

XLIV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ
Скопје, 12 мај 2019 година

6. одделение

1. Даден е квадрат со страна долга 12cm . Најди ги димензиите на сите различни правоаголници чии должини на страните се различни природни броеви, а нивната плоштина е еднаква на плоштината на дадениот квадрат. Кој од добиените правоаголници има најголем, а кој најмал периметар?

Решение. Правоаголникот има иста плоштина со дадениот квадрат, па затоа плоштината на правоаголникот е 144cm^2 . Го разложуваме бројот 144 на делители, т.е. $144 = 2^4 \cdot 3^2$ и ги формираме сите можни двојки различни природни броеви чиј производ е 144. Така добиваме 6 правоаголници со страни: 2 и 72, 4 и 36, 6 и 24, 8 и 18, 3 и 48, 9 и 16, изразени во cm .

Периметарот на секој од нив е

$$2(2 + 72) = 148\text{cm}, \quad 2(4 + 36) = 80\text{cm}, \quad 2(6 + 24) = 60\text{cm},$$

$$2(8 + 18) = 52\text{cm}, \quad 2(3 + 48) = 102\text{cm}, \quad 2(9 + 16) = 50\text{cm}.$$

Најголем периметар има правоаголникот со страни 2cm и 72cm , а најмал оној со страни 9cm и 16cm .

2. Разликата на два природни броеви е 15, а нивниот најмал заеднички содржател е 42. Кои се тие броеви? Образложи го својот одговор!

Решение. Ако еден од тие броеви го означиме со a , тогаш другиот број кој го бараме е $a + 15$. НЗС на овие два броја е 42, па значи и двата броја се делители на 42. Значи, бројот a е еден од броевите 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 или 42. Но, и бројот $a + 15$ е еден од овие броеви. Бидејќи $a + 15$ е поголем од 15 и е делител на 42, имаме:

i) $a + 15 = 21$, од каде $a = 6$;

ii) $a + 15 = 42$, од каде $a = 27$, што е противречи на условот дека бројот a е делител на 42.

Значи бараните броеви се 6 и 21.

3. Цената на едно пенкало е цел број денари. Цената на 9 вакви пенкала е поголема од 1100 денари, а помала од 1200 денари. Цената на 13 пенкала е поголема од 1500 денари, а помала од 1600 денари. Колку чини едно пенкало?

Решение. Нека x е цената на едно пенкало. Заради условот на задачата, x е цел број денари. Според дадените услови, имаме

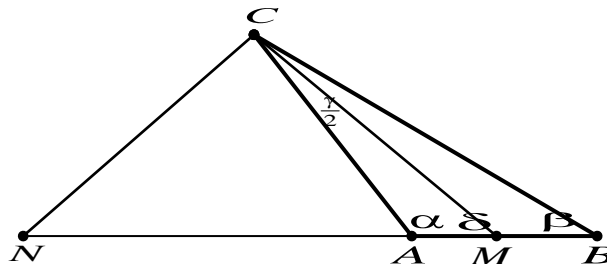
$$1100 < 9x < 1200 \quad \Rightarrow \quad 122 < x < 134$$

$$1500 < 13x < 1600 \quad \Rightarrow \quad 115 < x < 124$$

при што, во првото неравенство делиме со 9, а во второто со 13. Ако ги подредиме двете последни неравенства, добиваме: $115 < 122 < x < 124 < 134$, што значи дека $x = 123$. Според тоа, цената на едно пенкало е 123 денари.

4. За внатрешните агли $\alpha = \angle BAC$ и $\beta = \angle ABC$ на триаголникот ABC важи $\alpha - \beta = 90^\circ$. Нека M и N се пресечните точки на правата AB со симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C , соодветно. Докажи дека $\overline{CM} = \overline{CN}$!

