25. ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. На овогодишната ЈММО, некои од учесниците се познаваат (познанствата се обострани), но постојат и учесници што не се познаваат. При произволно распоредување на учесниците во два амфитеатри, секогаш може да се најдат познаници сместени во различни амфитеатри.

Нека A е произволен натпреварувач. Докажи дека постојат натпреварувачи B, C такви што во тројката $\{A, B, C\}$ има точно две познанства.

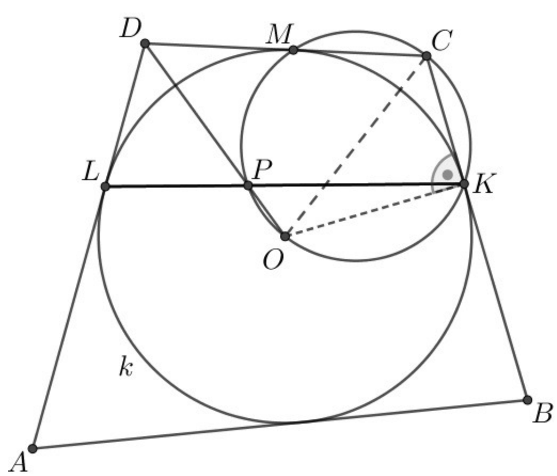
Решение. Разгледуваме два случаи.

Случај 1. *A ги познава сите останати учесници на олимпијадата.* **(1п)**
Постојат натпреварувачи B, C кои меѓусебно не се познаваат. A ги познава сите, од каде заклучувме дека $A \notin \{B, C\}$. **(1п)** Следствено, во тројката $\{A, B, C\}$ има точно две познанства: $A \leftrightarrow B$ и $A \leftrightarrow C$. **(1п)**

Случај 2. *A не ги познава сите останати учесници на олимпијадата.* **(1п)**
Да ја разгледаме распределбата при која во еден од амфитеатрите се сместени A и сите негови познаници, додека во другиот се сите непознаници на A. **(2п)** Според условот на задачата, постојат натпреварувачи B, C во различни амфитеатри така што $A \leftrightarrow B$ и $B \leftrightarrow C$. **(1п)** Тогаш $\{A, B, C\}$ е посакуваната тројка. **(1п)**

2. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник, со вписана кружница $k(O, r)$ која ги допира страните BC и AD во точките K и L, соодветно. Докажи дека кружницата со дијаметар OC минува низ пресечната точка на правите KL и OD.

Решение.



Од тоа што CK е тангента на k, следува дека $\angle KOL = 2\angle LKC$. **(1п)**

Ако M е допирната точка на CD со k, тогаш $\triangle LOD \cong \triangle MOD$ и $\triangle KOC \cong \triangle MOC$, па $\angle KOL = \angle KOM + \angle LOM = 2\angle COM + 2\angle MOD = 2\angle COD$. **(4п)**

Според ова $\angle COD = \angle LKC$, па пресечната точка P, на KL и OD лежи на кружница опишана околу $\triangle OKC$. Од $\angle OKC = 90^\circ$, следува дека таа кружница има дијаметар $\overline{OC}$. **(3п)**

3. Одреди ги сите природни броеви n и сите прости броеви p такви што

$$17^n \cdot 2^{n^2} - p = (2^{n^2+3} + 2^{n^2} - 1) \cdot n^2.$$

Решение. Ја презапишуваме равенката во обликот

$$(17^n - 9n^2) \cdot 2^{n^2} + n^2 = p \ \ \textbf{(1п)}$$

Да забележиме дека $n = 1$ е решение бидејќи изразот на левата страна е еднаков на 17 **(1п)**. Да претпоставиме дека $n > 1$. Забележуваме дека n мора да биде непарен. Во секој случај, квадратите на непарните броеви се конгруентни со 1 по модул 8. Бидејќи $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$ **(2п)**, имаме дека:

$$(17^n - 9n^2) \cdot 2^{n^2} + n^2 \equiv (-9) \cdot n^2 \cdot 2 + n^2 \equiv (-17) \cdot n^2 \equiv 0 \pmod{17} \ \textbf{(2п)}$$

За $n > 1$ ова значи дека изразот на левата страна е делив со 17, па $p = 17$ бидејќи е прост. Со принципот на математичка индукција лесно се покажува дека $17^n - 9n^2 \geq 1$. Ова значи дека за $n \geq 2$:

$$(17^n - 9n^2) \cdot 2^{n^2} + n^2 \geq 1 \cdot 2^4 + 4 > 17 = p,$$

што претставува контрадикција, од каде следува дека не постои решение за $n > 1$. Следствено, единствено решение е двојката $(n, p) = (1, 17)$. **(2п)**

4. Нека a, b и c се позитивни реални броеви за кои важи $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{27}{4}$. Докажи го неравенството

$$\frac{a^3 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 + a^2}{c^2 + a^2} \geq \frac{5}{2}.$$

Решение. Прво ќе покажеме дека за $t > 0$ важи $t^3 - t^2 \geq -\frac{4}{27}$. Навистина, имаме:

$$t^3 - t^2 + \frac{4}{27} = \left(t + \frac{1}{3}\right)\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0. \ \ \textbf{(3п)}.$$

