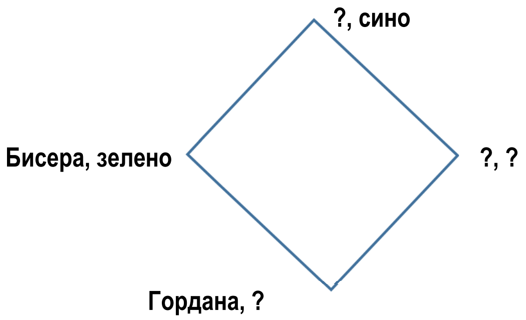
РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД
47-МИОТ РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2024
2.03.2024

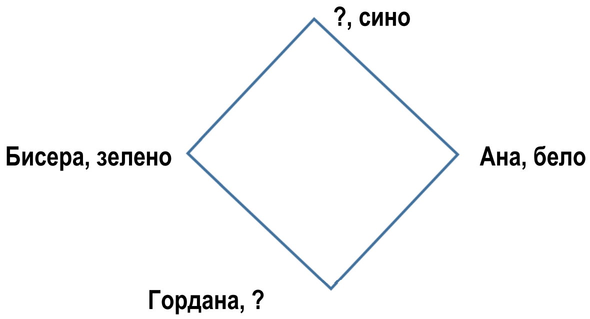
Прва година

1А. Во школскиот двор, застанати во круг, разговараат четири другарки: Ана, Бисера, Валентина и Гордана. Девојчето што носи зелено палто, која не е ниту Ана ниту Валентина, стои помеѓу девојчето што носи сино палто и Гордана. Девојчето што носи бело палто стои помеѓу девојчето што носи розово палто и Валентина. Одреди каква е бојата на палтото што го носи секое од девојчињата.

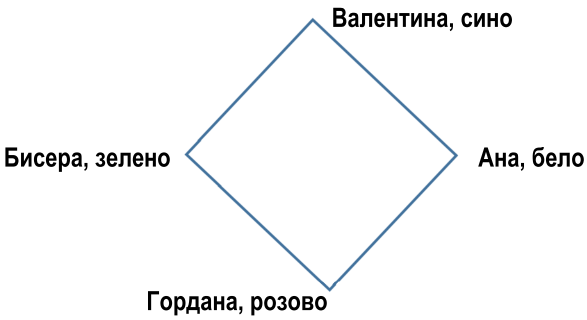
Решение. Според првиот услов, девојчето со зелено палто мора да биде Бисера, затоа што не е ниту Ана, ниту Валентина и стои до Гордана. **(5)** Исто така, од првиот услов заклучуваме дека Гордана не носи сино палто (слика 1). **(5)** Според вториот услов, девојчето со бело палто сигурно не стои до Бисера, затоа што Бисера не носи розово палто и Бисера не е Валентина, па значи мора да стои спроти неа и тоа мора да е Ана, затоа што Валентина не носи бело палто (слика 2). **(5)** Исто така, заклучуваме дека Валентина не носи розово палто. **(5)** Конечно, заклучуваме дека Валентина носи сино, а Гордана розово палто (слика 3). **(5)**



Слика 1.



Слика 2.



Слика 3.

Забелешка. Ако ученикот го погоди редоследот на девојчињата и бојата на палтото на секое девојче, а не докаже дека не постои друг логички оправдан распоред, добива само 10 поени.

1Б. Тројца браќа се родени еден по друг со иста разлика во годините. Кога се родил најмалиот брат, најстариот брат имал шест години помалку отколку што средниот брат има сега. Збирот на годините на најстариот и најмладиот брат е 36. Колку години има секој од браќата сега?

Решение. Нека средниот брат има x години и нека разликата во години ја означиме со a. Значи, браќата сега имаат: $x-a$, x и $x+a$ години соодветно. За збирот на годините на најмалиот и најстариот брат имаме: $x-a+x+a=36$, од каде следи $2x=36$, т.е. $x=18$. Значи средниот брат има 18 години. **(10)** Од друга страна, според воведените ознаки, кога се родил најмалиот брат, најстариот брат имал $2a$ години, **(5)** па од првиот услов се добива: $2a=x-6=18-6=12$, т.е. $a=6$. **(5)**
Конечно, следи дека најмладиот брат има $x-a=18-6=12$, а најстариот брат има $x+a=18+6=24$ години. **(5)**

2АБ. Десет цели броеви, од кои два се еднакви меѓу себе, го исполнуваат условот: кога девет од нив ќе се соберат, можни се следните различни збирови: 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93 и 94. Најди го бројот кој што се повторува двапати.

Решение. (Сигма 130, Задачи од училницата, Прва година, задача 1) Нека десетте броеви се $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{10}$ во неопаѓачки редослед и нека нивниот збир е $S = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{10}$. Можни се десет збирови од по 9 собироци и тоа

$(S-n_1)$, $(S-n_2)$, $(S-n_3)$, ..., $(S-n_{10})$. **(5)** Бидејќи два од броевите се еднакви, и два од збировите се еднакви. Да го означиме со x збирот што се појавува двапати. Тогаш

$$86+87+88+...+94+x=(S-n_1)+(S-n_2)+(S-n_3)+...+(S-n_{10}).\ \textbf{(5)}$$

Последново ни ја дава равенката $810+x=10\cdot S-(n_1+n_2+n_3+...+n_{10})$, односно $x=9\cdot(S-90)$. **(5)** Оттука, x е број делив со 9, кој истовремено е и меѓу дадените збирови, односно $86\leq x\leq 94$. Следува дека $x=90$. **(5)** Збирот на сите броеви е $S=100$. Бројот што се појавува двапати е бројот $n_i=S-x=100-90=10$, за точно два $i\in\{1,2,3,...,10\}$. **(5)**

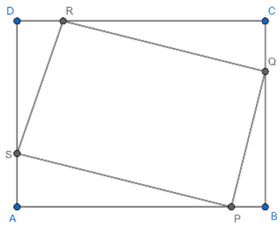
3АБ. Познато е дека $0\leq a-b\leq 1$ и $1\leq a+b\leq 4$. Пресметај ја вредноста на изразот $2023\cdot a+2022\cdot b$, во случајот кога вредноста на бројот $a-2b$ е најголема.

