РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД LXVII ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 30.03.2024

Прва година

1. Еден трговец набавил a производи од тип А и b производи од тип Б. Прво одлучил да ги продава производите од тип А по цена од 2000 денари за производ, со заработка од 250 денари од продаден производ, додека производите од тип Б да ги продава по принцип „два за 3000“ (два производи за 3000 денари), со заработката од 125 денари од продаден производ. Откако ја пресметал вкупната заработка што би ја добил ако ги продаде сите производи, заклучил дека истата таа вкупна заработка ќе ја добие и ако производите ги продава измешано по принцип „три за 5000“ (три производи за 5000 денари), независно од типот на производот. Одреди го односот на бројот на производи од тип А и бројот на производи од тип Б кои ги набавил трговецот. Заработката претставува разликата меѓу вкупниот приход од продажбата и вкупниот трошок од набавката на производите.

Решение. Трговецот купил a производи од тип А и b производи од тип Б, значи вкупно $a+b$ производи. Се разбира, трошоците за набавка на производите се независни од начинот на кој тој ги продава производите.

Според првиот начин на продажба, трговецот ќе има приход од $2000a$ денари од производите од тип А и $\frac{3000}{2}b=1500b$ денари од производите од тип Б, односно вкупен приход од $2000a+1500b$ денари. Заработката од производите од тип А изнесува $250a$ денари, а од производите од тип Б изнесува $125b$ денари, односно вкупната заработка е $250a+125b$ денари. Оттука може да го пресметаме вкупниот трошок кој трговецот го направил за набавка на производите:

$$\text{вкупен трошок за набавка} = \text{вкупен приход} - \text{вкупна заработка} =$$
$$=(2000a+1500b)-(250a+125b)=1750a+1375b\ \text{ден.}$$

Согласно вториот начин на продажба, трговецот ги продава производите мешано, без разлика на нивниот тип, што значи дека цената по производ е иста. Вкупниот приход во овој случај изнесува $\frac{5000}{3}(a+b)$ денари, па може да ја пресметаме вкупната заработка што трговецот би ја имал во овој случај, знаејќи го вкупниот трошок за набавка на производите пресметан претходно:

$$\text{вкупна заработка} = \text{вкупен приход} - \text{вкупен трошок} =$$
$$=\frac{5000}{3}(a+b)-(1750a+1375b)=-\frac{250}{3}a+\frac{875}{3}b\ \text{ден.}$$

Бидејќи вкупната заработка е иста во двата случаи, се добива:

$$250a+125b=-\frac{250}{3}a+\frac{875}{3}b \Leftrightarrow \frac{1000}{3}a=\frac{500}{3}b,$$

од каде заклучуваме дека соодносот на производите од двата типа е $a:b=1:2$.

2. Нека n е сложен број поголем од 4. Докажи дека n е делител на производот $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$.

Решение. Нека n е сложен број поголем од 4. Тогаш n има барем еден прост делител. Разгледуваме два случаи.

Случај 1. Нека $n=pm$ каде p е прост број и уште $m\neq p$ (т.е. n не е квадрат на прост број). Сигурно важи $p\geq 2$ и $m>2$ каде $p,m<n$. Јасно, во производот на последователни $n-1$ броеви, броевите p,m сигурно се појавуваат. Тогаш за некои $a,b\in\mathbb{N}$, $a,b<n,$ производот има облик:

$$(n-1)\cdot\ldots\cdot\underbrace{(n-a)}_{=p}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(n-b)}_{=m}\cdot\ldots\cdot2\cdot1.$$

Од тука заклучуваме дека $n=pm$ е делител на производот $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$.

Случај 2. Нека сега $n=p^2$, каде p е прост број. Бидејќи $n>4$, мора $p>2$ и секако $p<n$. Имаме:

$$2p<p\cdot p=p^2=n,$$

па слично како претходно, p и $2p$ се појавуваат во производот и за некои $c,d\in\mathbb{N}$, $c,d<n$, производот може да го запишеме како:

$$(n-1)\cdot\ldots\cdot\underbrace{(n-c)}_{=2p}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(n-d)}_{=p}\cdot\ldots\cdot2\cdot1.$$

Заклучуваме дека $2p^2$, а со тоа и $n=p^2$, е делител на производот $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$.

3. Најди ги сите тројки реални броеви (x,y,z) за кои се исполнети двете равенства истовремено:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=1$$

и $$ax+by+cz=1,$$

каде a,b,c се реални броеви кои не се сите нули.

Решение. Ако го квадрираме второто равенство имаме $(ax+by+cz)^2=1$, па со замена на десната страна во првото равенство добиваме $$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=(ax+by+cz)^2.$$

Ова е еквивалентно со равенството:

$$x^2a^2+x^2b^2+x^2c^2+y^2a^2+y^2b^2+y^2c^2+z^2a^2+z^2b^2+z^2c^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz.$$

Со прегрупирање на членовите добиваме збир на квадрати во облик:

$$(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2=0.$$

Секој собирок е поголем или еднаков на нула, па последново е точно само ако $ay-bx=bz-cy=cx-az=0$. (*)

Ќе разгледаме неколку потслучаи:

1) Нека сите параметри $a,b,c\neq 0$.

1.1) Ги побараме решенијата во случај кога $x\neq 0$, $y\neq 0$ и $z\neq 0$. Од (*) имаме $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k$ и $k\neq 0$, од каде пак $x=\frac{a}{k}$, $y=\frac{b}{k}$ и $z=\frac{c}{k}$. Ако ги замениме овие вредности во второто равенство $ax+by+cz=1$, добивме $\frac{a^2}{k}+\frac{b^2}{k}+\frac{c^2}{k}=1$, а оттука следува дека $k=a^2+b^2+c^2$.