Решение. Од условот $\alpha - \beta = 90^\circ$ следува дека триаголникот ABC е тапоаголен. За да покажеме дека $\overline{CM} = \overline{CN}$, доволно е да докажеме дека важи $\sphericalangle CNM = \sphericalangle NMC$. Да означиме со $\gamma = \sphericalangle ACB$, $\delta = \sphericalangle AMC$. Од $\triangle MBC$ имаме $\delta = \beta + \frac{\gamma}{2}$ (бидејќи δ е надворешен агол за овој триаголник), а од $\triangle AMC$ имаме $\alpha + \delta + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$. Ако на левата страна на последното равенство го додадеме и одземеме аголот β и го искористиме условот, ќе добиеме



$$\alpha - \beta + \delta + \beta + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \delta + \delta = 180^\circ \Rightarrow 2\delta = 90^\circ \Rightarrow \delta = 45^\circ$$

Бидејќи $\sphericalangle NCM = 90^\circ$, како агол меѓу симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C , кои се два напоредни агли, следува дека $\sphericalangle CNM = 45^\circ$, т.е. NMC е рамнокрак триаголник, па $\overline{CM} = \overline{CN}$.

5. Најди ги сите трицифрени броеви деливи со 7, кои имаат различни цифри и имаат збир на цифри делив со 7. Образложи го својот одговор!

Решение. Нека $x = \overline{abc}$ е таков трицифрен број каков што се бара во задачата. Тогаш за неговите цифри важи $a \neq b \neq c \neq a$. Имаме $x = 100a + 10b + c = 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$, од каде што следува дека $2a + 3b + c$ е број делив со 7. Бидејќи од условот на задачата $a + b + c$ е број делив со 7, добиваме дека и разликата $(2a + 3b + c) - 2(a + b + c) = b - c$ е број делив со 7. Да напоменеме дека ако $b - c$ е број делив со 7, тогаш и бројот $c - b$ е број делив со 7. Бидејќи цифрите се различни, добиваме дека единствени броеви кои го задоволуваат условот на задачата се: 518, 581, 329 и 392.

7. одделение

1. Најди го најмалиот природен број, кој помножен со 127008 дава куб на природен број. Образложи го својот одговор!

Решение. Бидејќи $127008 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^2$, следува дека најмалиот природен број со кој треба да го помножиме овој број е бројот $2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$.

2. Должините на страните на еден правоаголник се природни броеви. Одреди ги тие должини ако мерниот број на плоштината на овој правоаголник е еднаков со мерниот број на неговиот периметар. Образложи го својот одговор!

Решение. Нека a и b се должините на страните на правоаголникот. Тогаш заради условот на задачата, $ab = 2(a + b)$, односно $ab - 2a - 2b = 0$. Со додавање на 4 од двете страни на равенката, добиваме $ab - 2a - 2b + 4 = 4$, од каде што $(a - 2)(b - 2) = 4$. Тогаш можни се следните случаи:

1) $a - 2 = 1, b - 2 = 4$, односно $a = 3, b = 6$;

2) $a - 2 = 2, b - 2 = 2$, односно $a = 4, b = 4$,

што се и бараните димензии.

3. Дропката $\frac{179}{140}$ претстави ја како збир на три позитивни дропки со едноцифрени именители.

Образложи го својот одговор!

Решение. Ако именителот на дадената дрпка го разложиме на прости множители, се добива $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$. Оттука, овој број може да се запише како производ од три едноцифрени броеви единствено на следниов начин $140 = 4 \cdot 5 \cdot 7$. Според тоа, бараното претставување на дадената дрпка е $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = \frac{179}{140}$. Ако равенката ја помножиме со 140 се добива $35x + 28y + 20z = 179$.