Решение. (Сигма 129, Задачи од училница, Прва година, задача 2) Потребно е да го изразиме $a-2b$ преку $a-b$ и $a+b$. Бидејќи $a=\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(a+b)$ и $-2b=(a-b)-(a+b)$, следува дека

$$a-2b=\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(a-b)+(a-b)-(a+b)=\frac{3}{2}(a-b)-\frac{1}{2}(a+b).\ \textbf{(10)}$$

Од условите, најголемата вредност за $a-2b$ се добива за најголемата вредност на $a-b$ и најмалата вредност на $a+b$, односно за $a-b=1$ и $a+b=1$. **(5)** Со решавање на системот равенки $\begin{cases}a-b=1\\a+b=1\end{cases}$ добиваме дека $a=1$ и $b=0$. **(5)** Тогаш, вредноста на изразот е $2023\cdot a+2022\cdot b=2023\cdot 1+2022\cdot 0=2023$. **(5)**

4А. Во правоаголник со страни 3 cm и 4 cm впишан е друг правоаголник чии страни се во однос $1:3$. Одреди ги периметарот и плоштината на впишаниот правоаголник.

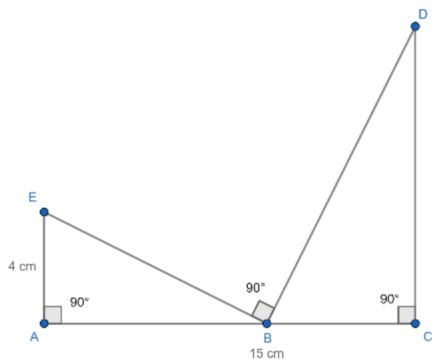


Решение. Нека дадениот правоаголник го означиме со $ABCD$, притоа $\overline{AD}=3\text{cm}$ и $\overline{AB}=4\text{cm}$, а впишаниот правоаголник го означиме со $PQRS$ (види цртеж). Нека $\overline{PQ}:\overline{SP}=1:3$, па ако означиме $\overline{PQ}=x$, тогаш $\overline{SP}=3\overline{PQ}=3x$. Забележуваме дека $\Delta PBQ\cong\Delta RDS$ (соодветните агли им се еднакви како агли со заемно паралелни краци и $\overline{PQ}=\overline{RS}$ од тоа што $PQRS$ е правоаголник). Нека $\overline{PB}=\overline{RD}=a$ и $\overline{BQ}=\overline{DS}=b$. **(5)** Исто така, $\Delta SAP\sim\Delta PBQ$ (соодветните агли им се еднакви како агли со заемно нормални краци), па следи $\overline{PB}:\overline{SA}=\overline{BQ}:\overline{AP}=\overline{PQ}:\overline{SP}=1:3$, односно $\overline{AP}=3\overline{BQ}=3b$ и $\overline{SA}=3\overline{PB}=3a$. **(5)** Тогаш, $\begin{cases}\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}\\\overline{AD}=\overline{SA}+\overline{DS}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4=3b+a\\3=3a+b\end{cases}$, од каде се добиваат решенија $a=\frac{5}{8}\text{cm}$ и $b=\frac{9}{8}\text{cm}$. **(5)** Со примена на Питагоровата теорема имаме $\overline{PQ}^2=\overline{PB}^2+\overline{BQ}^2$, па добиваме $x^2=a^2+b^2=\frac{25}{64}+\frac{81}{64}=\frac{106}{64}$, односно $x=\frac{\sqrt{106}}{8}\text{cm}$.**(5)**

Сега, за впишаниот правоаголник имаме:

плоштина $P=x\cdot 3x=3x^2=3\cdot\frac{106}{64}=\frac{159}{32}\text{cm}^2$ и периметар $L=2(x+3x)=8x=8\cdot\frac{\sqrt{106}}{8}=\sqrt{106}\,\text{cm}$. **(5)**

4Б. Нека е дадена отсечка AC и точки E и D кои лежат во иста полурамнина во однос на правата AC (на иста страна од правата AC), такви што отсечката EA е нормална на AC и отсечката DC е нормална на AC. Нека B е точка од отсечката AC таква што аголот EBD е прав агол и $\overline{EB}:\overline{BD}=1:3$. Ако $\overline{AE}=4$ cm, $\overline{AC}=15$ cm, пресметај ја должината на отсечката ED.



Решение. Нека $\overline{EB}=x$, тогаш од $\overline{EB}:\overline{BD}=1:3$ следи $\overline{BD}=3x$. Од друга страна, јасно $\measuredangle ABE+\measuredangle CBD=90^\circ$, а бидејќи ΔBAE е правоаголен важи $\measuredangle ABE+\measuredangle BEA=90^\circ$, заклучуваме дека $\measuredangle CBD=\measuredangle BEA$ (слично може да се покаже и дека $\measuredangle ABE=\measuredangle CDB$), од каде следи дека $\Delta BAE\sim\Delta DCB$. **(10)** Од сличноста се добива $\overline{BC}=3\overline{AE}=3\cdot 4=12\text{cm}$, па се добива дека $\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}=15-12=3\text{cm}$. **(5)** За хипотенузата на ΔBAE имаме: $\overline{BE}^2=\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=3^2+4^2=25$, па $\overline{BE}=5\text{cm}$, од каде $\overline{BD}=3\overline{EB}=15\text{cm}$. **(5)** Бидејќи ΔDBE е правоаголен со хипотенуза ED, следи: $\overline{ED}^2=\overline{BE}^2+\overline{BD}^2=5^2+15^2=250$, од каде $\overline{ED}=\sqrt{250}=5\sqrt{10}\,\text{cm}$. **(5)**

Втора година

1А. Производот $\left(\frac{1+1}{1^2+1}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2+1}{2^2+1}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3+1}{3^2+1}+\frac{1}{4}\right)\dots\cdot\left(\frac{2024+1}{2024^2+1}+\frac{1}{4}\right)$, може да се запише во облик $\frac{q}{2^r\cdot s}$, каде што r,q,s се природни броеви, при што q и s се заемно прости. Одреди ја вредноста на s .

