** Ако замениме во равенството $\overline{MP}+\overline{PN}=a$, добиваме $\frac{a}{2}\mathrm{tg}15^\circ+\frac{a}{2}\mathrm{tg}\alpha=a$ **(5)**, т. е.

$$\mathrm{tg}\alpha=2-\mathrm{tg}15^\circ=2-\frac{\mathrm{tg}45^\circ-\mathrm{tg}30^\circ}{1+\mathrm{tg}45^\circ\,\mathrm{tg}30^\circ}=2-\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=2-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}\ \textbf{(5)}.$$

Јасно е дека $\alpha=60^\circ$ и триаголникот PCD е рамностран.

Четврта година

1А. Дадена е низата од позитивни членови

$$a_1=1,\quad a_n=\frac{a_n^2+a_{n+1}^2}{(n-1)^2a_n+2a_{n+1}} \qquad (1)$$

Докажи дека $a_n\le\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$ (2)

Решение: Равенството (1) се доведува во обликот

$$(a_{n+1}-na_n)((2-n)a_n-a_{n+1})=0.$$

Неравенството (2) ќе го докажеме со принципот на математичка индукција.

За н=1 неравенството (2) е задоволено.

Нека (2) важи за $k\le n$.

За $k=n+1$ можни се два случаја:

1) $a_{n+1}=na_n$

Со помош на неравенството на Бернули добиваме

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n^2}n=1-\frac{1}{n}$$

т.е. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n>1-\frac{1}{n}$, што е пак еквивалентно со

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Добиваме дека низата $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е растечка и за сите $n \geq 2$ важи $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ што е пак еквивалентно со неравенството $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$, односно со $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$, од каде поради индуктивната претпоставка следува дека

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} \geq na_n \geq a_{n+1}.$$

2) $a_{n+1} = (2-n)a_n$

Во овој случај, за $n \geq 2$ добиваме дека $a_{n+1} \leq 0$ што не е возможно бидејќи низата се состои од позитивни членови ($a_n > 0$). Значи a_{n+1} мора да е од обликот разгледан претходно во случајот 1), за кој веќе го докажавме неравенството (2).

2АБ. Колку рационални членови има во развојот на биномот $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{100}$?

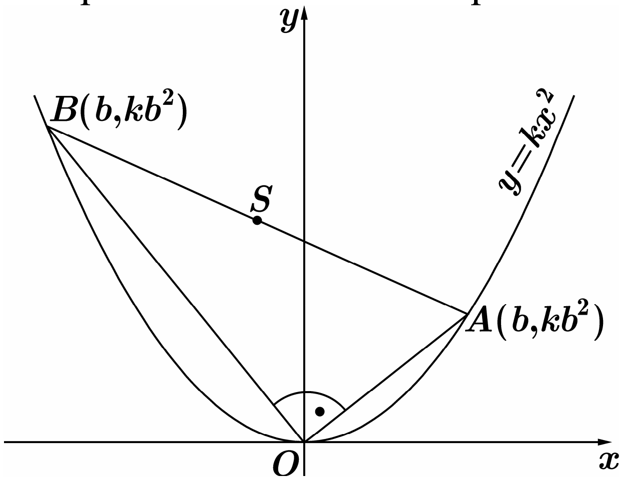
Решение. (збирка) Општиот член во развојот на биномот е $T_{k+1} = \binom{100}{k} 3^{\frac{100-k}{2}} 2^{\frac{k}{3}}$, **(5)** $k \in \{0,1,\ldots,100\}$. За да биде членот рационален треба $\frac{100-k}{2}$ и $\frac{k}{3}$ да се цели броеви **(5)**. Бидејќи $\frac{100-k}{2}$ е цел број ако 2 е делител на k, а $\frac{k}{3}$ е цел број ако 3 е делител на k добиваме дека k треба да е цел број делив со 6 **(10)**. Значи рационални членови има колку што има цели броеви деливи со 6 од 0 до 100, а нив ги има вкупно $\left[\frac{100}{6}\right]+1=17$ **(5)**.

3АБ. (Сигма 69, стр. 42, зад. 2) Најди ги сите функции $f:\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ за кои $f(n+m)+f(n-m)=f(3n), \quad \forall n,m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}, n\geq m$.

Решение. Ако во равенството ставиме $m=0$, добиваме $2f(n)=f(3n)$, за секој $n\in\mathbb{Z}^+$. За $n=m=0$ добиваме $f(0)=0$ **(5)**. Понатаму, ако ставиме $m=n$, добиваме $f(2n)+f(0)=f(3n)$ односно $f(2n)=f(3n)$ **(5)**. Значи, од една страна, за секое $m\in\mathbb{Z}^+$ важи $f(4m)=f(6m)=f(9m)$, а од друга страна, ако ставиме $n=3m$ во равенството, добиваме $f(4m)+f(2m)=f(9m)$, што е возможно ако и само ако $f(2m)=0$ **(10)**. Следствено, за произволен $n\in\mathbb{Z}^+$ имаме $f(n)=\frac{1}{2}f(3n)=\frac{1}{2}f(2n)=0$, односно единствена функција што го задоволува равенството е $f(n)=0$, за секој $n\in\mathbb{Z}^+$. **(5)**

4А. Докажи дека центрите на опишана кружница околу правоаголен триаголник, чии темиња лежат на дадена парабола, и темето каде што е правиот агол се совпаѓа со темето на параболата, лежат исто така на парабола.

