Решенија на задачите од ММО 2006

1. На табла е запишан природен број. Ја бришеме неговата цифра не единици и бројот што останува го собираме со четирикратната вредност на цифрата што сме ја избришале. На тој начин добиваме нов број запишан на таблата. Ако на таблата е запишан бројот 13^{2006} дали може, повторувајќи ја оваа постапка, да се добие бројот 2006^{13}?

Решение. Нека a_n е n-тиот број запишан на таблата. Нека u_n е неговата цифра на единици и $a_n = 10t_n + u_n$. Имаме $a_{n+1} = t_n + 4u_n \equiv 40t_n + 4u_n \equiv 4(10t_n + u_n) = 4a_n \pmod{13}$. Од НЗД(4, 13) = 1 следува дека ако 13 е делител на a_n тогаш 13 е делител на a_{n+1}. Бидејќи $a_1 = 13^{2006} \equiv 0 \pmod{13}$ и $2006^{13} \equiv 2006 \equiv 4 \pmod{13}$ следува дека не можеме да го добиеме 2006^{13} од 13^{2006}.

2. Реши ја функционалната равенка $f(x+y^2+z)=f(f(x))+yf(y)+f(z)$ на множеството од реални броеви.

Решение:

За $x=y=z=0$, $f(f(0))=0$, **за** $x=z=0$, $f(y^2)=yf(y)+f(0)$, $y=1$, $f(1)=f(1)+f(0)$, т. е. $f(0)=0$.

За $x=t, z=0$ и $x=0$, $z=t$ се добива: $f(f(t))+yf(y)=f(y^2+t)=f(t)+yf(y)$, па $f(f(x))=f(x)$.

За $y=0$, $f(x+z)=f(x)+f(z)$.

За $x=y$, $z=y+1$, $(y+1)f(y+1)=f((y+1)^2)=f(y)+yf(y)+f(y+1)$, т.е. $y(f(y)+f(1))=(y+1)f(y)$, од што следува дека $f(y)=yf(1)$.

Од $(f(1))^2=f(f(1))=f(1)$ следува дека $f(1)=0$ или $f(1)=1$ т.е. мора $f(x)=0$ или $f(x)=x$. Со проверка се добива дека овие функции ја задоволуваат функционалната равенка.

3. Нека a, b, c се реални броеви за кои важи $a+b+c=1$ и $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ и $a\neq 1, b\neq 1, c\neq 1$. Докажи дека:

$$8\left(\frac{1}{2}-ab-ac-bc\right)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right)\geq 9$$

Решение: Ако равенството $a+b+c=1$ го дигнеме на квадрат имаме:

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$, $\quad \frac{1}{2}-ab-ac-bc=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$. Па добиваме

$8\left(\frac{1}{2}-ab-ac-bc\right)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right)=4(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right)$ Ако го употребиме неравенството на Коши - Буњаковски имаме:

$$4(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right)\geq 4\left(|c|\frac{1}{|a+b|}+|b|\frac{1}{|a+c|}+|a|\frac{1}{|b+c|}\right)^2\geq$$

$$\geq 4\left(\frac{|c|}{|a|+|b|}+\frac{|b|}{|a|+|c|}+\frac{|a|}{|b|+|c|}\right)^2 \text{...}(1)$$

Сега нека ставиме $x=|a|, y=|b|, z=|c|$. За x, y и z важи $x>0, y>0, z>0$. Од неравенството меѓу хармониска и аритметичка средина имаме:

$\dfrac{3}{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}}\leq\frac{1}{3}(x+y+x+z+y+z)=\frac{2}{3}(x+y+z)$, односно:

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\geq\frac{9}{2}\frac{1}{x+y+z} \text{ .... } (2)$$

$$\frac{z}{x+y}+\frac{y}{x+z}+\frac{x}{y+z}=\frac{z}{x+y}+1+\frac{y}{x+z}+1+\frac{x}{y+z}+1-3=\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{x+z}+\frac{x+y+z}{y+z}-3=$$
$$=(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)-3$$

Сега ако го употребиме неравенството (2) добиваме:

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)-3\geq(x+y+z)\frac{9}{2}\frac{1}{x+y+z}-3=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$.