Значи, едно решение е тројката $$(x,y,z)=\left(\frac{a}{a^2+b^2+c^2},\frac{b}{a^2+b^2+c^2},\frac{c}{a^2+b^2+c^2}\right). \quad (1)$$

1.2) Нека $a,b,c\neq 0$, но да претпоставиме дека $x=0$. Тогаш со замена во (*) имаме $ay=az=0$ и од $a\neq 0$, добиваме $y=0$ и $z=0$, што не е можно, затоа што противречи на второто равенство $ax+by+cz=1$. Слично се добива и ако претпоставиме дека $y=0$ или $z=0$.

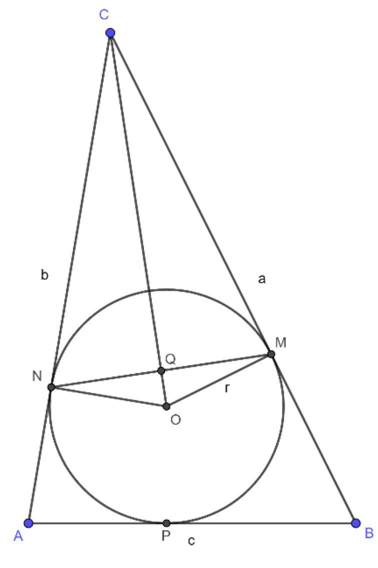
Слична е дискусијата и за другите случаи кога точно еден, односно точно два од параметрите a,b,c се нули. Навистина:

2) Без губење на општоста, нека $a,b\neq 0$ и $c=0$. Тогаш, од (*) имаме дека $ay-bx=bz=az=0$, односно $z=0$ и $y=\frac{bx}{a}$. Со замена во второто равенство добиваме $ax+\frac{b^2x}{a}=1$, од каде $x=\frac{a}{a^2+b^2}$ и $y=\frac{b}{a^2+b^2}$, односно се добива решението (1) точно за $c=0$.

3) Без губење на општоста, нека $a\neq 0$, $b=0$ и $c=0$. Тогаш, од (*) имаме дека $ay=az=0$, односно $y=0$ и $z=0$. Со замена во второто равенство добиваме $ax=1$, од каде $x=\frac{1}{a}$, односно се добива решението (1) кога $b=0$ и $c=0$.

Заклучуваме дека добиеното решение (1) е единственото решение.

4. Во ΔABC со страни a, b и c е впишана кружница со радиус r. Точките на допир помеѓу страните на ΔABC и кружницата формираат ΔMNP. Изрази ги должините на страните на ΔMNP преку a, b, c и r.



Решение. Да го означиме центарот на впишаната кружница со O и нека M,N,P се допирните точки на впишаната кружница со страните BC,CA,AB соодветно (види цртеж). Радиусите повлечени до допирните точки се нормални на страните на триаголникот, па ΔMOC е правоаголен триаголник. Јасно, $\overline{MO}=r$. Нека $Q=MN\cap OC$. Аголот во точката Q е исто така прав агол (од својствата на рамнокракиот триаголник). Сега ΔMOC и ΔQOM се правоаголни триаголници со заеднички агол MOQ, па следи дека $\Delta MOC\sim\Delta QOM$. Од сличноста се добива:

$$\overline{MQ}:\overline{MO}=\overline{CM}:\overline{CO}$$

$$\overline{MQ}=\frac{\overline{CM}\cdot\overline{MO}}{\overline{CO}}$$

Од друга страна, CO е симетрала и на MN, па важи $\overline{MN} = 2\cdot\overline{MQ}$, односно:

$$\overline{MN} = \frac{2\cdot\overline{CM}\cdot\overline{MO}}{\overline{CO}} = \frac{2\cdot\overline{CM}\cdot r}{\overline{CO}}$$

Останува да ги најдеме $\overline{CM}$ и $\overline{CO}$. Тангентни отсечки повлечени од точка кон кружницата имаат еднакви должини, па важи $\overline{CM} = \overline{CN}$, $\overline{AN} = \overline{AP}$ и $\overline{BM} = \overline{BP}$. Имаме:

$$\overline{CM} = \frac{1}{2}\left(\overline{CM}+\overline{CN}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(a-\overline{BM}\right)+\left(b-\overline{AN}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(a+b-\left(\overline{AN}+\overline{BM}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(a+b-\left(\overline{AP}+\overline{BP}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(a+b-\overline{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(a+b-c\right)$$

Сега, од ΔMOC имаме:

$$\overline{CO} = \sqrt{\overline{MO}^2+\overline{CM}^2} = \sqrt{r^2+\tfrac{1}{4}\left(a+b-c\right)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2+(a+b-c)^2},$$

па се добива:

$$\overline{MN} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\left(a+b-c\right)r}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+(a+b-c)^2}} = \frac{2\left(a+b-c\right)r}{\sqrt{4r^2+(a+b-c)^2}}.$$

Слично, се добива:

$$\overline{MP} = \frac{2\left(a+c-b\right)r}{\sqrt{4r^2+(a+c-b)^2}} \quad \text{и} \quad \overline{NP} = \frac{2\left(b+c-a\right)r}{\sqrt{4r^2+\left(b+c-a\right)^2}}.$$

Втора година

1. Реши го системот равенки во множеството реални броеви: $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 \\ y=5+|x-1| \end{cases}$.

Решение. Нека $x<1$. Тогаш системот е еквивалентен со $\begin{cases} -(x-1)+|y-5|=1 \\ y=5-(x-1) \end{cases}$, т.е. со $\begin{cases} -x+|y-5|=0 \\ y=6-x \end{cases}$. Ако од втората равенка замениме во првата добиваме $-x+|1-x|=0$, т.е. $-x+|x-1|=0$. Бидејќи $x<1$, равенката е еквивалентна со $-x-(x-1)=0$ и оттука $x=\frac{1}{2}$. Јасно, $x=\frac{1}{2}<1$, па тогаш $y=6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$, односно едно решение е парот $(\frac{1}{2},\frac{11}{2})$.