Решение. Нека темињата на правоаголниот триаголник AOB со прав агол кај темето $O(0,0)$ лежат на параболата $y=kx^2$ (јасно $O(0,0)$ е теме на параболата) **(5 со цртеж)**. Тогаш координатите на темето A се (a,ka^2) а на B се (b,kb^2) каде што $a,b\neq 0$. Равенката на правата низ O и A е $y=kax$ а низ O и B е $y=kbx$. **(5)** Бидејќи OA и OB се заемно нормални прави следува дека $b=-\frac{1}{k^2a}$. Значи темето B има координати $\left(-\frac{1}{k^2a},\frac{1}{k^3a^2}\right)$. **(5)** Ако S е центарот на опишаната кружница околу триаголникот, тогаш S е средина на $\overline{AB}$ па има координати $S\left(\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{k^2a}\right),\frac{1}{2}\left(ka^2+\frac{1}{k^3a^2}\right)\right)$. Нека $x=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{k^2a}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(ka^2+\frac{1}{k^3a^2}\right)$. Тогаш



$y=\frac{1}{2}\left(ka^2+\frac{1}{k^3a^2}\right)=\frac{1}{2}k\left(\left(a-\frac{1}{k^2a}\right)^2+\frac{2}{k^2}\right)=\frac{1}{2}k\left((2x)^2+\frac{2}{k^2}\right)=2kx^2+\frac{1}{k}$. **(10)**

Б Група

1Б. Нека A е збирот на членовите на една конечна геометриска прогресија (членовите се позитивни) и B е збирот на нивните реципрочни вредности. Најди го производот на членовите на прогресијата.

Решение. Нека членовите на геометрискаta прогресија се $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Ако со q го означиме количникот на прогресијата тогаш

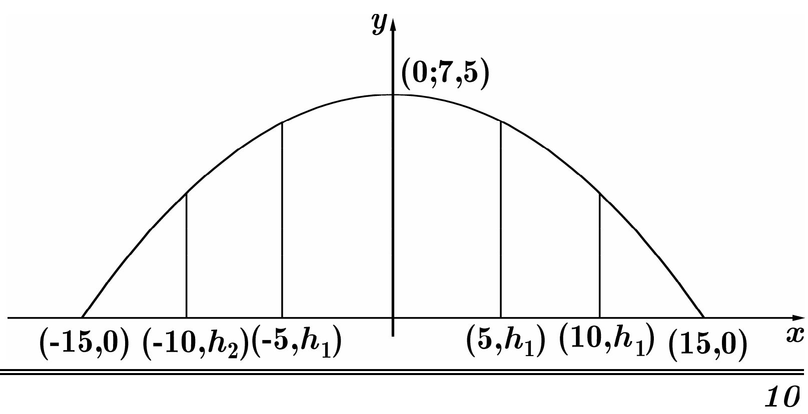
$P=a_1a_2\ldots a_n=a_1{}^nq^{\frac{(n-1)n}{2}}=\left(a_1{}^2q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}=(a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$ **(10)**. Од друга страна важи $a_ia_{n+1-i}=a_1q^{i-1}a_1q^{n-i}=a_1a_1q^{n-1}=a_1a_n$ **(5)**, за секој $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Тогаш

$$A=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{a_1a_n}{a_n}+\frac{a_2a_{n-1}}{a_{n-1}}+\ldots+\frac{a_na_1}{a_1}=a_1a_n\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}+\ldots+\frac{1}{a_1}\right)=a_1a_nB$$

Значи $a_1a_n=\frac{A}{B}$, а оттука $P=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{n}{2}}$ **(10)**.

4Б. На река широка $30m$ треба да се изгради параболичен мост со столбови на растојание $5m$. Висината на средниот столб е $7{,}5m$. Колкави се висините на другите столбови?

Решение. (збирка) Мостот го поставуваме во координатен систем како на цртежот. **(5)** Тогаш равенката на параболата е $y=ax^2+b$ **(5)** а бидејќи таа минува низ точките $(0;7{,}5)$



и $(15{,}0)$ добиваме $b=7{,}5$ и $a=-\frac{1}{30}$. **(10)** Височините на другите столбови се $h_1=-\frac{1}{30}5^2+7{,}5=\frac{20}{3}$ и $h_2=-\frac{1}{30}10^2+7{,}5=\frac{25}{6}$. **(5)**