24. ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

05.09.2020

1. Нека S е множеството од сите природни броеви n такви што секој од броевите $n+1$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ и $n+8$ е сложен. Одреди го најголемиот број k со својство: За секој $n \in S$ постојат барем k последователни сложени броеви во множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8, n+9\}.$$

(8 поени)

2. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xy + yz + xz = 27$. Докажи дека важи неравенството

$$x + y + z \geq \sqrt{3xyz}.$$

Кога важи равенство?

(8 поени)

3. Во множеството на цели броеви реши ја равенката

$$x^5 + 2 = 3 \cdot 101^y.$$

(8 поени)

4. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа AC. На страните AC и BC се избрани точки D и E, соодветно, така што $\overline{CD} = \overline{DE}$. Нека H, J и K се средини на DE, AE и BD, соодветно. Опишаната кружница околу триаголникот DHK ја сече AD во точка F, а опишаната кружница околу триаголникот HEJ ја сече BE во точка G. Правата низ K паралелна со AC ја сече AB во точка I. Нека $IH \cap GF = \{M\}$. Докажи дека J, M и K се колинеарни точки.

(8 поени)

5. Нека T е триаголник со темиња во точки со целобројни координати, таков што секоја страна на T содржи точно m точки со целобројни координати. Ако плоштината на T е помала од 2020, одреди ја најголемата можна вредност за m.

(8 поени)

Време за работа: 4.5 саати.

24. ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. Нека S е множеството од сите природни броеви n такви што секој од броевите $n+1$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ и $n+8$ е сложен. Одреди го најголемиот број k со својство: За секој $n \in S$ постојат барем k последователни сложени броеви во множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8, n+9\}.$$

Решение. Ќе докажеме дека $k = 7$.

Ако $n = 87$ тогаш $\{n+1, n+3, n+4, n+5, n+6, n+8\} = \{88, 90, 91, 92, 93, 95\}$ се сите сложени, значи $S \neq \emptyset$. Во множеството $\{n, n+1, n+2, \cdots, n+9\} = \{87, 88, \cdots, 96\}$, најдолгата низа последователни сложени броеви има должина 7. Значи $k \leq 7$.**(3п)**

(i) Нека $n \in S$ и $n+2$ е прост број. Тогаш тој е непарен, па $n+7$ и $n+9$ се парни броеви поголеми од 2, значи сложени. Следува дека $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$, $n+7$, $n+8$ и $n+9$ се седум последователни сложени броеви. **(2п)**

(ii) Нека $n \in S$ и $n+7$ е прост број. Тогаш $n+7$ е непарен, па n и $n+2$ се парни броеви поголеми од 2, значи сложени ($2 \notin S$ бидејќи $2+1=3$ е прост број). Со тоа покажавме дека n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ и $n+6$ се сите сложени броеви. **(2п)**

(iii) Ако $n \in S$ и $n+2$, $n+7$ се сложени броеви, тврдењето е очигледно (Тогаш има барем 9 последователни сложени броеви). **(1п)**

2. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xy + yz + xz = 27$. Докажи дека важи неравенството

$$x + y + z \geq \sqrt{3xyz}.$$

Кога важи равенство?

Решение 1. Со користење на условот на задачата и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за xy, yz и xz, се добива

$$27^3 = (xy + yz + xz)^3 \geq 27\,(xy)\,(yz)\,(xz) = 27\,(xyz)^2,$$

од каде следува

$$27 \geq xyz. \qquad (1) \qquad \textbf{(2п)}$$

Понатаму, со квадрирање, користење на почетниот услов, групирање на членовите, користење на неравенството (1), користење на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, како и неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина, добиваме

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2\,(xy + yz + xz) \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 27 = \left(x^2 + 9\right) + \left(y^2 + 9\right) + \left(z^2 + 9\right) + 27 \\
&\geq 2\sqrt{9x^2} + 2\sqrt{9y^2} + 2\sqrt{9z^2} + xyz \\
&= 18 \cdot \frac{x+y+z}{3} + xyz \geq 18 \cdot \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} + xyz \\
&= 18 \cdot \frac{3xyz}{xy + yz + xz} + xyz = \frac{54xyz}{27} + xyz = 3xyz,
\end{aligned}$$