Нека $x\geq 1$. Тогаш системот е еквивалентен со $\begin{cases} (x-1)+|y-5|=1 \\ y=5+(x-1) \end{cases}$, т.е. со $\begin{cases} x+|y-5|=2 \\ y=4+x \end{cases}$. Ако од втората равенка замениме во првата добиваме $x+|x-1|=2$. Од $x\geq 1$, равенката е еквивалентна со $x+(x-1)=2$, од каде $x=\frac{3}{2}$.

Јасно, $x=\frac{3}{2}\geq 1$, па тогаш $y=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$, односно решение е и парот $(\frac{3}{2},\frac{11}{2})$.

Конечно, системот има две решенија $(\frac{1}{2},\frac{11}{2})$ и $(\frac{3}{2},\frac{11}{2})$.

2. Нека a,b,c се реални броеви такви што $ac\neq bc$ и $c\neq 0$. Ако равенките $x^2+ax+bc=0$ и $x^2+bx+ca=0$ имаат заеднички корен, тогаш равенката $x^2+cx+ab=0$ има реални корени. Докажи.

Решение. Од $ac\neq bc$ следува $(a-b)c\neq 0$, а бидејќи $c\neq 0$ следува $a-b\neq 0$ т.е. $a\neq b$. Нека x_1 и x_2 се корени на $x^2+ax+bc=0$, а x_1 и x_3 се корени на $x^2+bx+ca=0$. Сега, од Виетовите врски применети на двете равенки, имаме $x_1+x_2=-a,\ x_1x_2=bc,\ x_1+x_3=-b,\ x_1x_3=ca$. Од првата и третата равенка добиваме $x_2-x_3=b-a$, а од втората и четвртата $x_1(x_2-x_3)=(b-a)c$. Тогаш, $x_1(b-a)=(b-a)c$ и бидејќи $a\neq b$, следува $x_1=c$. Од $x_1x_2=bc,\ x_1x_3=ca$, $x_1=c$ и $c\neq 0$ следува $x_2=b,\ x_3=a$. Од $x_1+x_2=-a$ следува $c+b=-a$, т.е. $a+b=-c$ па затоа a и b се реални решенија на $x^2+cx+ab=0$.

3. Нека m,n,k се природни броеви и нека $\frac{m\sqrt{5}+n}{n\sqrt{5}+k}$ е рационален број. Докажи дека бројот $m^2+n^2+k^2$ е делив со бројот $m+n+k$.

Решение. Со трансформирање на изразот $\frac{m\sqrt{5}+n}{n\sqrt{5}+k}$ добиваме дека

$$\frac{m\sqrt{5}+n}{n\sqrt{5}+k}=\frac{\left(m\sqrt{5}+n\right)\left(n\sqrt{5}-k\right)}{\left(n\sqrt{5}+k\right)\left(n\sqrt{5}-k\right)}=\frac{5mn-nk}{5n^2-k^2}+\sqrt{5}\,\frac{n^2-mk}{5n^2-k^2}.$$

Бидејќи левата страна е рационален број, следува дека и десната страна е рационален број, односно мора $n^2=mk$.
Го разгледуваме изразот $m^2+n^2+k^2=\left(m+n+k\right)^2-2\left(mn+nk+km\right)$. Од тоа што $n^2=mk$, добиваме

$$mn+nk+km=mn+nk+n^2=n\left(m+k+n\right).$$

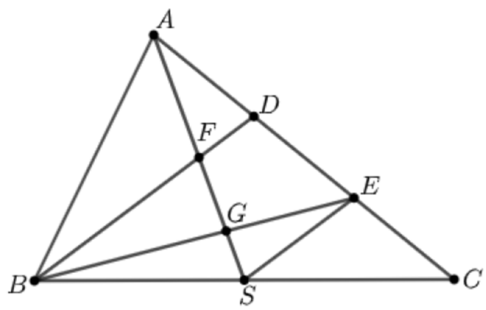
Оттука следува

$$m^2+n^2+k^2=\left(m+n+k\right)^2-2n\left(m+n+k\right)=\left(m+n+k\right)\left(\left(m+n+k\right)-2n\right)=\left(m+n+k\right)\left(m-n+k\right),$$

што значи дека бројот $m^2+n^2+k^2$ е делив со бројот $m+n+k$.

4. Плоштината на триаголникот ABC е P. Точките D и E ја делат страната AC на три еднакви делови и притоа D е поблизу до A. Тежишната линија повлечена кон страната BC ги сече отсечките BD и BE во точки F и G, соодветно. Изрази ја плоштината на триаголникот BGF преку P.

Решение. Нека S е средината на страната BC. Тогаш SE е средна линија во триаголникот BCD и затоа $SE \parallel BD$ и $\overline{BD}=2\overline{SE}$. Од паралелноста на SE и FD и од тоа што D е средина на AE, следува FD е средна линија во триаголникот ASE. Затоа F е средина на AS и $\overline{SE}=2\overline{FD}$. Тогаш, $\overline{BD}=4\overline{FD}$ и оттука $\overline{BF}=3\overline{FD}=\frac{3}{2}\overline{SE}$. Од $SE \parallel BD$ следува дека триаголниците BGF и EGS се слични и важи $\frac{\overline{FG}}{\overline{SG}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{ES}}=\frac{3}{2}$.