Па за (1) добиваме

$$4\left(\frac{|c|}{|a|+|b|}+\frac{|b|}{|a|+|c|}+\frac{|a|}{|b|+|c|}\right)^2=4\left(\frac{z}{x+y}+\frac{y}{x+z}+\frac{x}{y+z}\right)^2\geq 4\frac{9}{4}=9\ .$$

Со што е докажано неравенството. Во (2) равенство ќе важи кога $x=y=z$, односно $|a|=|b|=|c|$. А додека равенство во неравенството со апсолутните вреднсоти ќе важи кога a и b имаат исти знак, a и c имаат исти знак и b и c имаат исти знак, односно кога a и b и c имаат исти знак. Но бидејќи $a+b+c=1$ и $a\neq0, b\neq0, c\neq0$ мора $a=b=c=\frac{1}{3}$. Тогаш равенство ќе важи и во неравенството на Коши - Буњаковски. Па равенство важи кога $a=b=c=\frac{1}{3}$.

4. Нека $A_1A_2\ ...\ A_n$ е правилен n-аголник и M е точка од неговата опишана кружница од помалиот од лаците A_1A_n.

а) Ако n е парен докажи дека важи: $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\overline{MA_i}^2=0$

б) Ако n е непарен докажи дека важи: $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\overline{MA_i}=0$

Решение:

а) Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен n-тоаголник и M е точка од неговата опишана кружница од помалиот од лаците A_1A_n. Ќе докажеме дека $\sum_{i=1}^{n}\overline{MA_i}^2=\frac{nd^2}{2}$ каде d е дијаметарот на опишаната кружница.

Нека $\angle MA_2A_1=\alpha\Rightarrow\angle MA_{k+1}A_k=\frac{k\pi}{n}+\alpha\Rightarrow\overline{MA_i}=d\sin(\frac{k\pi}{n}+\alpha)$

Ако ги собереме квадратите од овие отсечки ќе добиеме:

$$d^2\sum_{i=1}^{n}\sin^2(\frac{k\pi}{n}+\alpha)=d^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\cos2(\frac{k\pi}{n}+\alpha)}{2}=\frac{nd^2}{2}-\frac{d^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\cos(2\frac{k\pi}{n}+2\alpha)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos(2\frac{k\pi}{n}+2\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(\cos2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n}-\sin2\alpha\sin\frac{2k\pi}{n})=\cos2\alpha\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}-\sin2\alpha\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

За корените на равенката x^n-1=0, $n>2$ знаеме дека:

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ 0=\sum_{i=1}^{n}x_n=\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=0;\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

Ако замениме погоре ќе добиеме:

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{MA_i}^2=\frac{nd^2}{2}-\frac{d^2}{2}(\cos2\alpha\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}-\sin2\alpha\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n})=\frac{nd^2}{2}$$

Ова равенство важи за многуаголниците $A_1A_3...A_{n-1}$ и $A_2A_4...A_n$, па ќе се добие:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\overline{MA_{2i}}^2=\frac{nd^2}{4}=\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\overline{MA_{2i-1}}^2\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\overline{MA_i}^2=0$$

б) Да ја означиме страната на многуаголникот со a, а најмалата дијагонала со d.