Решение. Да забележиме дека секој член од дадениот производ може да се трансформира на следниот начин: $\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{1}{4}=\frac{4(n+1)+n^2+1}{4(n^2+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(n+2)^2+1}{(n^2+1)}$. **(10)**

Ако сите членови на производот ги запишеме во овој облик ќе имаме:

$$\left(\frac{1+1}{1^2+1}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2+1}{2^2+1}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3+1}{3^2+1}+\frac{1}{4}\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{2024+1}{2024^2+1}+\frac{1}{4}\right)=$$

$$\frac{1}{4^{2024}}\cdot\frac{(1+2)^2+1}{1^2+1}\cdot\frac{(2+2)^2+1}{2^2+1}\cdot\frac{(3+2)^2+1}{3^2+1}\cdot\dots\cdot\frac{(2022+2)^2+1}{2022^2+1}\cdot\frac{(2023+2)^2+1}{2023^2+1}\cdot\frac{(2024+2)^2+1}{2024^2+1}=$$

$$\frac{1}{4^{2024}}\cdot\frac{3^2+1}{1^2+1}\cdot\frac{4^2+1}{2^2+1}\cdot\frac{5^2+1}{3^2+1}\cdot\dots\cdot\frac{2024^2+1}{2022^2+1}\cdot\frac{2025^2+1}{2023^2+1}\cdot\frac{2026^2+1}{2024^2+1}=$$

$$\frac{1}{4^{2024}}\cdot\frac{(2025^2+1)\cdot(2026^2+1)}{(1^2+1)\cdot(2^2+1)}=\frac{(2025^2+1)\cdot(2026^2+1)}{2^{4049}\cdot 5}.\ \textbf{(10)}$$

Да означиме $q=(2025^2+1)\cdot(2026^2+1), r=4049, s=5$ и да забележуваме дека производот го има бараниот облик затоа што дека ниту еден од броевите 2025^2+1 и 2026^2+1 не е делив со 5 (првиот завршува на цифрата 6 а вториот на цифрата 7, значи q и s се заемно прости), па следува дека мора $s=5$. **(5)**

1Б. Определи ги вредностите на реалниот параметар m за кои системот равенки $\begin{cases}2x-3y=m\\ x+4y=m-1\end{cases}$ има решение (x,y), кое го задоволува системот неравенки $\begin{cases}3x+y<0\\ 2y-x<0\end{cases}$.

Решение. Користејќи метод на спротивни коефициенти, дадениот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases}2x-3y=m\\ 2x+8y=2m-2\end{cases}$ и оттука $y=\frac{m-2}{11}$. Со замена добиваме дека $x=m-1-4\frac{m-2}{11}=\frac{7m-3}{11}$ **(10)**.

Заменуваме во системот неравенки и имаме $\begin{cases}3\frac{7m-3}{11}+\frac{m-2}{11}<0\\ 2\frac{m-2}{11}-\frac{7m-3}{11}<0\end{cases}$, што по средувањето ни го дава еквивалентниот систем неравенки $\begin{cases}22m-11<0\\ -5m-1<0\end{cases}$, од каде пак $\begin{cases}m<\frac{1}{2}\\ m>-\frac{1}{5}\end{cases}$ **(12)**. Јасно, бараните вредности се $-\frac{1}{5}<m<\frac{1}{2}$ **(3)**.

2АБ. (**Сигма 126, Решенија од Рубрика задачи, задача 1688**) Нека p и q се прости броеви за кои p^2+pq+q^2 е квадрат на природен број. Докажи дека бројот p^2-pq+q^2 е прост број.

Решение. Од условот на задачата имаме дека $p^2+pq+q^2=n^2$, каде n е природен број. Трансформираме до $(p+q)^2-n^2=pq$ односно $(p+q-n)(p+q+n)=pq$ **(3)**. Значи, го имаме равенството $p+q-n=\frac{pq}{p+q+n}$. Од тоа што левата страна во последното равенство е природен број и од $p+q+n>p$, $p+q+n>q$ ($p+q+n\nmid p$, $p+q+n\nmid q$) следува дека $\begin{cases}p+q+n=pq\\ p+q-n=1\end{cases}$ **(10)**. Со собирање на двете равенства ја добиваме равенката $2p+2q=pq+1$ која е еквивалентна со равенката $(p-2)(q-2)=3$ **(3)**. На тој начин ги добиваме системите $\begin{cases}p-2=1\\ q-2=3\end{cases}$

или $\begin{cases} p-2=3 \\ q-2=1 \end{cases}$, од каде се добива дека $\begin{cases} p=3 \\ q=5 \end{cases}$ или $\begin{cases} p=5 \\ q=3 \end{cases}$ **(6)**. Во двата случаи бројната вредност на изразот p^2-pq+q^2 е 19 и е прост број **(3)**.

3АБ. (**Сигма 129, Рубрика задачи, задача 1748**) Ако квадратните равенки $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ имаат точно еден заеднички реален корен, тогаш одреди ја вредноста на изразот $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$.

Решение. Од условот на задачите имаме дека коефициентите a,b и c се различни од нула. Да забележиме дека нулата не е заеднички корен на квадратните равенки. Нека x_0 е заедничкиот корен на дадените квадратни равенки. Така добиваме дека $ax_0{}^2+bx_0+c=0$, $bx_0{}^2+cx_0+a=0$, $cx_0{}^2+ax_0+b=0$. Со множење на првото равенство со b, а на второто равенство со a и одземање на истите добиваме $abx_0{}^2+b^2x_0+bc-abx_0{}^2-acx_0-a^2=0$. На тој начин имаме дека $(b^2-ac)x_0=a^2-bc$ .....(1).