Доволно е да се најдат сите решенија на оваа равенка. Пред се, да забележиме дека бројот $20z$ е парен број кој завршува на 0, за било која вредност на z . Потоа, бројот $28y$ е парен за било која вредност на y . Бидејќи десната страна на равенката е непарен број, бројот $35x$ треба да биде непарен, а тоа е можно само ако x е непарен број. Притоа, $35x$ завршува на 5 за било која вредност на x , па затоа треба $28y$ да завршува на 4. Тоа е можно, ако y е број што завршува на 3 или 8. Ако y е 8, тогаш $28y > 179$. Затоа заклучуваме дека $y = 3$. Имаме $35x + 20z = 95$. Со непосредна проверка се добива дека $x = 1, z = 3$, односно $\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{7} = \frac{179}{140}$.

4. Во триаголникот ABC , $\angle ACB = 60^\circ$. Симетралата на $\angle BAC$ ја сече страната BC во точка M , а симетралата на $\angle ABC$ ја сече страната AC во точка N . Нека S е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC . Докажи дека $\overline{SM} = \overline{SN}$.

Решение. Нека P и Q се подночја на нормалите спуштени од S кон BC и AC , соодветно. Нека означиме $\alpha = \angle AMC$ и $\beta = \angle BNA$. Заради условот $\angle ACB = 60^\circ$, за внатрешните агли на триаголникот ABC имаме $\angle BAC + \angle ABC = 120^\circ$. Во $\triangle AMC$ важи

$$\alpha + 60^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \frac{\angle BAC}{2} = 120^\circ \quad (1)$$

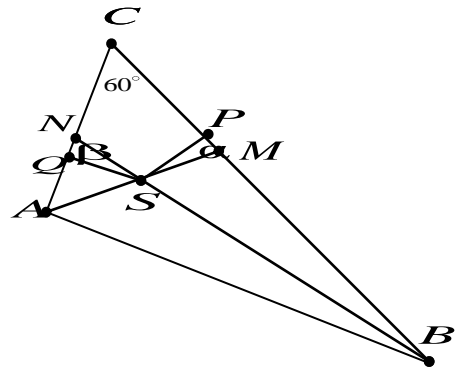
Во $\triangle BNC$ важи

$$(180^\circ - \beta) + 60^\circ + \frac{\angle ABC}{2} = 180^\circ \Rightarrow (180^\circ - \beta) + \frac{\angle ABC}{2} = 120^\circ \quad (2)$$

Ако ги собереме равенките (1) и (2), се добива

$$\alpha + \frac{\angle BAC}{2} + (180^\circ - \beta) + \frac{\angle ABC}{2} = 240^\circ \Rightarrow \alpha - \beta + \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2} = 60^\circ \Rightarrow \alpha - \beta = 0, \text{ т.е. } \alpha = \beta.$$

Според тоа, триаголниците MPS и NQS се складни според признакот АСА, бидејќи имаат исти агли и $\overline{SQ} = \overline{SP}$, како радиуси на впишаната кружница во триаголникот ABC . Следува дека $\overline{SM} = \overline{SN}$, што требаше да се докаже.



5. Ана има 16 исти квадрати со должини на рабовите 2cm , 2cm и 1cm . Таа со нив на повеќе начини може да формира поголем квадрат, при што мора да ги употреби сите 16 мали квадрати и новиот квадрат да нема никакви празнини. Кои се должините на рабовите на квадратот што го формирала Ана, ако тој треба да има најмала плоштина?

Решение. Волуменот на добиениот квадрат секогаш е ист, без разлика како Ана ќе го формира и изнесува $V = 16 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 64\text{cm}^3$. Должините на рабовите на вака добиениот квадрат мора да се

делители на 64, односно 1cm , 2cm , 4cm , 8cm , 16cm , 32cm или 64cm . Единствените можни квадрати што можат да се добијат на овој начин имаат димензии: $32 \times 2 \times 1$, $16 \times 4 \times 1$, $16 \times 2 \times 2$, $8 \times 8 \times 1$, $8 \times 4 \times 2$ и $4 \times 4 \times 4$. Нивните плоштини се:

$$P_1 = 2(64 + 32 + 2) = 196\text{cm}^2, P_2 = 2(64 + 16 + 4) = 168\text{cm}^2, P_3 = 2(32 + 32 + 4) = 136\text{cm}^2,$$

$$P_4 = 2(64 + 8 + 8) = 160\text{cm}^2, P_5 = 2(32 + 16 + 8) = 112\text{cm}^2, P_6 = 2(16 + 16 + 16) = 96\text{cm}^2.$$

Според тоа, квадратот кој го направила Ана има димензии $4 \times 4 \times 4$.

