

20-та Јуниорска македонска математичка олимпијада  
 ФОН универзитет-Скопје  
 28.05.2016 година

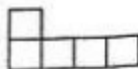
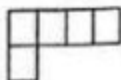


1. Во множеството цели броеви, реши ја равенката

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 2016^3 - 1.$$

2. Нека  $ABCD$  е паралелограм и нека  $E, F, G$  и  $H$  се средини на страните  $AB, BC, CD$  и  $DA$ , соодветно. Ако  $BH \cap AC = I$ ,  $BD \cap EC = J$ ,  $AC \cap DF = K$  и  $AG \cap BD = L$ , тогаш докажи дека четириаголникот  $IJKL$  е паралелограм.

3. Даден е квадрат со димензии  $4 \times 4$ , составен од 16 квадрати со страна 1. Во секој квадрат со димензии  $1 \times 1$  од квадратот се внесени ненегативни цели броеви така што збирот на било кои пет од нив кои може да се прекријат со фигурите на сликата (фигурите може да се поместуваат и превртуваат) изнесува 5. Колку најмногу различни броеви можат да се употребат за пополнување на квадратот?



4. Нека  $x, y, z$  се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{xy}{x^2 + y^2 + 2z^2}} + \sqrt{\frac{yz}{y^2 + z^2 + 2x^2}} + \sqrt{\frac{zx}{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Кога важи равенство?

5. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x + y^2 + (H3D(x, y))^2 = xy \cdot H3D(x, y).$$