Аналогно ги добиваме равенствата $(c^2-ab)x_0=b^2-ac$ .....(2) и $(a^2-bc)x_0=c^2-ab$ .....(3) **(5)**.

Со множење на равенствата (1), (2) и (3) добиваме $(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)x_0{}^3=(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)$ **(3)**.

Ги разгледуваме следните два случаи:

1) Нека $(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)\neq 0$. Тогаш $x_0{}^3=1$, односно $x_0=1$ **(2)**. Така добивме дека заедничкиот корен е 1, па со замена во равенствата (1), (2) и (3) имаме $b^2-ac=a^2-bc$, $c^2-ab=b^2-ac$ и $a^2-bc=c^2-ab$, односно $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab=k$ **(3)**. Да забележиме дека од заедничкиот корен $x_0=1$ имаме дека $a+b+c=0$ **(2)**. Значи,

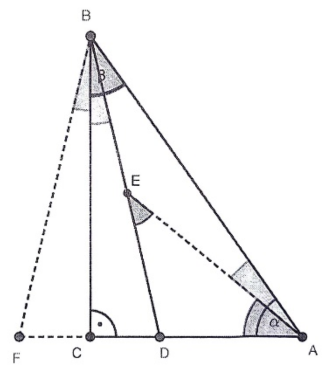
$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^2}{bc}-1+\frac{b^2}{ca}-1+\frac{c^2}{ab}-1+3=\frac{a^2-bc}{bc}+\frac{b^2-ca}{ca}+\frac{c^2-ab}{ab}+3=\frac{k}{bc}+\frac{k}{ca}+\frac{k}{ab}+3=$$

$$=k\cdot\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)+3=k\cdot\frac{a+b+c}{abc}+3=k\cdot\frac{0}{abc}+3=3 \text{ (3)}.$$

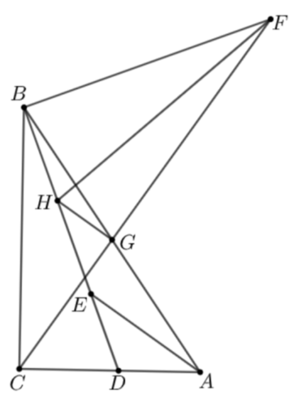
2) Нека $(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)=0$. Тогаш еден од множителите е нула па од равенствата (1), (2) и (3) добиваме дека сите три множители се еднакви на нула, односно $a^2-bc=0$, $b^2-ac=0$ и $c^2-ab=0$ **(4)**. Значи, имаме дека $a^2=bc$, $b^2=ac$ и $c^2=ab$, па на тој начин добиваме дека $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{bc}{bc}+\frac{ac}{ca}+\frac{ab}{ab}=1+1+1=3$ **(3)**.

4АБ. Нека ABC е триаголник со прав агол во темето C. Нека D е точка на катетата AC и E е точка на отсечката BD таква што $\measuredangle ABC=\measuredangle DAE=\measuredangle AED$. Докажи дека $\overline{BE}=2\cdot\overline{CD}$.

Решение Б. Нека $\measuredangle ABC=\beta, \measuredangle BAC=\alpha.$ Од условот на задачата, ΔAED е рамнокрак ($\measuredangle DAE=\measuredangle AED=\beta$) па $\overline{AD}=\overline{DE}.$ Да забележиме дека $\measuredangle BAE=\alpha-\beta.$ $\measuredangle BDC=2\beta$ (надворешниот агол е збир на несоседните внатрешни агли).Сега, $\measuredangle CBD=90^o-2\beta=\alpha+\beta-2\beta=\alpha-\beta.$ и $\measuredangle BAE=\measuredangle CBD.$ **(10)** Нека F е точка од правата AC, симетрична на D во однос на $C.$ Добиваме рамнокрак триаголник FDB кај кој важи $\overline{FD}=2\cdot\overline{CD}.$ **(5)** Јасно, $\measuredangle FCD=\measuredangle CBD=\alpha-\beta$, а $\measuredangle FBA=\alpha-\beta+\beta=\alpha$. Добиваме дека и ΔFBA е рамнокрак и $\overline{FB}=\overline{DB}=\overline{FA}.$ **(5)** Така, $\overline{BE}+\overline{ED}=\overline{FD}+\overline{DA}$, од каде заради $\overline{AD}=\overline{DE}$ важи $\overline{BE}=\overline{FD}$. Конечно, $\overline{BE}=\overline{FD}=2\cdot\overline{CD}.$ **(5)**



Решение А. Нека $\measuredangle CAB=\alpha, \measuredangle ABC=\beta$, јасно $\alpha+\beta=90°$. Нека FB е отсечка нормална на BD и нека $\overline{BF}=\overline{BC}$ **(5)**.



Нека G е пресечната точна на FC и на $AB.$ Тогаш триаголникот FBC е рамнокрак со агол меѓу краците FBC за кој важи $\measuredangle FBC=\measuredangle FBD+\measuredangle DBC=$

$$=90°+90°-\measuredangle BDC=180°-\measuredangle EDC=\measuredangle ADE=180°-2\beta \text{ (4)}.$$

Затоа, $\measuredangle BFC=\measuredangle BCF=\beta$. Тогаш триаголникот GBC е рамнокрак и $\overline{GB}=\overline{GC}.$ И ΔAGC е исто така рамнокрак ($\measuredangle CAG=\measuredangle ACG=\alpha$), па следува $\overline{GA}=\overline{GC}$. Сега $\overline{GB}=\overline{GC}=\overline{GA}$, па јасно G е центарот на опишаната кружница околу правоаголниот триаголник ABC **(4).** Нека права низ G, паралелна со AE ја сече BD во точка H. Тогаш, отсечката HG е средна линија на триаголникот ABE, па затоа H е средина на отсечката BE **(4)**. Бидејќи,

$$\measuredangle HGC=\measuredangle BGC-\measuredangle BGH=180°-2\beta-\measuredangle BAE=$$

$$=180°-2\beta-(\alpha-\beta)=180°-\beta-\alpha=90°,$$

четириаголникот $FBHG$ е тетивен и $\measuredangle BFH=\measuredangle BGH=\alpha-\beta=90^\circ-2\beta$ **(4)**.
Тогаш за триаголниците BCD и FBH важи $\overline{BC}=\overline{BF}$, $\measuredangle BCD=\measuredangle FBH=90^\circ$ и $\measuredangle CBD=\measuredangle BFH=90^\circ-2\beta$, па тие се складни и важи $\overline{CD}=\overline{BH}$, а бидејќи H е средина на отсечката BE, следува $\overline{CD}=\frac{\overline{BE}}{2}$, односно $\overline{BE}=2\cdot\overline{CD}$ **(4)**.