8. одделение

1. Докажи дека бројот $20192019 + 20192018 \cdot 20192019 \cdot 20192020$ е куб на цел број.

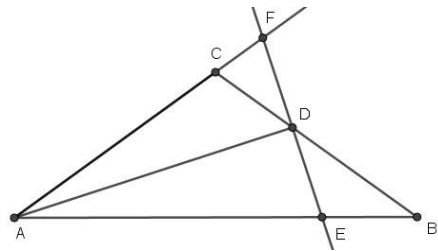
Решение. Нека означиме со $n = 20192019$. Тогаш горниот израз може да го запишеме како $n + (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n + n(n^2 - 1) = n + n^3 - n = n^3$, од каде што следува тврдењето на задачата.

2. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со краци AC и BC и $\angle ACB = 108^\circ$. Симетралата на $\angle BAC$ ја сече страната BC во точка D . Низ D повлекуваме права нормална на AD која ја сече правата AB во точка E . Докажи дека $\overline{DE} = \overline{CD}$.

Решение. Нека F е пресечната точка на правата ED со правата AC . Од $\triangle ABC$ е рамнокрак и од $\angle ACB = 108^\circ$ имаме $\angle BAC = 36^\circ$. Од AD е симетрала на $\angle BAC$ имаме $\angle DAC = 18^\circ$. Триаголникот ADF е правоаголен па имаме $\angle DFA = 72^\circ$. Од $\angle ACB = 108^\circ$ имаме

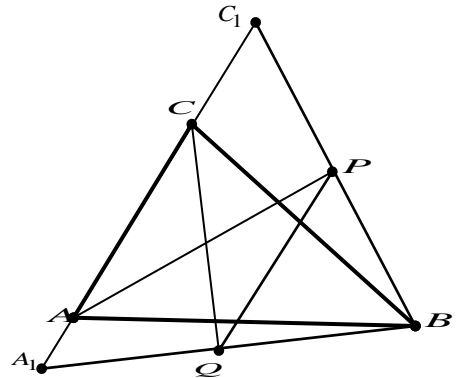
$$\angle DCF = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Следува $\triangle DCF$ е рамнокрак триаголник и $\overline{DC} = \overline{FD}$. Од AD е симетрала на $\angle BAC$ следува $\overline{DE} = \overline{FD} = \overline{CD}$.



3. Во триаголникот ABC повлечени се симетралите на аглите во темињата A и C . Точките P и Q се проекциите на точката B на тие симетрала, соодветно. Докажи дека отсечката PQ е паралелна со страната AC .

Решение. Нека ги продолжиме отсечките BQ и BP до пресек со правата AC и нека тие точки ги означиме со A_1 и C_1 , соодветно. Во триаголникот ABC_1 отсечката AP е висина и симетрала на аголот во темето A . Значи тој триаголник е рамнокрак ($\overline{AB} = \overline{AC_1}$). Тогаш отсечката AP е исто така и тежишна линија, па $BP = PC_1$. Сосема аналогно, CQ е тежишна линија во триаголникот CBA_1 , па $\overline{BQ} = \overline{QA_1}$. Според тоа PQ е средна линија за триаголникот A_1BC_1 . Значи, отсечката PQ е паралелна со страната AC .



4. Нека A е природен број со парен број на цифри, а B е број добиен со некоја промена на редоследот на цифрите на бројот A така што $A+B=10^n$. Докажи дека ако n е парен број, тогаш секој од броевите A и B со горното својство е делив со 10.