Сега, $\frac{\overline{AS}}{\overline{FG}}=\frac{\overline{AF}+\overline{FG}+\overline{GS}}{\overline{FG}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AS}}{\overline{FG}}+1+\frac{2}{3}$, па $\frac{1}{2}\frac{\overline{AS}}{\overline{FG}}=\frac{5}{3}$ и оттука $\frac{\overline{FG}}{\overline{AS}}=\frac{3}{10}$.
Нека h_B е висината во триаголникот BGF спуштена од темето *B*. За плоштината на ΔBGF добиваме:

$$P_{BGF}=\frac{\overline{FG}\cdot h_B}{2}=\frac{\frac{3}{10}\overline{AS}\cdot h_B}{2}=\frac{3}{10}P_{ABS}=\frac{3}{10}\frac{P}{2}=\frac{3}{20}P.$$

Трета година

1. Во множеството на реални броеви реши ја неравенката $\log_2^2\left(-\log_2 x\right)+\log_2\left(\log_2^2 x\right)\le 8$.

Решение 1. За дефинициона област треба да важи $\begin{cases}-\log_2 x>0\\ \log_2^2 x>0\\ x>0\end{cases}$, од каде следува дека $0<x<1$. Дадената неравенка ја запишуваме во еквивалентен облик $\log_2^2\left(-\log_2 x\right)+\log_2\left(\log_2 x\right)^2\le 8 \Leftrightarrow \log_2^2\left(-\log_2 x\right)+\log_2\left(-\log_2 x\right)^2\le 8$. Од последното добиваме дека $\log_2^2\left(-\log_2 x\right)+2\log_2\left|-\log_2 x\right|\le 8$. Но, $-\log_2 x>0$, па почетната неравенка е еквивалентна со неравенката $\log_2^2\left(-\log_2 x\right)+2\log_2\left(-\log_2 x\right)\le 8$. Воведуваме смена $\log_2\left(-\log_2 x\right)=t$, со која ја добиваме квадратната неравенка $t^2+2t-8\le 0$.
Од овде добиваме дека $-4\le t\le 2$, односно $-4\le\log_2\left(-\log_2 x\right)\le 2$. Според тоа,

$$\begin{cases}\log_2(-\log_2 x)\le 2\\ \log_2(-\log_2 x)\ge -4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\log_2 x\le 2^2\\ -\log_2 x\ge 2^{-4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_2 x\ge -2^2\\ \log_2 x\le -2^{-4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 2^{-2^2}\\ x\le 2^{-2^{-4}}\end{cases}.$$

Конечно, решенија на неравенката се сите $x\in\left[2^{-2^2},2^{-2^{-4}}\right]$.

Решение 2. За дефиниционата област треба да важи $\begin{cases}-\log_2 x>0\\ \log_2^2 x>0\\ x>0\end{cases}$, од каде следува дека $0<x<1$. Воведуваме смена $v=-\log_2 x$, од каде $v^2=\log_2^2 x$. Неравенката го добива обликот $\log_2^2 v+\log_2 v^2\le 8$, односно $\log_2^2 v+2\log_2 v-8\le 0$. Со смената $t=\log_2 v$, добиваме квадратна равенка $t^2+2t-8\le 0$, а оттука $-4\le t\le 2$. Следува $2^{-4}\le v\le 2^2$, односно $2^{-4}\le -\log_2 x\le 2^2$. Од $-\log_2 x\le 2^2$ следува $\log_2 x\ge -2^2$, односно $x\ge 2^{-2^2}$. Од $-\log_2 x\ge 2^{-4}$ следува $\log_2 x\le -2^{-4}$, односно $x\le 2^{-2^{-4}}$. Решението на неравенката е интревалот $\left[2^{-2^2},2^{-2^{-4}}\right]$.

2. Нека α,β, γ се агли во триаголник такви што $\alpha\le\beta\le\gamma$. Одреди ги аглите во триаголникот ако $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$ и $\sin 2\alpha+\sin 2\beta=\frac{3}{2}$.

Решение 1. Користејќи ги формулите за збир и производ, за равенствата добиваме $\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\sin\gamma=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ и $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$. Бидејќи α,β, γ се агли во триаголник, имаме $\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(180^\circ-\gamma\right)=\sin\gamma$ и $\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(180^\circ-\gamma\right)=-\cos\gamma$. Сега равенствата добиваат облик $\cos(\alpha-\beta)\sin\gamma+\cos\gamma\sin\gamma=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ и $\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$, а оттука $\sin\gamma\cos\gamma=-\frac{\sqrt{3}}{4}$, односно $\sin 2\gamma=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи $0<2\gamma<360^\circ$, следува $\gamma=120^\circ$ или $\gamma=150^\circ$. Ако $\gamma=120^\circ$, тогаш $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$. Оттука $\alpha+\beta=60^\circ,\alpha-\beta=-30^\circ\ (\alpha\le\beta)$, односно $\alpha=15^\circ$, $\beta=45^\circ$. Ако $\gamma=150^\circ$, тогаш $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{2}$, што не е можно. Значи аглите во триаголникот се $\alpha=15^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=120^\circ$.

Решение 2. Со користење на идентитетот $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ за $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, и од дадените равенства директно следува $\sin 2\gamma=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи $0<2\gamma<360^\circ$, добиваме $\gamma=120^\circ$ или $\gamma=150^\circ$. Од $\sin 2\alpha+\sin 2\beta=\frac{3}{2}$ добиваме $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$. Ако $\gamma=150^\circ$, добиваме $\alpha+\beta=30^\circ$, односно $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{2}$, што не е можно. Значи $\gamma=120^\circ$. Бидејќи $\alpha+\beta=60^\circ$, следува $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Оттука $\alpha-\beta=30^\circ$ или $\alpha-\beta=-30^\circ$. Од $\alpha+\beta=60^\circ$ и $\alpha-\beta=-30^\circ$, добиваме $\alpha=15^\circ$ и $\beta=45^\circ$. Бидејќи $\alpha\le\beta$, заклучуваме дека $\alpha=15^\circ$ и $\beta=45^\circ$. Аглите на триаголникот се $\alpha=15^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=120^\circ$.