Трета година

1АБ. (Сигма 127, Рубрика задачи, Задача 1718) Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви поголеми од 1. Одреди ја најмалата можна вредност на изразот $\log_a\left(ab^2\right)+\log_b\left(b^2c^3\right)+\log_c\left(c^5d^6\right)+\log_d\left(d^{35}a^{36}\right)$.

Решение. Од тоа што $a,b,c,d>1$, имаме дека $\log_d a>\log_d 1$, $\log_a b>\log_a 1$, $\log_b c>\log_b 1$, $\log_c d>\log_c 1$, односно $\log_d a>0$, $\log_a b>0$, $\log_b c>0$ и $\log_c d>0$. **(3 поени)**
Нека $S=\log_a\left(ab^2\right)+\log_b\left(b^2c^3\right)+\log_c\left(c^5d^6\right)+\log_d\left(d^{35}a^{36}\right)$, тогаш имаме

$S=\log_a a+2\log_a b+2\log_b b+3\log_b c+5\log_c c+6\log_c d+35\log_d d+36\log_d a$ **(3 поени)**

$S=1+2\log_a b+2+3\log_b c+5+6\log_c d+35+36\log_d a$ **(3 поени)**

$S=43+2\log_a b+3\log_b c+6\log_c d+36\log_d a$. **(1 поен)**

Користејќи го неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина на четири позитивни броеви имаме:

$S\geq 43+4\cdot\sqrt[4]{2\log_a b\cdot 3\log_b c\cdot 6\log_c d\cdot 36\log_d a}$, **(5 поени)**

односно $S\geq 43+4\cdot\sqrt[4]{6^4\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d a}$. **(1 поен)**

Сега, од равенството $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d a=1$ следува дека $S\geq 67$. **(5 поени)**
Значи, најмалата можна вредност на изразот $\log_a\left(ab^2\right)+\log_b\left(b^2c^3\right)+\log_c\left(c^5d^6\right)+\log_d\left(d^{35}a^{36}\right)$ е 67. **(4 поени)**

2А. Најди ги сите вредности на аголот α за кои множествата $S=\{\sin\alpha,\sin 2\alpha,\sin 3\alpha\}$ и $C=\{\cos\alpha,\cos 2\alpha,\cos 3\alpha\}$ се еднакви.

Решение. Нека $S=C$. Тогаш $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$. **(6 поени)**
Користејќи дека $\sin\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha$ и $\cos\alpha+\cos 3\alpha=2\cos 2\alpha\cos\alpha$ добиваме дека

$$\begin{gathered}\sin 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos\alpha=\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\sin 2\alpha(1+2\cos\alpha)=\cos 2\alpha(1+2\cos\alpha)\end{gathered}.$$ **(5 поени)**

Ако $1+2\cos\alpha=0$, тогаш $\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. За овие вредности на α, $\sin 3\alpha=0$. Но, за овие вредности на α, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos 2\alpha\neq 0$ и $\cos 3\alpha\neq 0$. Значи, $0\in S$, но $0\notin C$, па $S\neq C$. **(6 поени)**
Ако $1+2\cos\alpha\neq 0$, тогаш $\sin 2\alpha=\cos 2\alpha$. Оттука, $tg2\alpha=1$, односно $\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Бидејќи $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$, следува $\sin\frac{\pi}{8}=\cos\frac{3\pi}{8}$, $\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{2\pi}{8}=\cos\frac{2\pi}{8}$, односно $S=C$. **(6 поени)**

Според тоа, бараното множество вредности за α е $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$. **(2 поени)**

2Б. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\begin{gathered}\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(1^\circ\right)\mathrm{tg}\left(89^\circ\right)+2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(2^\circ\right)\mathrm{tg}\left(88^\circ\right)+3\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(3^\circ\right)\mathrm{tg}\left(87^\circ\right)+\\ +4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(4^\circ\right)\mathrm{tg}\left(86^\circ\right)+...+49\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(49^\circ\right)\mathrm{tg}\left(41^\circ\right)+50\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(50^\circ\right)\mathrm{tg}\left(40^\circ\right).\end{gathered}$$

Решение. Нека

$$\begin{gathered}S=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(1^\circ\right)\mathrm{tg}\left(89^\circ\right)+2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(2^\circ\right)\mathrm{tg}\left(88^\circ\right)+3\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(3^\circ\right)\mathrm{tg}\left(87^\circ\right)+\\ +4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(4^\circ\right)\mathrm{tg}\left(86^\circ\right)+...+49\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(49^\circ\right)\mathrm{tg}\left(41^\circ\right)+50\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(50^\circ\right)\mathrm{tg}\left(40^\circ\right)\end{gathered}$$

Користејќи дека $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{ctg}\left(90^\circ-\alpha\right)$, добиваме дека

$$\begin{gathered}S=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(1^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(90^\circ-89^\circ\right)+2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(2^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(90^\circ-88^\circ\right)+3\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(3^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(90^\circ-87^\circ\right)+\\ +4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(4^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(90^\circ-86^\circ\right)+...+49\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(49^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(90^\circ-41^\circ\right)+50\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(50^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(90^\circ-40^\circ\right)=\\ =\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(1^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(1^\circ\right)+2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(2^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(2^\circ\right)+3\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(3^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(3^\circ\right)+\\ +4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(4^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(4^\circ\right)+...+49\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(49^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(49^\circ\right)+50\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(50^\circ\right)\mathrm{ctg}\left(50^\circ\right).\end{gathered}$$ **(10 поени)**