односно добивме дека $(x+y+z)^2 \geq 3xyz$, од каде со коренување се добива бараното неравенство $x+y+z \geq \sqrt{3xyz}$. **(5п)**
Равенство важи акко $xy = yz = xz$, $x^2 = y^2 = z^2 = 9$ и $x = y = z$, од каде следува дека $x = y = z = 3$. **(1п)**

Решение 2. Од $(x+y+z)^3 \geq 27xyz$ и $(xy+yz+xz)^3 \geq 27(xy)(yz)(xz) = 27(xyz)^2$, **(2п)** добиваме

$$27^3\left(x+y+z\right)^{12} = (xy+yz+xz)^3\left((x+y+z)^3\right)^4 \geq 27\left(xyz\right)^2\left(27xyz\right)^4 = 27^5(xyz)^6,$$

од каде

$$(x+y+z)^{12} \geq 27^2(xyz)^6 = (3xyz)^6.$$

Од последното неравенство, заради $x > 0, y > 0, z > 0$, следува $x+y+z \geq \sqrt{3xyz}$, што и требаше да се докаже. **(5п)**
Равенство важи акко $x = y = z = 3$. **(1п)**

3. Во множеството на цели броеви реши ја равенката

$$x^5 + 2 = 3 \cdot 101^y.$$

Решение. Нека (x, y) е решение на равенката. Ако $y < 0$ тогаш постои природен број $k > 0$ таков што $y = -k$. Тогаш равенката гласи

$$x^5 + 2 = 3 \cdot 101^{-k}.$$

Ако двете страни на равенката ги помножиме со 101^k, добиваме

$$101^k \cdot (x^5 + 2) = 3.$$

Бидејќи 101^k и $x^5 + 2$ се цели броеви, а $k > 0$, добиваме дека 101 го дели бројот 3, што е контрадикција. Значи y е ненегативен цел број. **(2п)**

Ќе покажеме дека $y = 0$. Ако претпоставиме спротивно, т.е. $y \geq 1$, добиваме

$$x^5 + 2 = 3 \cdot 101^y \equiv 0 (\text{mod } 101).$$

Оттука следува $x^5 \equiv -2 \pmod{101}$, од каде имаме

$$x^{100} = (x^5)^{20} \equiv (-2)^{20} \pmod{101}. \qquad \textbf{(2п)}$$

Од почетната равенка е очигледно дека x не е делив со 101, па од Малата теорема на Ферма за простиот број 101 следува $x^{100} \equiv 1 \pmod{101}$. **(2п)**
Користејќи $(-2)^{20} = (2^{10})^2 = 1024^2 \equiv 14^2 \pmod{101}$, заклучуваме дека

$$1 \equiv x^{100} \equiv (-2)^{20} \equiv 14^2 (\text{mod } 101),$$

од каде се добива дека $101 | 14^2 - 1 = 195$, што е контрадикција. **(1п)**
Преостанува уште случајот $y = 0$. Тогаш $x^5 + 2 = 3 \cdot 101^0 = 3$, односно $x^5 = 1$. Од последната равенка добиваме $x = 1$. **(1п)**
Добивме дека подредениот пар $(x, y) = (1, 0)$ е единствено решение на почетната равенка.

4. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа AC. На страните AC и BC се избрани точки D и E, соодветно, така што $\overline{CD} = \overline{DE}$. Нека H, J и K се средини на DE, AE и BD, соодветно. Ошишаната кружница околу триаголникот DHK ја сече AD во точка F, а опишаната кружница околу триаголникот HEJ ја сече BE во точка G. Правата низ K паралелна со AC ја сече AB во точка I. Нека $IH \cap GF = \{M\}$. Докажи дека J, M и K се колинеарни точки.

