ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА ЗА УЧЕНИЦИ ДО 15,5 ГОДИНИ, 2007 ГОДИНА

Скопје, 02.06.2007 година

Задача 1. Дали постои природен број n, таков што бројот $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број?

Решение. Имаме $NZD(n,n+1)=NZD(n+2,n+1)=1$, па затоа

$$NZD(n(n+2),n+1)=1.$$

Според тоа, ако $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број, тогаш $n(n+2)$ треба да е квадрат на природен број. Но,

$$n(n+2)=n^2+2n=n^2+2n+1-1=(n+1)^2-1,$$

од што следува дека за ниту еден природен број n бројот $n(n+1)(n+2)$ не може да биде квадрат на природен број.

Задача 2. Нека $ABCD$ е паралелограм и E е точка од страната AD, така што $\overline{AE}:\overline{ED}=m$. Нека F е точка од CE, така што $BF\perp CE$, и точката G е симетрична на F во однос на AB. Ако точката A е центар на опишаната кружница околу триаголникот BFG, најди ја вредноста на m.

Решение. За да да точката A биде центар на опишаната кружница околу триаголникот BFG, треба $\overline{AB}=\overline{AG}=\overline{AF}$. Бидејќи точката G е симетрична на F во однос на AB имаме дека $\overline{AG}=\overline{AF}$. Останува да го одредиме m од условот $\overline{AB}=\overline{AF}$.

Нека S е точка од страната BC, така што $\overline{CS}:\overline{SB}=\overline{AE}:\overline{ED}=m$, тогаш $AS\parallel CE$. Нека M е пресечната точка на AS и BF, а точката B_1 нека е симетрична точка на B во однос на M. Тогаш, имаме дека $\overline{BM}=\overline{MB_1}$, $AM\perp BF$ (од $BF\perp CE$ и $AS\parallel CE$), па следи дека $\overline{AB}=\overline{AB_1}$. Бидејќи треба да важи $\overline{AB}=\overline{AF}$, го бараме m од условот $\overline{AB_1}=\overline{AF}$. Бидејќи $\overline{AB}=\overline{AB_1}$ и B, B_1, F се колинеарни, тогаш $\overline{AB_1}=\overline{AF}$ ако $B_1\equiv F$ т.е ако M е средина на BF, односно ако S е средина на BC, односно ако $m=\overline{AE}:\overline{ED}=1$.

Задача 3. Нека a,b,c се реални броеви такви што $0<a\le b\le c$. Докажи дека

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\ge 60abc.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$\begin{aligned}(a+3b)(b+4c)(c+2a)&=(a+b+b+b)(b+c+c+c+c)(c+a+a)\\&\ge 4(ab^3)^{\frac{1}{4}}\cdot 5(bc^4)^{\frac{1}{5}}\cdot 3(ca^2)^{\frac{1}{3}}=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}\end{aligned}$$

Бидејќи $a\le b\le c$, имаме

$$60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{2}{15}}c\ge 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}b^{\frac{2}{15}}c=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{13}{12}}c=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{1}{12}}bc\ge 60a^{\frac{11}{12}}a^{\frac{1}{12}}bc=60abc$$

Кај првиот знак за неравенство, равенство важи акко $a=b=c$, кај вториот акко $b=c$, а кај третиот акко $a=b$. Значи, равенство важи акко $a=b=c$. ♦

Задача 4. Броевите $a_1, a_2, ..., a_{20}$ ги задоволуваат условите:

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{20} \geq 0$$
$$a_1 + a_2 = 20$$
$$a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 20.$$

Која е максималната вредност за изразот:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2.$$

За кои вредности на $a_1, a_2, ..., a_{20}$ се постигнува максималната вредност?