Решение. Нека $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ и $B = \overline{b_1 b_2 \dots b_n}$. Од условот $A+B=10^n$ следува дека $a_n + b_n = 0$ или $a_n + b_n = 10$. Ако $a_n + b_n = 10$, тогаш од $A+B=10^n$ следува дека $a_k + b_k = 9$ за секој $i = \overline{1, n-1}$.

Со собирање на овие равенства добиваме $\sum_{i=1}^n (a_k + b_k) = 9(n-1) + 10$. Левата страна на последното равенство е парен број бидејќи секоја цифра се јавува два пати, а десната е непарна (n е непарен број), што не е можно. Следува дека $a_n + b_n = 0$, односно $a_n = b_n = 0$, па $10|A$ и $10|B$.

5. Пресметај го максималниот производ на сите природни броеви чиј збир е 2019.

Решение. Нека со P го означиме максималниот производ. Очигледно е дека ниту еден од множителите во производот P не е 1. Бидејќи $2(k-2) > k$ и $2+k-2 = k$ кога $k > 4$, јасно е дека сите множителите во производот P се помали или еднакви на 4 (во спротивно, P не би бил максимален). Бидејќи $4 = 2+2$, производот не се менува кога четворките ги заменуваме со две двојки. Следува дека $P = 2^x 3^y$. Бидејќи $2^3 < 3^2$ и $2+2+2 = 3+3$, јасно е дека двојки не може да има повеќе од две. Од $2019 = 673 \cdot 3$, следува дека $P = 3^{673}$.

9. одделение

1. За колку природни броеви n се исполнети неравенствата $2019 < \sqrt{n} < 2020$? Образложи го својот одговор!

Решение. Со квадрирање на дадените неравенства ги добиваме еквивалентните неравенства $2019^2 < n < 2020^2$. Според тоа, вкупниот број на броеви за кои се точни последните неравенства, т.е. се точни дадените неравенствата е еднаков на

$$2020^2 - 2019^2 - 1 = (2020 - 2019)(2020 + 2019) - 1 = 4039 - 1 = 4038.$$

2. Најди ги сите прости броеви p такви што $17p+1$ е полн квадрат на природен број.

Решение. Нека $17p+1 = n^2$. Од тоа што 17 и p се прости броеви имаме

$$17p = n^2 - 1 = (n-1)(n+1).$$

Можни се два случаи

1) $17 = n-1$, $p = n+1$, од каде следува дека $n = 18$ односно $p = 19$;

2) $p = n-1$, $17 = n+1$, т.е. $n = 16$ и $p = 15$ што е контрадикција (15 не е прост број).

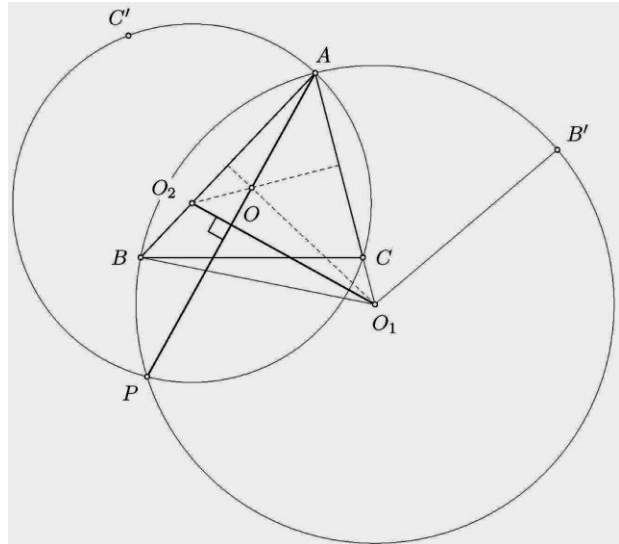
Следува, единствено решение е $p = 19$.