Од теоремата на Птоломеј за четириаголниците $MA_{i-1}A_iA_{i+1}$ за $1<i<n$ се добива:

$$\overline{MA_i}d=(\overline{MA_{i-1}}+\overline{MA_{i+1}})a\Rightarrow(-1)^i\overline{MA_i}d+(-1)^{i-1}\overline{MA_{i-1}}a+(-1)^{i+1}\overline{MA_{i+1}}a=0...(1)$$

А, за четириаголницие $MA_1A_2A_n$ и $MA_1A_{n-1}A_n$ се добива:

$$\overline{MA_2}a=\overline{MA_1}d+\overline{MA_n}a\Rightarrow(-1)^2\overline{MA_2}a+(-1)^1\overline{MA_1}d+(-1)^n\overline{MA_n}a=0...(2)$$

$$\overline{MA_{n-1}}a=\overline{MA_1}a+\overline{MA_n}d\Rightarrow(-1)^{n-1}\overline{MA_{n-1}}a+(-1)^1\overline{MA_1}a+(-1)^n\overline{MA_n}d=0...(3)$$

$$(1)+(2)+(3)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(2a+d)(-1)^i\overline{MA_i}=0\Rightarrow(2a+d)\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\overline{MA_i}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\overline{MA_i}=0$$

5. Отсечките меѓу n точки меѓу кои нема три колинеарни се обоени со една од k бои. Кое е најмалото n такво што постои затворена искршена линија со темиња во некои од n-те точки на која сите страни се обоени со иста боја.

Решение:

Лема: Ако меѓу n точки од кои никои три не се колинеарни се повлечени најмалку n отсечки тогаш е нацртана затворена искршена линија со темиња во некои од n-те точки.

Доказ: Ако постои точка од која е повлечена најмногу една линија тогаш ја исфрламе таа точка и линиите кои се повлечени од неа ако такви линии постојат. После еден ваков чекор добиваме една точка помалку, а бројот на повлечените отсечки се намалува за најмногу 1, па бројот на отсечки не е помал од бројот на точки. Ја продолжуваме оваа постапка додека не добиеме дека од секоја точка се повлечени по најмалку две отсечки. Ова мора де се случи бидејќи ако дојдеме до три точки со три отсечки тогаш сигурно се поврзани сите точки меѓу себе и од секоја точка има барем две повлечени отсечки. Кога ќе добиеме m точки со најмалку m линии и од секоја точка се повлечени најмалку две линии одбираме една од овие точки и ја означуваме со A_1. Таа е поврзана со друга точка таа точка ја означуваме со A_2 бидејќи од оваа точка се повлечени барем две линии A_2 е поврзана со барем уште една точка (A_3), ја продолжуваме постапката додека не се вратиме во некоја веќе одбрана точка, мора да се вратиме во веќе одбрана точка бидејќи има конечно точки. Нека $A_j = A_i$ е првата точка која се повторува тогаш $A_i A_{i+1} \dots A_{j-1}$ е бараната искршена линија.

Бараниот број во задачата е $n=2k+1$.

Нека се дадени $2k+1$ точка како во условот на задачата тогаш се повлечени точно $k(2k+1)$ линија, па мора да постојат $2k+1$ линии обоени со иста боја. Од лемата следува дека постои затворена искршена линија чии рабови се обоени со иста боја.

За $2k$ точки кои го задоволуваат условот нека се означени со $A_1,\ A_2,\ \dots, A_{2k}$ и се поставени во темињата на правилен $2k$-аголник. Сите страни и дијагонали на овој многуаголник се паралелни на точно една од отсечките $A_1A_2,\ A_2A_3, \dots, A_kA_{k+1},\ A_2A_{2k},\ A_3A_1, \dots,\ A_{k+1}A_{k-1}$. Отсечките кои се паралелни со A_1A_2 или A_2A_{2k} ги боиме со првата боја, отсечките паралелни со A_2A_3 или A_3A_1 ги боиме со втората боја ... отсечките паралелни со A_kA_{k+1} или $A_{k+1}A_{k-1}$ со k-тата боја. Поради симетрија ќе докажеме дека не постои затворена искршена линија со првата боја. Отсечки обоени со првата боја се: A_1A_2, $A_2A_{2k}, A_{2k}A_3, \dots, A_kA_{k+2}, A_{k+2}A_{k+1}$ и тие образуваат искршена линија која поминува низ сите темиња и има почеток во A_1,а крај во A_{k+1}, па не може да е затворена.