РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ОПШТИНСКИОТ НАТПРЕВАР ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2.02.2024

ПРВА ГОДИНА

1А. Дадена е линеарната функција $f(x)=(2a-3b)x+(a-2b)$, каде $a,b\in\mathbb{R}$. Ако важи $f(x-1)+f(2x+1)=3x+1$, одреди ја вредноста на a и b.

Решение. За изразот на левата страна на условот имаме:

$$f(x-1)+f(2x+1)=(2a-3b)(x-1)+(a-2b)+(2a-3b)(2x+1)+(a-2b)= \textbf{(5)}$$

$$=(6a-9b)x+(2a-4b), \textbf{(5)}$$

па следи дека $(6a-9b)x+(2a+4b)=3x+1$.

Полиномите се еднакви само ако коефициентот пред x и константниот член им се еднакви. Се добива систем од две линеарни равенки со две непознати, во облик:

$$\begin{cases}6a-9b=3\\2a-4b=1\end{cases}\textbf{(5)}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-3b=1\\2a-4b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-3b=1\\-2a+4b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-3b=1\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=1\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=0\end{cases}\textbf{(10 п).}$$

Функцијата има облик $f(x)=x+\frac{1}{2}$.

1Б. Пресметај ја вредноста на алгебарскиот израз $R(a,b,c)=\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}:\dfrac{\frac{a-b-c}{abc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$, за $a=1,5$, $b=0,25$ и $c=-3,75$.

Решение. I начин. Најнапред го средуваме алгебарскиот израз:

$$R(a,b,c)=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}:\frac{\frac{a-b-c}{abc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}:\frac{\frac{a-b-c}{abc}}{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}= \textbf{(5)}$$

$$=\frac{b+c-a}{b+c+a}:\frac{2(a-b-c)}{a(2bc+b^2+c^2-a^2)}=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cdot\frac{a(2bc+b^2+c^2-a^2)}{2(a-b-c)}= \textbf{(5)}$$

$$=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cdot\frac{a((b+c)^2-a^2)}{-2(b+c-a)}=\frac{1}{b+c+a}\cdot\frac{a(b+c-a)(b+c+a)}{-2}=-\frac{a(b+c-a)}{2}.\textbf{(10)}$$

Ако ги замениме дадените вредности за a, b и c, ќе ја добиеме вредноста на алгебарскиот израз:

$$R(1,5;0,25;-3,75)=-\frac{1,5\cdot(0,25+(-3,75)-1,5)}{2}=-\frac{1,5\cdot(-5)}{2}=\frac{7,5}{2}=3,75\ \text{...}\textbf{(5 п).}$$

II начин. Со директна замена за вредностите на a, b и c, ја добиваме вредноста на алгебарскиот израз:

$$R(1,5;0,25;-3,75)=\frac{\frac{1}{1,5}-\frac{1}{0,25+(-3,75)}}{\frac{1}{1,5}+\frac{1}{0,25+(-3,75)}}:\frac{\frac{1,5-0,25-(-3,75)}{1,5\cdot0,25\cdot(-3,75)}}{1+\frac{0,25^2+(-3,75)^2-1,5^2}{2\cdot0,25\cdot(-3,75)}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{15}{4}}}{\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{15}{4}}}:\frac{\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\frac{15}{4}}{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{4}}}{1+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{15}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{4}}}= \textbf{(5)}\ \frac{\frac{1}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{-\frac{14}{4}}}{\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{-\frac{14}{4}}}:\frac{\frac{\frac{6-1+15}{4}}{-\frac{45}{32}}}{1+\frac{\frac{1}{16}+\frac{225}{16}-\frac{9}{4}}{-\frac{30}{16}}}= \textbf{(5)}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{14}}{\frac{2}{3}-\frac{4}{14}}:\frac{-\frac{\frac{20}{4}}{\frac{45}{32}}}{1-\frac{\frac{190}{16}}{\frac{30}{16}}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{7}}{\frac{2}{3}-\frac{2}{7}}:\frac{-\frac{20\cdot32}{4\cdot45}}{1-\frac{190\cdot16}{16\cdot30}}=\textbf{(5)}\ \frac{\frac{20}{21}}{\frac{8}{21}}:\frac{-\frac{32}{9}}{1-\frac{19}{3}}=\frac{20\cdot21}{21\cdot8}:\frac{-\frac{32}{9}}{-\frac{16}{3}}=\textbf{(5)}$$