Решение 3. Со користење на идентитетот $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ за $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, и од дадените равенства директно следува $\sin 2\gamma=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи $0<2\gamma<360^\circ$, добиваме $\gamma=120^\circ$ или $\gamma=150^\circ$.

Ако $\gamma=120^\circ$, тогаш $\alpha+\beta=60^\circ$. Од $\sin 2\alpha+\sin 2\beta=\frac{3}{2}$, со замена $\beta=60^\circ-\alpha$, добиваме $\sin 2\alpha+\sin 2\left(60^\circ-\alpha\right)=\frac{3}{2}$, односно $\sin 2\alpha+\sin 120^\circ\cos 2\alpha-\cos 120^\circ\sin 2\alpha=\frac{3}{2}$, од каде следува дека

$$\sin 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\alpha=\frac{3}{2}\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\left(\sqrt{3}-3\right)-\left(\sqrt{3}+3\right)\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}+3\right)\mathrm{tg}^2\alpha-6\mathrm{tg}\alpha-\left(\sqrt{3}-3\right)=0.$$

Со смената $t=\mathrm{tg}\alpha$, ја добиваме квадратната равенка $\left(\sqrt{3}+3\right)\mathrm{t}^2-6\mathrm{t}-\left(\sqrt{3}-3\right)=0$ чии решенија се $t_1=1$ и $t_2=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$. Од $\mathrm{tg}\alpha=1$, добиваме $\alpha=45^\circ$. Од $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ добиваме $\alpha=15^\circ$. Навистина,

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\Leftrightarrow\mathrm{tg}\alpha=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\Leftrightarrow\mathrm{tg}\alpha=\frac{\mathrm{tg}45^\circ-\mathrm{tg}30^\circ}{1+\mathrm{tg}45^\circ\cdot\mathrm{tg}30^\circ}\Leftrightarrow\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\left(45^\circ-30^\circ\right)\Leftrightarrow\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\left(15^\circ\right)\Rightarrow\alpha=15^\circ.$$

Значи $\alpha=15^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=120^\circ$.

Ако $\gamma=150^\circ$, на сличен начин како и претходно добиваме $\left(\sqrt{3}+3\right)\mathrm{tg}^2\alpha-2\mathrm{tg}\alpha-\left(\sqrt{3}-3\right)=0$. Со смената $t=\mathrm{tg}\alpha$, ја добиваме квадратната равенка $\left(\sqrt{3}+3\right)t^2-2t-\left(\sqrt{3}-3\right)=0$, која нема реални корени.

Од сето ова, заклучуваме дека аглите на триаголникот се $\alpha=15^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=120^\circ$.

3. Одреди ја најмалата вредност на изразот $\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$, каде $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\left(\frac{1}{4},1\right)$.

Решение 1. Од $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ добиваме $x-\frac{1}{4}\leq x^2$. Бидејќи $\log_{x_k}x$ е опаѓачка за $0<x_k<1$, добиваме $\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right)\geq\log_{x_k}\left(x_{k+1}\right)^2=2\log_{x_k}x_{k+1}$, при што $x_{n+1}=x_1$.

Од добиените неравенства и со примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, следува

$$\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right)\geq 2\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}x_{k+1}\geq 2n\sqrt[n]{\frac{\ln x_2}{\ln x_1}\cdot\frac{\ln x_3}{\ln x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln x_1}{\ln x_n}}=2n.$$

За $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1}{2}$, $\sum_{k=1}^{n}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=\sum_{k=1}^{n}2=2n$. Значи најмалата вредност на дадениот израз е $2n$.

Решение 2. Без губење на општоста нека x_n е најголемиот од сите $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\left(\frac{1}{4},1\right)$. Тогаш за секое $i=\overline{1,n}$, $x_i\leq x_n$, односно $x_i-\frac{1}{4}\leq x_n-\frac{1}{4}$. Користејќи дека $x_i\in\left(\frac{1}{4},1\right)$, имаме $\log_{x_n}\left(x_i-\frac{1}{4}\right)\geq\log_{x_n}\left(x_n-\frac{1}{4}\right)$, но и $\log_{x_i}\left(x_{i+1}-\frac{1}{4}\right)\geq\log_{x_i}\left(x_n-\frac{1}{4}\right)$, за $i=\overline{1,n-1}$. Јасно од $x_i\leq x_n$ следува и $\frac{1}{\ln x_i}\geq\frac{1}{\ln x_n}$, за $i=\overline{1,n}$.

Сега, користејќи ги овие неравенства го трансформираме почетниот израз до:

$$\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)\geq$$

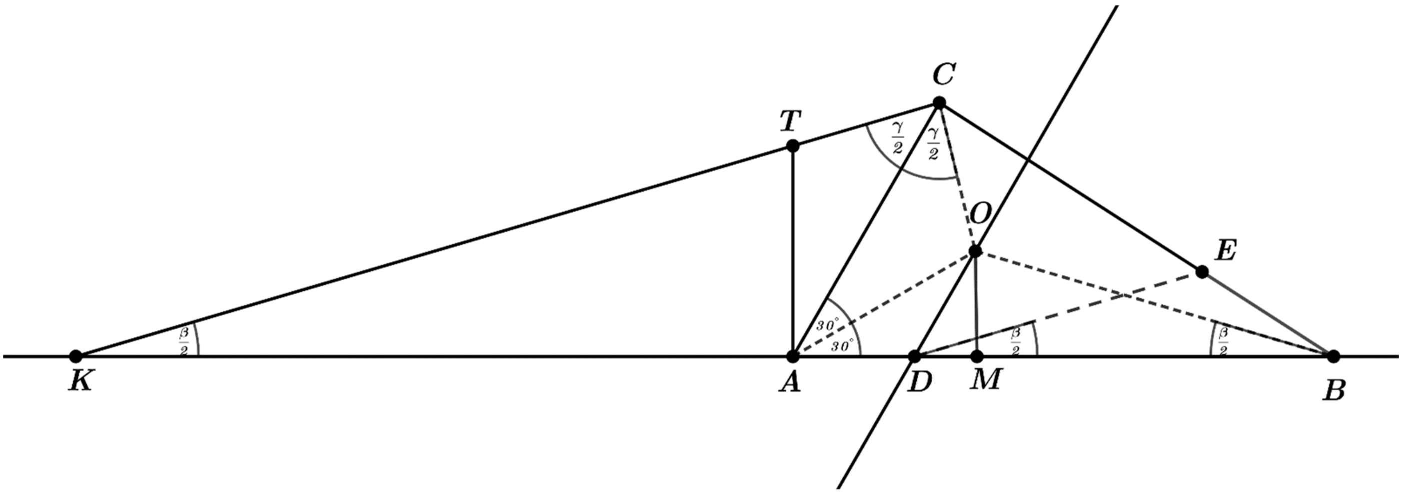
$$\geq\log_{x_1}\left(x_n-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_n-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log_{x_n}\left(x_n-\frac{1}{4}\right)=\frac{\ln\left(x_n-\frac{1}{4}\right)}{\ln x_1}+\frac{\ln\left(x_n-\frac{1}{4}\right)}{\ln x_2}+\ldots+\frac{\ln\left(x_n-\frac{1}{4}\right)}{\ln x_n}=$$

$$=\ln\left(x_n-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}+\ldots+\frac{1}{\ln x_n}\right)\geq\ln\left(x_n-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{n}{\ln x_n}=n\cdot\log_{x_n}\left(x_n-\frac{1}{4}\right)\geq 2n.$$

Последното неравенство доаѓа од $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, од каде $x-\frac{1}{4} \leq x^2$, односно $\log_{x_n}\left(x_n-\frac{1}{4}\right) \geq 2$. Најмалата вредност на изразот е $2n$ и равенство се достигнува за $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{2}$.

4. Нека во триаголникот ABC важи $\angle BAC = 60^\circ$. Нека O е центарот на впишаната кружница во ΔABC и нека D е точка на страната AB таква што DO е паралелна со AC. Нека E е точка на страната BC таква што $3\overline{BE} = \overline{BC}$. Докажи дека $\angle BDE = \frac{1}{2}\angle ABC$.

Решение 1. Нека K е точка на правата AB таква што $\angle CKB = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{\beta}{2}$ и A е точка меѓу B и K. Бидејќи $\beta + \gamma = 120^\circ$, добиваме $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 60^\circ$. Јасно $\angle ACK = \frac{\gamma}{2}$. Нека T е точка на страната CK таква што $AT \perp AK$ и M е точка на страната AB таква што $OM \perp AB$. Бидејќи $\angle CAT = 30^\circ = \angle CAO$, $\angle OCA = \angle ACT = \frac{\gamma}{2}$, следува дека $\Delta ACT \cong \Delta ACO$. Оттука $\overline{TA} = \overline{AO} = 2\overline{OM}$, бидејќи AO е хипотенуза во правоаголниот ΔAMO, каде OM е катета спроти агол од 30°.



Исто така, $\Delta KAT \sim \Delta BMO$, па следува $\frac{\overline{BM}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{TA}} = \frac{1}{2}$. ... (1) Од ΔOMD добиваме $\overline{OD} = 2\overline{MD}$ (ΔOMD е со агли 30°-60°-90°, $OD \| AC$). Сега јасно ΔADO е рамнокрак ($\angle OAD = \angle AOD = 30^\circ$), па $\overline{AD} = \overline{DO}$. Од последните две равенства, следува $\frac{\overline{MD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{MD}}{2\overline{MD}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$. ... (2)

Со примена на (1) и (2) добиваме $\frac{\overline{BD}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{BM} + \overline{MD}}{\overline{DA} + \overline{AK}} = \frac{\overline{BM} + \overline{MD}}{2\overline{MD} + 2\overline{BM}} = \frac{1}{2}$, односно $\frac{\overline{BD}}{\overline{BK}} = \frac{1}{3}$. Од условот $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{1}{3}$, па следува дека $DE \| CK$. Значи $\angle BDE = \frac{\beta}{2}$.

Решение 2. Нека E_1 е точка на страната BC таква што $\angle BDE_1 = \frac{\beta}{2}$ $\left(\beta = \angle ABC\right)$. Тогаш $\angle BE_1D = 180^\circ - \frac{3\beta}{2}$. Применувајќи ја синусната теорема за ΔDBE_1, добиваме

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BE_1}} = \frac{\sin\left(180^\circ - \frac{3\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{3\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{3\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - 4\sin^3\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = 3 - 4\sin^2\frac{\beta}{2} = 3 - 4\frac{1-\cos\beta}{2} =$$
$$= 3 - 2 + 2\cos\beta = 1 + 2\cos\beta.$$

Бидејќи $\angle BAC = 60^\circ$ и $DO \parallel AC$, добиваме $\angle BDO = 60^\circ$, $\angle BOD = 120^\circ - \frac{\beta}{2}$. Од ΔBOC добиваме $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 60^\circ\right) = 60^\circ$ и $\angle BOC = 120^\circ$. Применувајќи ја синусната теорема за ΔBOD и ΔBOC, добиваме