Решение. Прво ќе докажеме дека четириаголникот $ABED$ е тетивен. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{BC}$, важи $\angle ABC = 180^\circ - 2 \cdot \angle ACB$. Од условот на задачата имаме и дека $\overline{CD} = \overline{DE}$, па важи

$$\angle CDE = 180^\circ - 2 \cdot \angle DCE = 180^\circ - 2 \cdot \angle ACB = \angle ABC.$$

Оттука се добива дека точките A,B,E и D лежат на една кружница. **(1п)**

Бидејќи K е средина на BD, правата низ K паралелна со AC е средна линија во триаголникот ABD, па заклучуваме дека I е средина на AB. **(1п)**

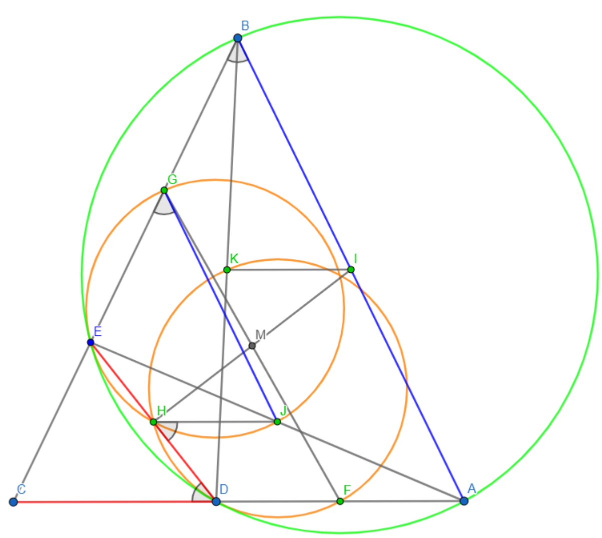
Ќе докажеме дека G е средина на BE, а F е средина на AD.
Четириаголникот $JGEH$ е тетивен, па имаме

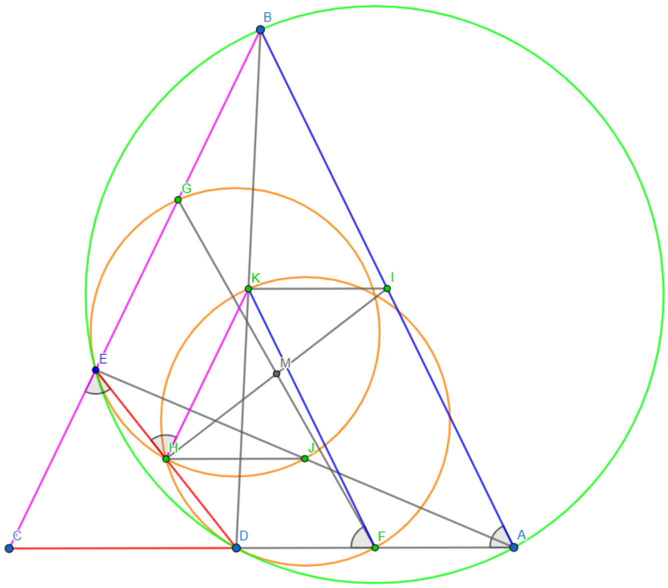
$$\angle JGE = 180^\circ - \angle JHE = \angle JHD.$$

Бидејќи H и J се средини на DE и AE, следува дека HJ е средна линија во триаголникот AED и затоа HJ е паралелна со AD. Од еднаквоста на аглите со паралелни краци добиваме

$$\angle JHD = \angle CDH = \angle CDE = \angle ABC.$$

Оттука следува дека JG е паралелна со AB **(1п)**. Поради тоа што J е средина на AE и JG е средна линија во ABE, следува дека G е средина на BE. **(1п)**