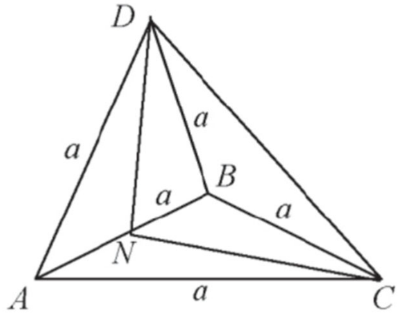
Сега, користејќи дека $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$, од последното следува дека

$$S=\sqrt{2}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+...+49\sqrt{2}+50\sqrt{3}=\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}+...+49\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}+...+50\sqrt{3}=$$ **(10поени)**

$$=(1+3+5+...+49)\sqrt{2}+2\sqrt{3}(1+2+...+25)=625\sqrt{2}+650\sqrt{3}.$$ **(5 поени)**

3АБ. (Сигма 129, Рубрика задачи, Задача 1755) Две страни на тристрана пирамида се рамнострани триаголници со должина на страна a. Рамнините на овие триаголници се нормални меѓу себе. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.

Решение. Нека е дадена тристраната пирамида $ABCD$, каде страните ABC и ABD се рамнострани триаголници со страна a, односно $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{BD}=a$. Нека CN и DN се висини на триаголниците ABC и ABD, соодветно, кон заедничката страна AB, значи CN е нормална на AB и DN е нормална на AB. Од условот на задачата имаме дека и CN е нормална на DN. **(5 поени)**



Ако земеме еден од рамностраните триаголници за основа на пирамидата, на пример триаголникот ABC, тогаш висината на пирамидата ќе биде DN, па волуменот на пирамидата е $V=\frac{1}{3}P_{\Delta ABC}\cdot\overline{DN}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{8}$. **(5 поени)**

Триаголникот CND е рамнокрак правоаголен триаголник со прав агол при темето N и $\overline{CN}=\overline{DN}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогаш,

$$\overline{CD}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$ **(5 поени)**

Триаголниците CDA и CDB се складни рамнокраки триаголници со основа $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ и крак a. Тогаш нивната плоштина е

$$P_{\Delta CDA}=P_{\Delta CDB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{10}}{4}=\frac{a^2\sqrt{15}}{8}.$$ **(5 поени)**

Конечно плоштината на пирамидата е $P=2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{a^2\sqrt{15}}{8}=\frac{a^2\sqrt{3}\left(2+\sqrt{5}\right)}{4}$. **(5 поени)**

4А. Определи ги сите реални вредности на параметарот a, за кои функцијата $f(x)=\left|x^2+2x+a\right|-2$ има четири различни реални нули.

Решение. Ги бараме решенијата на равенката $f(x)=0 \Leftrightarrow \left|x^2+2x+a\right|-2=0$. Од тоа што

$$\left|x^2+2x+a\right|=\begin{cases} x^2+2x+a, & x\in\left(-\infty,-1-\sqrt{1-a}\right]\cup\left[-1+\sqrt{1-a},+\infty\right) \\ -\left(x^2+2x+a\right), & x\in\left(-1-\sqrt{1-a},-1+\sqrt{1-a}\right)\end{cases},$$ **(8 поени)**

равенката ја сведуваме на определување на корените на квадратната равенка $x^2+2x+a=2$ на интервалот $\left(-\infty,-1-\sqrt{1-a}\right]\cup\left[-1+\sqrt{1-a},+\infty\right)$ и решенијата на квадратната равенка $-\left(x^2+2x+a\right)=2$ на интервалот $\left(-1-\sqrt{1-a},-1+\sqrt{1-a}\right)$. **(2 поени)**

Од условот на задачата, функцијата да има четири реални и различни нули, треба дадените две равенки да имаат реални и различни корени. Нека D_1 е дискриминантата на равенката $x^2+2x+a-2=0$ и D_2 е дискриминантата на равенката $x^2+2x+a+2=0$. Неопходно е $D_1>0$ и $D_2>0$, каде го добиваме системот

$$\begin{cases}D_1>0\\D_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-4(a-2)>0\\4-4(a+2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4>4(a-2)\\4>4(a+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>a-2\\1>a+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<3\\a<-1\end{cases}.$$

Следува дека корените на равенките се реални и различни за $a\in(-\infty,-1)$. **(8 поени)**

Да провериме дали се во соодветните интервали добиените решенија.

За корените на квадратната равенка $x^2+2x+a=2$, односно $x^2+2x+a-2=0$ имаме дека $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(a-2)}}{2}=-1\pm\sqrt{3-a}$, односно $x_1=-1-\sqrt{3-a}$ и $x_2=-1+\sqrt{3-a}$. Јасно, $x_1\in\left(-\infty,-1-\sqrt{1-a}\right]$ и $x_2\in\left[-1+\sqrt{1-a},+\infty\right)$, па тие се навистина нејзини корени. **(4 поени)**

За решенијата на квадратната равенка $x^2+2x+a+2=0$, имаме дека $x_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(a+2)}}{2}=-1\pm\sqrt{-1-a}$, односно $x_3=-1-\sqrt{-1-a}$ и $x_4=-1+\sqrt{-1-a}$. Јасно, $x_3,x_4\in\left(-1-\sqrt{1-a},-1+\sqrt{1-a}\right)$, па тие се нејзини корени.

Според тоа, заклучуваме дека за $a\in(-\infty,-1)$, x_1,x_2,x_3,x_4 се реални и различни, од каде следува дека дадената функција има четири реални и различни нули за $a\in(-\infty,-1)$. **(3 поени)**

4Б. Нека a,b и c се реални броеви , такви што $a+b+c>0$ и $f(x)=ax^2+bx+c$ нема реални нули. Докажи дека $c>0$.