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BO}} = \frac{\sin\left(120^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin 60^\circ} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{BO}} = \frac{\sin\left(120^\circ\right)}{\sin\left(60^\circ - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(60^\circ\right)}{\sin\left(60^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Следува,

$$\overline{BD} = \overline{BO}\frac{\sin\left(120^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(60^\circ\right)} \quad \text{и} \quad \overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{1}{3}\overline{BO}\frac{\sin 60^\circ}{\sin\left(60^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Оттука,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{3\sin\left(120^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin^2 60^\circ} = 4\sin\left(120^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= 4\sin\left(180^\circ - \left(120^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 4\sin\left(60^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\beta - \cos 120^\circ\right) = 2\cos\beta - 2\cos 120^\circ = 2\cos\beta - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cos\beta + 1.$$

Значи $\frac{\overline{BD}}{\overline{BE_1}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}}$, односно $\overline{BE_1} = \overline{BE}$. Тогаш мора $E \equiv E_1$, односно $\angle BDE = \frac{1}{2}\angle ABC$.

Четврта година

1. Даден е полином со целобројни коефициенти кој за некои 9 различни цели броеви има вредност 2026. Докажи дека полиномот нема целобројни нули.

Решение. Нека за полиномот $P(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, со целобројни коефициенти, важи

$$P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_9) = 2026,$$

за некои различни цели броеви $a_1, a_2 \dots, a_9$. Да претпоставиме дека постои цел број d, за кој $P(d) = 0$. Да забележиме дека за полином P со целобројни коефициенти, и различни цели броеви x и y, важи $(x - y)|(P(x) - P(y))$
(Ова следи од тоа што $P(x) - P(y)$ е збир од собироци од облик $b_i(x^i - y^i), i = 1, \dots, n$.)
Бидејќи d е различен од сите $a_1, a_2 \dots, a_9$ важи:

$$(a_1 - d)|\, P(a_1) - P(d) = 2026,$$
$$(a_2 - d)|\, P(a_2) - P(d) = 2026,$$
$$\dots$$
$$(a_9 - d)|\, P(a_9) - P(d) = 2026.$$

Единствени делители на 2026 се $\pm 1, \pm 2, \pm 1013, \pm 2026$, кои се вкупно 8 на број. Тогаш, според принципот на Дирихле, следи дека мора барем две од разликите $a_j - d, j = 1,2, \dots, 9$, да се еднакви. Ова повлекува дека мора барем два од броевите $a_1, a_2 \dots, a_9$ да се еднакви, што е контрадикција. Според тоа, полиномот P нема целобројни нули.

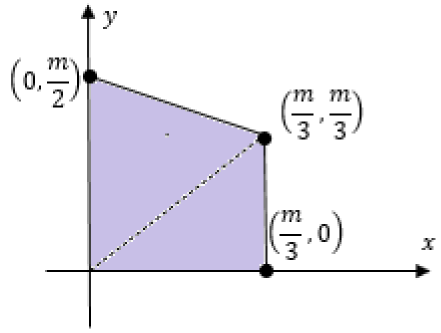
2. Множеството точки $S = \{(x, y)\colon\ |x| + |x - y| + |x + y| \ \leq\ m\}$ кое се наоѓа во xOy-рамнината, дефинира област која има плоштина еднаква на 15. Пресметај го m.

Решение. Најпрво, да забележиме дека функцијата $f(x, y) = |x| + |x - y| + |x + y|$ е симетрична во однос на x и y оските:

$$f(-x, y) = |-x| + |-x - y| + |-x + y| = |x| + |x + y| + |x - y| = f(x, y),$$
$$f(x, -y) = |x| + |x - (-y)| + |x + (-y)| = |x| + |x + y| + |x - y| = f(x, y).$$

Оттука, доволно е да ја пресметаме вредноста на m за која плоштината на областа во првиот квадрант е еднаква на $\frac{15}{4}$. Понатаму, ќе сметаме дека $x, y \geq 0$.
Нека $x \geq y$. Тогаш $|x| + |x - y| + |x + y| = x + x - y + x + y = 3x$.

Нека $x \leq y$. Тогаш $|x|+|x-y|+|x+y|=x-x+y+x+y=x+2y$.
За дадено фиксно m, ги формираме правите $3x=m$ и $x+2y=m$.
Множеството точки во првиот квадрант кои го задоволуваат условот на множеството S е зададено на следниот график:



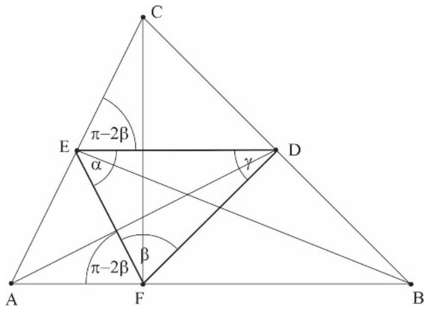
Плоштината на означената област е еднаква збирот од плоштините на двата триаголници:

$$P_1+P_2=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{m}{3}\right)^2+\frac{m}{3}\cdot\frac{m}{2}\right]=\frac{5m^2}{36}.$$

Од $\frac{5m^2}{36}=\frac{15}{4}$ добиваме дека $m^2=27$ односно $m=3\sqrt{3}$.

3. Даден е остроаголен триаголник ABC. На страните AB, BC и CA дадени се точки F, D и E такви што CF, AD и BE се соодветно висина, тежишна линија и симетрала на аголот $\sphericalangle ABC$.
Ако важи $\sphericalangle FDE=\sphericalangle ACB, \sphericalangle DEF=\sphericalangle BAC, \sphericalangle EFD=\sphericalangle ABC$, докажи дека триаголникот ABC е рамностран.