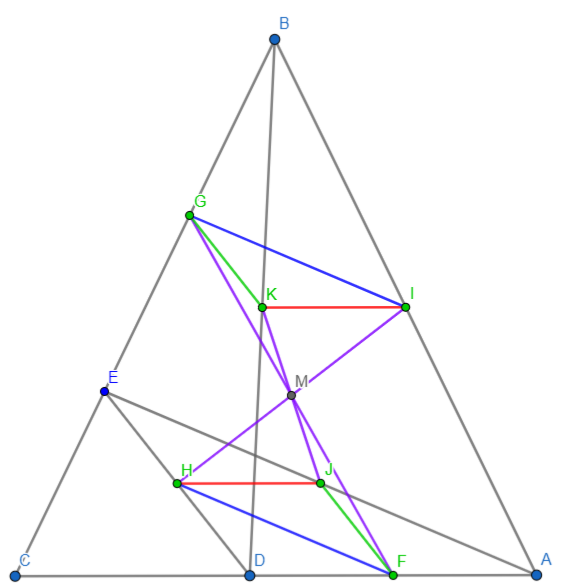


Аналогно, од

$$\angle KFD = \angle KHE = \angle CEH = \angle CAB$$

следува дека KF е паралелна со AB. **(1п)** Поради тоа што K е средина на BD и KF е средна линија во ABD, следува дека F е средина на AD. **(1п)**

HJ е средна линија во AED и затоа HJ е паралелна со AC и $\overline{HJ} = \frac{\overline{AD}}{2}$, додека KI е средна линија во ABD, па KI е паралелна со AC и $\overline{KI} = \frac{\overline{AD}}{2} = \overline{HJ}$. Тоа значи дека четириаголникот $HJIK$ е паралелограм, па дијагоналите KJ и IH се преполовуваат, имаат иста средина.**(1п)** Исто така, GK е средна линија во триаголникот DEB, а JF е средна линија во AED, па слично заклучуваме дека $JFKG$ е паралелограм. Тоа значи дека и KJ и GF имаат иста средина, па добиваме дека M е заедничка средина на KJ, IH и GF, што значи дека J, M и K се колинеарни точки. **(1п)**



5. Нека T е триаголник со темиња во точки со целобројни координати, таков што секоја страна на T содржи точно m точки со целобројни координати. Ако плоштината на T е помала од 2020, одреди ја најголемата можна вредност за m.

Решение. Да забележиме дека ако точките со целобројни координати (a, b) и (c, d) лежат на права, тогаш и точките $(a + k(c - a), b + k(d - b))$, $k \in \mathbb{Z}$, лежат на истата права **(1п)** и растојанието меѓу две соседни точки од нив е еднакво. Го означуваме бараниот триаголник (со максимална вредност за m) со ABC. Од условот на задачата и од претходната дискусија следува дека растојанијата меѓу соседните точки од страните на триаголникот ABC мора да се еднакви. Во спротивно, од сите растојанија меѓу соседните точки со целобројни координати на една од страните го избираме минималното и, заради дискусијата, добиваме број на точки со целобројни координати $> m$. **(1п)**

Во секоја од точките со целобројни координати повлекуваме прави паралелни со страните на триаголникот ABC. Заради сличност, секоја од правите повлечена од точките од страна на ABC мора да минува низ некоја од целобројните точки на другите две страни. Како резултат на ова добиваме мрежа (триагонализација на триголникот ABC) формирана од складни триаголници. **(2п)** Нека нивната плоштина е P.

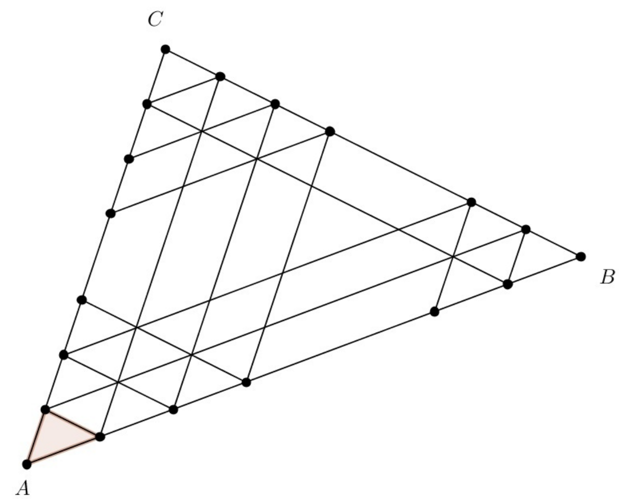


Figure 1

Тогаш $P_{ABC} = P \cdot (1 + 3 + \cdots + (2m - 3)) = P \cdot (m - 1)^2$ и имаме

$$P \cdot (m - 1)^2 < 2020. \quad \textbf{(1п)} \tag{2}$$

Задачата се сведува на наоѓање на триаголник со целобројни координати со минимална плоштина.