Решение. Бидејќи $f(x)$ нема реални нули, следува дека $f(x)>0$ за сите $x\in\mathbb{R}$ или $f(x)<0$ за сите $x\in\mathbb{R}$. **(5 поени)** Бидејќи $f(1)=a+b+c>0$, следува дека $f(x)>0$ за сите $x\in\mathbb{R}$. **(10 поени)** Тогаш и $f(0)>0$. **(5 поени)** Оттука добиваме $c=f(0)>0$. **(5 поени)**

Четврта година

1А.2Б. (Сигма 130, Рубрика задачи, 1769.) Нека $0<x<1$ и $\mathrm{a},\mathrm{b}>0$. Докажи дека $a^xb^{1-x}<a+b$.

Решение. Ќе го означиме неравенството $a^xb^{1-x}<a+b$ со ...(1). Да претпоставиме дека $b\leq a$. Ако го поделиме неравенството (1) со a, добиваме $\left(\frac{b}{a}\right)^{1-x}<1+\frac{b}{a}$, односно $\left(\frac{b}{a}\right)^{1-x}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\right)<1.$ ..... (2) **(7п)**

Бидејќи $0<\frac{b}{a}\leq 1$ и $0\leq 1-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}<1$, неравенството (2) е точно, а со тоа и еквивалентното неравенство (1), во случај кога $b\leq a$. **(5п)**

Нека $a<b$. Го делиме неравенството (1) со b и добиваме $\left(\frac{a}{b}\right)^{x}<1+\frac{a}{b}$. **(5п.)**

Нека $y=1-x$. Тогаш $0<y<1$ и последното неравенство го добива видот $\left(\frac{a}{b}\right)^{1-y}<1+\frac{a}{b}$, каде $a<b$, за кое веќе докажавме дека е точно. **(8п)**

1Б. (Сигма 130, Рубрика задачи, 1768.) Во рамнина се дадени n прави такви што секои две прави се сечат и никои три немаат заедничка точка (прави во општа положба). На колку делови овие прави ја делат рамнината?

Решение. Нека x_n е бројот на делови на кои n-те прави ја делат рамнината. Тогаш важат следниве равенства $x_1=2$, $x_{n+1}=x_n+n$, за $n\geq 2$. **(8п)** Навистина, нека $p_1,p_2,...,p_{n-1},p_n$ се прави во рамнината за кои важат условите на задачата. Правите $p_1,p_2,...,p_{n-1}$ ја делат рамнината на x_{n-1} делови и ја сечат правата p_n во $n-1$ точка. Овие $n-1$ точка ја делат правата p_n на n делови, а секој од нив дели еден од претходно воочените делови на рамнината на два нови дела. Затоа со додавање на правата p_n, бројот на делови во рамнината се зголемува за n. **(10п)**

Конечно, ако ги искористиме рекурзивните равенства $x_k=x_{k-1}+k,\ k=2,3,...,n$ добиваме

$$x_n=x_{n-1}+n=x_{n-2}+(n-1)+n=....=x_1+2+3+...+n=$$
$$=2+2+3+4+...+n=1+(1+2+...+n)=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}.$$ **(7п)**

2А. Дадена е низа $(x_n)_{n\geq1}$ од реални броеви, дефинирана на следниов начин: $x_1=1,\ x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$, за секое n. Докажи дека $x_{2024}^2+x_{2024}<1$.

Решение. Ќе покажеме со помош на математичка индукција дека $x_{2k}^2+x_{2k}<1$, за сите природни броеви k.

За $k=1,$ имаме $x_2=\frac{1}{2},\ x_2^2+x_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}<1$. **(5п)**

Нека $x_{2k}^2+x_{2k}<1$, односно $x_{2k}^2+x_{2k}-1<0$. Сега имаме:

$$x_{2(k+1)}=\frac{1}{1+x_{2k+1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_{2k}}}=\frac{1+x_{2k}}{2+x_{2k}}.\ (\mathbf{10}\text{п})$$

Оттука,

$$x_{2(k+1)}^2+x_{2(k+1)}=x_{2(k+1)}\left(1+x_{2(k+1)}\right)=\frac{1+x_{2k}}{2+x_{2k}}\cdot\frac{3+2x_{2k}}{2+x_{2k}}=$$
$$=1+\frac{x_{2k}^2+x_{2k}-1}{(x_{2k}+2)^2}<1.$$

Последново следи од тоа што вториот собирок е негативен број, согласно индуктивната претпоставка.
Специјално за $k = 1012$, следи заклучокот**. (10п)**

3А. (Сигма 129, Рубрика задачи, 1753) Во рамнокрак триаголник *АВС*, $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$. За која вредност на аголот $\gamma = \measuredangle ACB$, изразот $g = \dfrac{\overline{AB}^2 + 2}{P_{\Delta ABC}}$ достигнува најмала вредност?

Решение. Од косинусната теорема имаме $\overline{AB}^2 = 2 - 2cos\gamma$, а за плоштината на триаголникот важи $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot sin\gamma$. Тогаш добиваме:

$$g(\gamma) = \frac{2(4 - 2cos\gamma)}{sin\gamma} = \frac{4(2 - cos\gamma)}{sin\gamma}\ .(\mathbf{5п})$$