$$=\frac{5}{2}:\frac{32\cdot3}{9\cdot16}=\frac{5}{2}:\frac{2}{3}=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}=3,75.\textbf{(5)}$$

Забелешка: Првите 5 поени во II начин се добиваат за замена на вредностите во изразот и претворање на децималните броеви во дропки.

2АБ. (Сигма 130, Задачи од училницата, Прва година, задача 3)

Том и Џери учествуваат на трка. Бројот на тркачи што пристигнале на целта пред Том е еднаков со бројот на тркачи што пристигнале на целта после него. Бројот на тркачи што пристигнале на целта пред Џери е три пати поголем од бројот на тркачи што пристигнале на целта после него. Во конечното рангирање има точно 10 тркачи помеѓу Том и Џери. Сите тркачи ја завршиле трката и не постојат два тркачи кои истовремено пристигнале на целта. Колку вкупно тркачи учествувале во трката?

Решение. Нека n е бројот на тркачи. Бројот на тркачи што пристигнале на целта пред Том е еднаков на бројот на тркачи што пристигнале на целта после него и тој изнесува $\frac{1}{2}\cdot(n-1)$ ...**(5 п).** Бројот на тркачи што пристигнале на целта пред Џери е трипати поголем од бројот на тркачи што пристигнале на целта после него, па тој е еднаков на $3\cdot\frac{1}{4}\cdot(n-1)$ (после него пристигнале $\frac{1}{4}\cdot(n-1)$ од тркачите)...**(5 п)**. Од услов на задачата, во конечното рангирање помеѓу Том и Џери има 10 тркачи, па ја добиваме равенката $\frac{3}{4}\cdot(n-1)-\frac{1}{2}\cdot(n-1)-1=10$ ...**(10 п).**

Решението на оваа равенка е $\frac{1}{4}\cdot(n-1)=11$, т.е. $n=45$. Јасно, бројот на учесници на трката е 45... **(5 п).**

Забелешка. Искористивме дека помеѓу два природни броја a и b , $a<b$ има точно $b-1-(a-1)-1=b-a-1$ природни броеви.

3АБ. (Сигма 131, Задачи од училницата, Прва година, задача 3)

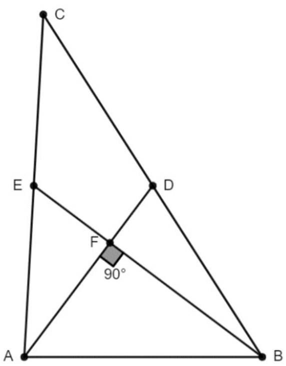
Докажи дека за секој реален број x важи $(x^2+1)^8-(x^2+1)^5\geq\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^4}$.

Решение. Ставаме смена $y=x^2+1$. За секој реален број x имаме дека $y=x^2+1>0$.**(5 п)** Тогаш, неравенството го добива обликот:

$y^8-y^5\geq\frac{1}{y}-\frac{1}{y^4}\ \Leftrightarrow\ y^{12}-y^9\geq y^3-1\ \Leftrightarrow\ y^{12}-y^9-y^3+1\geq0$ **(5 п)** $\Leftrightarrow\ y^9(y^3-1)-(y^3-1)\geq0\ \Leftrightarrow$ $(y^3-1)(y^9-1)\geq0$ **(5 п)** $\Leftrightarrow\ (y^3-1)(y^3-1)(y^6+y^3+1)\geq0\ \Leftrightarrow\ (y^3-1)^2(y^6+y^3+1)\geq0$ **(5 п)**.