Решение. Ќе означиме како и вообичаено, $\overline{AB}=c, \overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \sphericalangle ACB=\gamma, \sphericalangle BAC=\alpha, \sphericalangle ABC=\beta$. Бидејќи триаголникот BFC е правоаголен и FD е тежишна линија кон хипотенузата, имаме $\overline{FD}=\overline{CD}=\overline{BD}=a/2$...(1)
Тогаш триаголникот FBD е рамнокрак, па $\sphericalangle BFD=\sphericalangle ABC=\beta$. Од условот $\sphericalangle EFD=\beta$ имаме $\sphericalangle AFE=180^o-2\beta$.
Исто така важи: $\sphericalangle FEA=180^o-(180^o-2\beta+\alpha)=2\beta-\alpha, \sphericalangle DEC=180^o-(2\beta-\alpha+\alpha)=180^o-2\beta$.



Очигледно триаголникот EFD е сличен на триаголникот ABC, со коефициент на сличност $\frac{1}{2}$, па добиваме

$$\overline{FE}=\frac{c}{2}, \overline{DE}=\frac{b}{2}.$$

Сега, користиме синусна теорема за триаголникот DEC:

$$\frac{\frac{b}{2}}{\sin(\gamma)}=\frac{CD}{\sin(180^o-2\beta)}=\frac{\frac{a}{2}}{\sin(2\beta)}=\frac{\frac{a}{2}}{2\sin(\beta)\cos(\beta)}.$$

Од последното равенство и синусната теорема применета на триаголникот ABC, добиваме:

$$\cos(\beta)=\frac{a\sin(\gamma)}{2bsin(\beta)}=\frac{ac}{2b^2} \quad ...(2)$$

Од тоа што BE е симетрала на агол, од теорема за однос во кој симетралата на агол ја дели спротивната страна добиваме:

$$\frac{a}{c}=\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}}=\frac{b-\overline{AE}}{\overline{AE}},$$

односно $\overline{AE}=\frac{bc}{a+c}$. Применувајќи синусна теорема за триаголникот AEF, добиваме

$$\frac{\frac{c}{2}}{\sin(\alpha)}=\frac{\frac{bc}{a+c}}{\sin(180^o-2\beta)}=\frac{\frac{bc}{a+c}}{\sin(2\beta)}=\frac{\frac{bc}{a+c}}{2\sin(\beta)\cos(\beta)},$$

од каде со уште една примена на синусната теорема на триаголникот ABC добиваме $\cos(\beta)=\frac{a}{a+c}$ ... (3).

Споредувајќи ги (2) и (3) имаме $2b^2=ac+c^2$. Од косинусна теорема за триаголникот ABC и (3) имаме:

$$c^2+a^2-b^2=2cacos(\beta)=\frac{2ca^2}{a+c}$$
$$(a+c)(c^2+a^2-b^2)=2ca^2,$$
$$(a+c)(c^2-ac+2a^2)=4ca^2,$$
$$2a^3-3a^2c+c^3=0,$$
$$(a-c)^2(2a+c)=0,$$

па мора $a=c$.
Од $2b^2=ac+c^2=2c^2$ следи и $b=c$, па конечно $a=b=c$.

4. Дадена е бесконечна низа $a_n, n \geq 1$, од природни броеви така што за $n \geq 1$, важи

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{\text{НЗД}(a_n, a_{n+1})}.$$

Најди ги сите можни вредности на a_1 и a_2 за кои постои природен број M, таков што $a_n < M$, за секој n.

Решение. Нека $d_n = \text{НЗД}(a_n, a_{n+1})$. Тогаш имаме $d_n a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ односно за $n \geq 2, d_{n-1} a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$. Од $d_n | a_n, d_n | a_{n+1}$ имаме дека мора $d_n | a_{n-1}$. Но, од ова заедно со $d_n | a_n$, следи дека $d_n | \text{НЗД}(a_n, a_{n-1}) = d_{n-1}$, па мора $d_n \leq d_{n-1}$. Последново повлекува дека низата d_n е нерастечка низа од природни броеви, што мора да значи дека после одреден индекс N, низата мора да е константна, $d_n = d$, за сите $n \geq N$.
Ако $d = 1$, за $n \geq N$, добиваме $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} > a_{n+1}$, односно низата е строго растечка (после одреден индекс), па не може да е ограничена, односно не постои број M кој е поголем од сите членови на низата.
Ако $d \geq 3$, за $n \geq N$, добиваме $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{d} < \frac{(a_n + a_{n+1})}{2} \leq \max(a_n, a_{n+1})$. Ова повлекува

$$a_{n+3} < \max(a_{n+2}, a_{n+1}) \leq \max(a_n, a_{n+1}).$$

односно

$$\max(a_{n+2}, a_{n+3}) < \max(a_n, a_{n+1}).$$

Последново не е можно бидејќи добиваме бесконечна строго опаѓачка низа од природни броеви, што не е можно.
Останува $d = 2$. Значи за $n \geq N$,

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{2},$$

т.е. ако дефинираме $b_{n+1} = a_{n+1} - a_n$, тогаш $b_{n+2} = -\frac{b_{n+1}}{2} = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-N+1} b_{N+1}$.
Очигледно за доволно големо n ова не е можно освен ако $b_{N+1} = 0$, т.е. $a_N = a_{N+1}$. Но, од НЗД $(a_N, a_{N+1}) = 2$, добиваме дека мора $a_N = a_{N+1} = 2$. Да го одредиме a_{N-1}. Имаме

$$2 = \frac{2 + a_{N-1}}{\text{НЗД}(2, a_{N-1})}.$$

Ако $\text{НЗД}(2, a_{N-1}) = 1, a_{N-1} = 0$. Значи $\text{НЗД}(2, a_{N-1}) = 2$, па $a_{N-1} = 2$. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека мора $a_1 = a_2 = 2$.