Ќе воведеме смена $x = tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, со помош на која $sin\gamma = \frac{2x}{1+x^2}$ и $cos\gamma = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, од каде $g = g(x) = \frac{2(1+3x^2)}{x}\ .(\mathbf{5п})$
Имајќи предвид дека $\gamma \in (0, \pi)$, односно $\frac{\gamma}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, јасно е дека $x > 0$ и истовремено и $g > 0$. Ќе ја одредиме најмалата вредност која ја достигнува функцијата *g* (*x*), $x \in (0, \infty)$. Нека $g_{min} = y$. Ќе определиме за која вредност на x истата се достигнува. Ја решаваме равенката

$$y = g(x) = \frac{2(1 + 3x^2)}{x},$$

односно $6x^2 - yx + 2 = 0$. **(5п)**
Равенката треба да има реални корени, па потребно е дискриминантата $D \geq 0$. Тогаш $y^2 - 48 \geq 0 \iff y \leq -4\sqrt{3}$ или $y \geq 4\sqrt{3}$. **(3п)** Бидејќи $g > 0$, го разгледуваме само случајот $y \geq 4\sqrt{3}$. Тогаш најмалата вредност која функцијата може да ја достигне е $y = 4\sqrt{3}$ и истата се достигнува кога $6x^2 - 4x\sqrt{3} + 2 = 0$, односно за $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Јасно, соодветниот агол на триаголникот е еднаков на $\gamma = \frac{\pi}{3}$. **(5п)** Бидејќи триаголникот е рамнокрак, добиваме дека тој е и рамностран. **(2п)**

3Б. Дали може броевите $2, \sqrt{6}$ и $\frac{9}{2}$ (сите три истовремено) да бидат членови (не мора последователни) на една
а) аритметичка прогресија?
б) геометриска прогресија?

Решение. а) Да претпоставиме дека членовите можат (во некој редослед) да бидат дел од аритметичка прогресија со разлика d и почетен член a_1. Тогаш, постојат цели броеви s_1, s_2, s_3, за кои важи: $2 = a_1 + s_1 d$, $\sqrt{6} = a_1 + s_2 d$, $\frac{9}{2} = a_1 + s_3 d$. **(7п).** Одземајќи го првото од второто равенство добиваме $\sqrt{6} - 2 = (s_2 - s_1)d$.
Левата страна на равенството е ирационален број, па мора да биде и десната. Бидејќи $s_2 - s_1$ е цел број, следи дека d е ирационален**. (5п)** Но, одземајќи го првото од третото равенство имаме $\frac{5}{2} = (s_3 - s_1)d$, од каде со сличен аргумент добиваме дека d мора да биде рационален, што е контрадикција, па броевите не може да бидат дел од аритметичка прогресија. **(5п)**
б) Од друга страна, броевите можат да бидат дел од геометриска прогресија, на пример ако ставиме количникот на геометриската прогресија да е $\sqrt{\frac{3}{2}}$, имаме (почнувајќи од 2): $2, \sqrt{6}, 3, \sqrt{\frac{27}{2}}, \frac{9}{2}, \ldots$ **(8п).**

4А. Најди ги сите функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ за кои важи $2f(f(n)) = 5f(n) - 2n$, за сите цели броеви n.

Решение. Да забележиме дека $f(n) = 2n$ е решение на функционалната равенка **(5п).** Ако дефинираме функција $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, g(n) = f(n) - 2n$ (лесно се проверува дека е добро дефинирана) тогаш во почетната равенка добиваме (ставајќи , $f(n) = g(n) + 2n$):

$$5g(n) + 8n = 2\left(g(f(n)) + 2f(n)\right) = 2g(f(n)) + 4f(n) = 2g(f(n)) + 4g(n) + 8n,$$

односно

$$g(n) = 2g(f(n)) = 2g(g(n) + 2n) \ldots (*)$$

за секој цел број n **(10п).** Значи, 2 е делител на $g(n)$. Јасно, $g(n) + 2n$ е цел број, па применувајќи го последново за $n \coloneqq g(n) + 2n$, добиваме $g(g(n) + 2n) = 2g\big(g(g(n) + 2n) + 2(g(n) + 2n)\big)$,
И заменувајќи во (*) на десната страна, имаме и дека 4 го дели $g(n)$ за секое n. Продолжувајќи ја оваа постапка N пати добиваме дека мора и 2^N да го дели $g(n)$ за секое n. Но, од произволноста на N, ова повлекува дека мора $g(n) = 0$ за сите n. Конечно $f(n) = 2n$ е единствено решение на функционалната равенка **(10п).**

4Б. Колку петцифрени природни броеви кои имаат непарен број на непарни цифри постојат?
Решение. Бараните броеви може да имаат 1,3 или 5 непарни цифри. Доколку броевите имаат 5 непарни цифри, секоја од нив може да биде 1,3,5,7,9, вакви петоцифрени броеви вкупно имаме 5^5. **(5п)** Остануваат да ги изброиме броевите кои

имаат: 3 непарни,2 парни цифри и 1 непарна, 4 парни цифри. Да забележиме дека кога првата цифра е парна, таа не може да е 0. Така, во случајот на 2 парни и 3 непарни цифри разгледуваме два случаи:

i) Првата цифра е парна*:* имаме 4 можности за избор на првата цифра (2,4,6,8). Остануваат 4 места кои треба да се пополнат со 1 парна и 3 непарни цифри, и за секоја опција имаме по 5 избори (сега нулата може да се појавува како парна цифра). Избираме едно место за парната цифра на $\binom{4}{1}$ начини, и затоа вкупно добиваме $4 \cdot \binom{4}{1} \cdot 5^4$ вакви броеви. **(4п)**

ii) Првата цифра е непарна: избираме 2 места на $\binom{4}{2}$ начини за парните цифри и бидејќи имаме 5 избори за парни и непарни цифри, вакви броеви имаме вкупно $\binom{4}{2} \cdot 5^5$**. (4п)** Аналогно можеме да ги изброиме броевите кои имаат 4 парни и 1 непарна цифра.

Во првиот случај, кога првата цифра е парна, такви броеви имаме $4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5^4$, **(4п)** а кога првата цифра е непарна тогаш имаме 5^5 такви броеви. **(4п)**

Со ова добиваме дека вкупно барани петоцифрени броеви има

$$5^5 + 4 \cdot \binom{4}{1} \cdot 5^4 + \binom{4}{2} \cdot 5^5 + 4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5^4 + 5^5 = 45000.$$ **(4п)**