Последното неравенство е точно затоа што $(y^3-1)^2\geq0$ како квадрат на реален број, а $y^6+y^3+1>0$ од тоа што $y>0.$ Заклучуваме дека даденото неравенство е точно за секој x реален број **(5 п)**.

4А. Во триаголникот ABC тежишната линија AD е нормална на тежишната линија BE. Ако $\overline{BC}=6$ и $\overline{AC}=8$, пресметај ја должината на страната AB .



Решение. Според условот на задачата, точката D е средина на страната BC, а точката E е средина на страната AC . Тогаш, $\overline{AE}=\overline{EC}=4$ и $\overline{BD}=\overline{DC}=3$. Нека тежишните линии се сечат во точката F , како на цртежот. F ги дели AD и BE во однос $2:1$, па ако $p=\overline{AD}$ и $q=\overline{BE}$, тогаш $\overline{AF}=\frac{2}{3}p, \overline{FD}=\frac{1}{3}p$ и $\overline{BF}=\frac{2}{3}q, \overline{FE}=\frac{1}{3}q$ **(5 п).** Според условот на задачата, $\Delta ABF, \Delta AEF$ и ΔBDF се правоаголни. Со примена на Питагоровата теорема редоследно во триаголниците се добива:

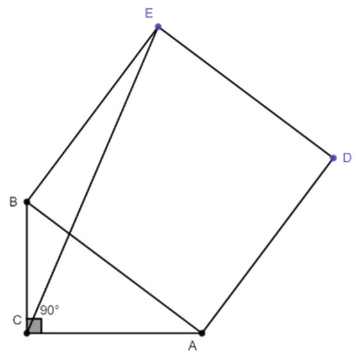
$$\overline{AB}^2=\left(\frac{2}{3}p\right)^2+\left(\frac{2}{3}q\right)^2=\frac{4}{9}\left(p^2+q^2\right),$$

$$16=\left(\frac{2}{3}p\right)^2+\left(\frac{1}{3}q\right)^2=\frac{4}{9}p^2+\frac{1}{9}q^2,$$

$$9=\left(\frac{1}{3}p\right)^2+\left(\frac{2}{3}q\right)^2=\frac{1}{9}p^2+\frac{4}{9}q^2. (\mathbf{10})$$

Со собирање на втората и третата равенка се добива: $25=\frac{5}{9}p^2+\frac{5}{9}q^2 \Leftrightarrow 45=p^2+q^2$ **(5 п),** па со замена во првата равенка $\overline{AB}^2=\frac{4}{9}\cdot 45=20 \Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$ Значи, должината на страната AB е $2\sqrt{5}$ **(5 п).**

4Б. На дадениот цртеж, триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во темето C, а четириаголникот $ADEB$ е квадрат. Ако $\overline{AC}=8$ и $\overline{BC}=6$, одреди ја должината на отсечката CE.

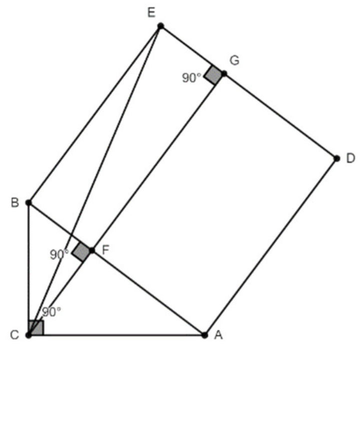


Решение.