Решение. Од условот имаме:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 40, \quad \text{и}$$
$$a_1 = 20 - a_2$$

Па, добиваме:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 = (20 - a_2)^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 =$$
$$= 400 - 40a_2 + a_2^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 \leq$$
$$\leq 400 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{20})a_2 + a_2^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 =$$
$$= 400 - a_1a_2 - a_3a_2 - a_4a_2 - ... - a_{20}a_2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 =$$
$$= 400 + (a_2^2 - a_1a_2) + (a_3^2 - a_3a_2) + ... + (a_{20}^2 - a_{20}a_2) =$$
$$= 400 + a_2(a_2 - a_1) + a_3(a_3 - a_2) + ... + a_{20}(a_{20} - a_2)$$

Од условот имаме:

$$a_2 - a_1 \leq 0, \quad a_3 - a_2 \leq 0, \; ..., \; a_{20} - a_2 \leq 0,$$

па:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 \leq 400,$$

и знак за равенство важи ако и само ако

$$a_3 + a_4 + ... + a_{20} = 20, \text{ и}$$
$$a_2(a_2 - a_1) = 0, \quad a_3(a_3 - a_2) = 0, \; ..., \; a_{20}(a_{20} - a_2) = 0.$$

Разгледуваме два случаи, при кои се достигнува ова равенство:

$$a_2 = 0$$

Следува:

$$a_1 = 20, \; a_3 = a_4 = ... = a_{20} = 0$$
$$a_2 = a_1 = 10$$

Следува:

$$a_3 = a_4 = 10, \quad a_5 = a_6 = ... = a_{20} = 0$$

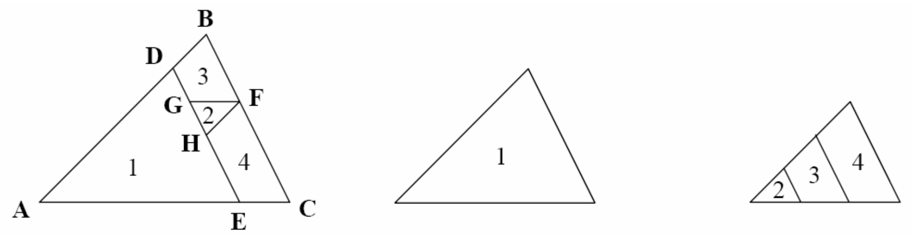
(за еквивалентен го сметаме секој случај на пермутација на индексите 3,4,...,20).

Задача 5. Даден е произволен ΔABC.

а) Дали може ΔABC да се подели на 4 делови, од кои може да се состават два триаголника слични на ΔABC (секој дел се користи само еднаш)? Одговорот да се образложи!

б) Дали може за секој природен број $n \geq 2$, за ΔABC да се направи поделба на $2n$ делови, од кои може да се состават два слични триаголника на ΔABC (секој дел се користи само еднаш)? Одговорот да се образложи!

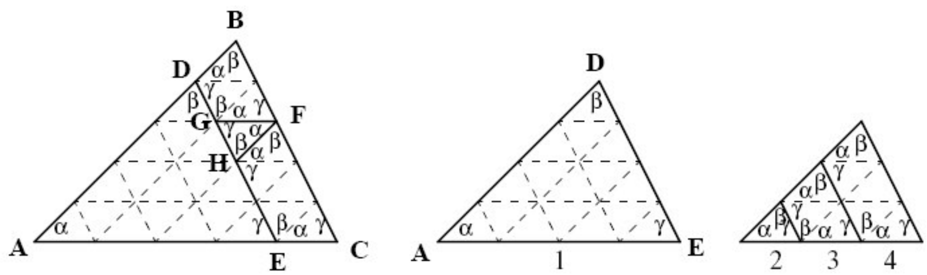
Решение. Поделбата е можна. За случајот под а) тоа изгледа вака:



Страната AC ја делиме на

$$2[1+3+5+...+(2n-3)]+2n-1$$

еднакви делови и низ делбените точки повлекуваме паралелни прави на страните AB и BC (види цртеж). Да ја означиме со $\overline{DE}$ најблиската паралелна отсечка со страната $\overline{BC}$. ΔADE е едниот од бараните триаголници, а другиот се формира од останатите мали триаголничиња кои се наоѓаат во трапезот $ECBD$ (види цртеж). Случајот под а) би бил:



На ист начин се добива и случајот под б), со тоа што поставувањето на првиот триаголник и останатите трапези може да се постигне и како на долниот цртеж. Имено, прво на страната BC се поставува триаголник со страна 1, па потоа трапез со основа еден, па два трапези со основи 3, па два трапези со основи 5 итн.