3. Докажи дека за секој природен број n постои број од облик $11\dots 10\dots 0$ кој е делив со n .

Решение. Ги разгледуваме броевите $1, 11, 111, 1111, \dots, 11\dots 1$ каде i -тиот број содржи i единици, $i = \overline{1, n+1}$. При делење со бројот n , можни остатоци се броевите $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Имаме $n+1$ број, а n остатоци, па според Принципот на Дирихле постојат два кои имаат ист остаток при делење со n . Нивната разлика е делива со n и има облик $11\dots 10\dots 0$.

4. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Точката B' е осносиметрична слика на точката B во однос на правата AC , а точката C' е осносиметрична слика на точката C во однос на правата AB . Опишаните кружници околу триаголниците ABB' и ACC' се сечат во точките A и P . Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ лежи на правата AP .

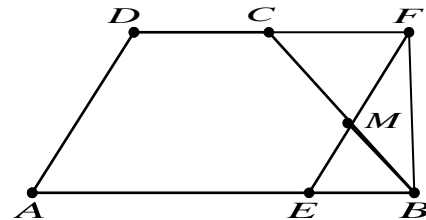
Решение. Нека O_1 е пресекот на правата AC и симетралата на страната AB . Заради осната симетрија важи $\overline{BO_1} = \overline{B'O_1}$, т.е. O_1 е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABB' . Аналогно ја дефинираме точката O_2 како пресек на правата AB и симетралата на страната AC , што значи дека таа е центар на опишаната кружница околу триаголникот ACC' .



Бидејќи AP е заедничка тетива на двете кружници, правата AP е нормална на правата O_1O_2 . Симетралите на страните AB и AC се сечат во точката O , т.е. OO_1 е нормална на AB и OO_2 е нормална на AC . Значи, O е ортоцентар на триаголникот AO_2O_1 . Заклучуваме дека правата AO е нормална на правата O_1O_2 . Значи, правите AP и AO се нормални на O_1O_2 , од што следува дека тие се совпаѓаат, т.е. точките A, O и P се колинеарни.

5. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD , $AB > CD$. На страната BC е одбрана точка M , така што $BM < MC$. Докажи дека $P_{\triangle AMD} > P_{\triangle AMB} + P_{\triangle CMD}$.

Решение. Низ точката M ќе повлечеме права паралелна со кракот AD и ќе ги означиме со E и F пресечните точки со AB и CD , соодветно. За трапезот $CFBE$, важи дека $P = P_{\triangle FMB} = P_{\triangle CME}$, бидејќи $P_{\triangle FMB} = P_{\triangle CBF} - P_{\triangle CMF}$, $P_{\triangle CME} = P_{\triangle CFE} - P_{\triangle CMF}$ и уште $P_{\triangle CBF} = P_{\triangle CFE}$. Од $\overline{BM} < \overline{CM}$ следува дека



$$P = P_{\triangle BFM} < P_{\triangle CMF} \text{ и } P_{\triangle BME} < P_{\triangle CME} = P.$$

Следува $P_{\triangle BME} < P_{\triangle CMF}$. Од паралелограмот $AEFD$ имаме

$$P_{\triangle AMD} = \frac{1}{2} P_{\triangle AEF} \text{ или } P_{\triangle AMD} = P_{\triangle AEM} + P_{\triangle DFM}.$$

Но,

$$P_{\triangle AEM} = P_{\triangle ABM} - P_{\triangle BEM} \text{ и } P_{\triangle DFM} = P_{\triangle DCM} + P_{\triangle CMF}.$$

Конечно,

$$P_{\triangle AMD} = P_{\triangle ABM} - P_{\triangle BEM} + P_{\triangle DCM} + P_{\triangle CMF} = P_{\triangle ABM} + P_{\triangle DCM} + P_{\triangle CMF} - P_{\triangle BEM} > P_{\triangle ABM} + P_{\triangle DCM}$$