Од неравенството на Коши-Шварц имаме дека важи

$$(a^2 + b^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq (1 + 1)^2 = 4,$$

од каде следува

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Слично,

$$\frac{1}{b^2 + c^2} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

и

$$\frac{1}{c^2 + a^2} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right).$$

Со собирање на овие неравенства, користејќи го условот $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{27}{4}$, добиваме:

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \leq \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{27}{4} = \frac{27}{8}. \ \ \textbf{(2п)}$$

Левата страна на почетното неравенство ја запишуваме како

$$\frac{a^3 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 + a^2}{c^2 + a^2} = \frac{a^3 - a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 - b^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 - c^2}{c^2 + a^2} + 3. \ \ \textbf{(1п)}$$

Користејќи дека за сите $t > 0$ важи $t^3 - t^2 \geq -\frac{4}{27}$, добиваме:

$$\frac{a^3-a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^3-b^2}{b^2+c^2}+\frac{c^3-c^2}{c^2+a^2}+3 \geq 3-\frac{4}{27}\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right) \geq$$

$$\geq 3-\frac{4}{27}\cdot\frac{27}{8}=\frac{5}{2} \quad \textbf{(2п)}$$

Забелешка. За разгледување на случајот кога важи равенство, не се добиваат поени.

5. Нека ABC е остроаголен триаголник и нека X и Y се точки на отсечките AB и AC такви што $\overline{BX} = \overline{CY}$. Нека I_B и I_C се центри на впишаните кружници во триаголниците ABY и ACX, соодветно, а T е точка во која по втор пат се сечат опишаните кружници околу триаголниците ABY и ACX. Докажи дека важи

$$\frac{\overline{TI_B}}{\overline{TI_C}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{CX}}.$$

Лема. Даден е триаголник ABC со центар на впишана кружница I и опишана кружница k. Нека $(CI \cap k) \setminus \{C\} = \{S\}$. Тогаш S е центар на опишаната кружница околу ABI.

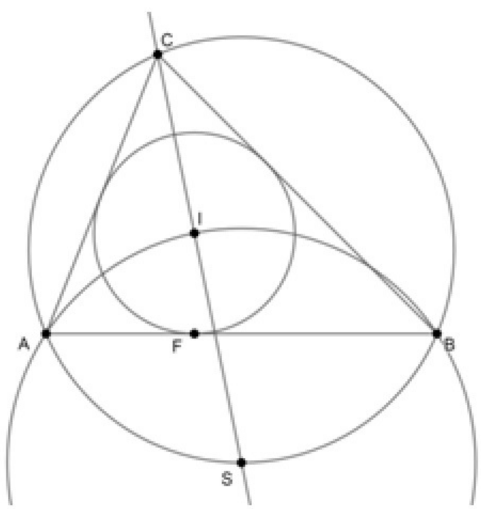
Доказ на лемата.

$\measuredangle SAI = \measuredangle SAB + \measuredangle BAI = \measuredangle SCB + \measuredangle BAI = \measuredangle ACI + \measuredangle IAC = \measuredangle AIS$.

Значи триаголникот $\triangle IAS$ е рамнокрак, па $\overline{SA} = \overline{SI}$.

Слично, $\triangle IBS$ е рамнокрак, па $\overline{SB} = \overline{SI}$.

Од $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SI}$ следува тврдењето на лемата. **(2п)** □



Решение. Да ја означиме со S пресечната точка (различна од A) на симетралата на аголот $\measuredangle BAC$ со кружницата опишана околу $\triangle ABY$. Ќе докажеме дека $\triangle SBX \cong \triangle SYC$. Имено: $\overline{SB} = \overline{SY}$ (лема), $\overline{BX} = \overline{YC}$ (услов) и $\measuredangle SBX = \measuredangle SBA = 180^o - \measuredangle SYA = \measuredangle SYC$.

Од складноста добиваме $\measuredangle XSB = \measuredangle CSY$, од каде

$$\measuredangle CSX = \measuredangle CSY + \measuredangle YSX = \measuredangle XSB + \measuredangle YSX = \measuredangle BSY$$

и

$$\measuredangle BSY + \measuredangle BAY = \measuredangle CSX + \measuredangle CAX = 180^o \qquad (1)$$

Од (1) следува дека B, S, Y, A лежат на иста кружница, значи $S \equiv T$. **(3п)**

Според лемата, B, Y, I_B лежат на кружницата со центар во точката T и радиус $\overline{TB} = \overline{TY} = \overline{TI_B} = t_B$, и аналогно, C, X, I_C лежат на кружницата со центар во точката T и радиус $\overline{TC} = \overline{TX} = \overline{TI_C} = t_C$.
$\triangle BTY$ и $\triangle CTX$ се рамнокраки, со агол при врвот $\measuredangle BTY = 180^o - \measuredangle BAC = \measuredangle CTX$.

$$\triangle BTY \sim \triangle CTX \Rightarrow \frac{\overline{BY}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{CT}} = \frac{t_B}{t_C} = \frac{\overline{TI_B}}{\overline{TI_C}}. \textbf{ (3п)}$$