Лема. Плоштината на триаголник со темиња во точки со целобројни координати е $\geq 1/2$.

Доказ. Лемата е директна последица од Теоремата на Пик која гласи: Нека е даден многуаголник чии темиња имаат целобројни координати. Ако i е бројот на точки со целобројни координати кои се наоѓаат во внатрешноста на многуаголникот, а b е бројот на точки со целобројни координати кои се темиња на многуаголникот или лежат на неговите страни, тогаш неговата плоштина изнесува $P = i + b/2 - 1$. Имено, $P = k/2$ за некое $k \in \mathbb{N}$.

Алтернативен доказ. Нека ABC има темиња во точките со целобројни координати $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ и (x_3, y_3). Без губење на општоста, да претпоставиме дека $y_1 \leq y_2 \leq y_3$.
Тогаш $\overline{AB} \geq |x_1 - x_2|$ и $h_c \geq |y_3 - y_2|$, од каде $P \geq |x_1 - x_2||y_3 - y_2|/2$ (должините на црвено обоените отсечки изнесуваат $|x_1 - x_2|, |y_3 - y_2|$). Ако $x_1 \neq x_2$ и $y_3 \neq y_2$, тврдењето на лемата

е очигледно. Ако $x_1 = x_2$ тогаш $x_3 \neq x_1$ и $y_1 \neq y_2$. Аналогно, $P \geq |x_3 - x_1||y_1 - y_2|/2$, од каде следува тврдењето. Случајот $y_2 = y_3$ се третира на ист начин како случајот $x_1 = x_2$. (Формулација на лемата со доказ се вреднува **(2п)**)

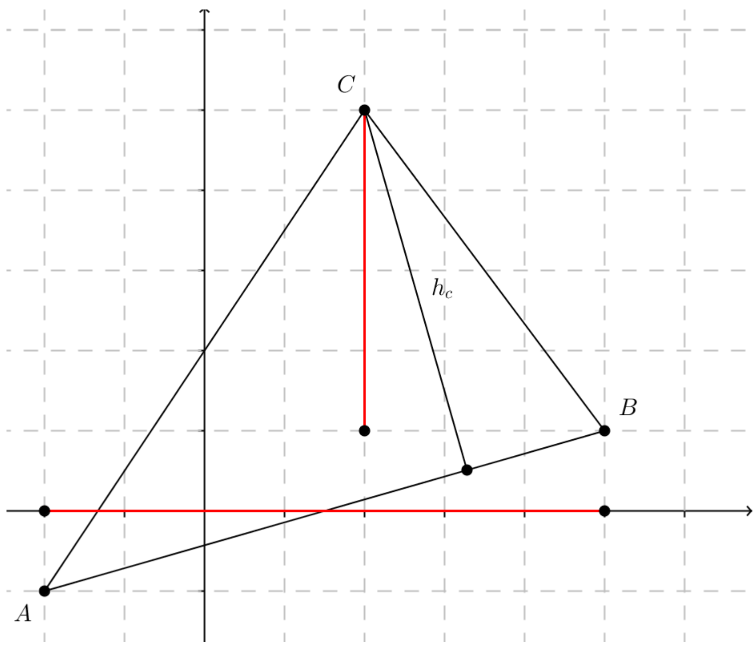


FIGURE 2

Од неравенството (2) добиваме дека $(m-1)^2 < 4040$ или $m \leq 64$. Вредноста $m = 64$ се достига само кога $P = 1/2$. Еден таков триаголник со плоштина $P = 1/2$ е триаголникот со темиња во точките со координати $(0,0), (1,0)$ и $(0,1)$. Заради мрежата дадена на почетокот, триаголникот (еден од нив) ABC ќе има темиња во точките со координати $(0,0), (63,0)$ и $(0,63)$. (Конструкција **(1п)**)