Во триаголникот ABC спуштаме висина од темето C кон хипотенузата AB и ја продолжуваме до страната DE на квадратот. Пресекот на висината со хипотенузата го означуваме со F, а пресекот со DE го означуваме со G. Според Питагоровата теорема за триаголникот ABC, хипотенузата има должина $\overline{AB}=10$ **(5 п),** а за висината CF имаме дека $\overline{CF}=\frac{48}{10}=\frac{24}{5}=4,8$ (резултатот се добие преку пресметка на плоштината на триаголникот со помош на катетите од една и хипотенузата и висината спуштена кон неа од друга страна, или пак со помош на сличните триаголници AFC и CFB) **(5 п).**

За $\overline{FB}$ имаме:

$$\overline{FB}^2=\overline{BC}^2-\overline{CF}^2=36-\frac{576}{25}=\frac{324}{25} \Leftrightarrow \overline{FB}=\frac{18}{5}=3,6. \textbf{ (5 п)}$$



Сега, од една страна имаме $\overline{FG}=\overline{BE}=\overline{AB}=10$, па значи $\overline{CG}=\overline{CF}+\overline{FG}=\frac{24}{5}+10=\frac{74}{5}$; од друга страна пак $\overline{GE}=\overline{FB}=\frac{18}{5}$ **(5 п).**

ΔCGE е правоаголен триаголник и CE е негова хипотенуза.

Значи, $\overline{CE}^2=\overline{CG}^2+\overline{GE}^2=\left(\frac{74}{5}\right)^2+\left(\frac{18}{5}\right)^2=\frac{5800}{25}=232.$

Конечно, добиваме дека $\overline{CE}=\sqrt{232}=2\sqrt{58}$ **(5 п).**

ВТОРА ГОДИНА

1А. Определи го комплексниот број z, ако $\mathrm{Re}\dfrac{1}{2z-1}=1, \mathrm{Im}\dfrac{1}{2z-1}=-2$.

Решение. Од условите во задачата имаме $\dfrac{1}{2z-1}=1-2i$ **(5 п)**. Тогаш, $2z-1=\dfrac{1}{1-2i}$ т.е. $z=\dfrac{2-2i}{2-4i}$ **(8 п)**.

Значи $z=\dfrac{2-2i}{2-4i}=\dfrac{2-2i}{2-4i}\cdot\dfrac{2+4i}{2+4i}=\dfrac{4+8i-4i+8}{20}=\dfrac{12+4i}{20}=\dfrac{3}{5}+i\dfrac{1}{5}$ **(12 п)**.

1Б. Во зависност од реалниот параметар a реши ја линеарната равенка: $a^2(x-1)+a(x+2)=2x+1$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со $(a^2+a-2)x=a^2-2a+1$, односно со

$(a+2)(a-1)x=(a-1)^2$ **(7 п)**.

Тогаш:

1. Ако $a=-2$ равенката е еквивалентна со $0\cdot x=9$, па равенката нема решение **(6 п)**.
2. Ако $a=1$ равенката е еквивалентна со $0\cdot x=0$ и затоа решение е секој реален број x **(6 п)**.
3. Ако $a\neq-2,1$ тогаш делиме со $(a+2)(a-1)$ и $x=\dfrac{a-1}{a+2}$, е единствено решение на равенката **(6 п)**.

2АБ. (Сигма 126, Решенија на Задачи од училницата, задача 1)

Најди ги сите вредности на $m\in\mathbb{R}$ такви што за реалните решенија x_1,x_2 на равенката $x^2+(m-4)x+(m^2-3m+3)=0,$ важи релацијата $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=6$.

Решение. Да забележиме дека за равенката $x^2+(m-4)x+(m^2-3m+3)=0$ да има реални решенија, треба нејзината дискриминанта да биде позитивна, односно да важи

$$D=(m-4)^2-4(m^2-3m+3)=-3m^2+4m-4>0 \text{ (5 п)}.$$

Од условот на задачата $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=6$ следува $6=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ **(5 п)**.

Од Виетовите формули добиваме $6=(m-4)^2-2(m^2-3m+3)\Leftrightarrow m^2-2m-4=0$ **(5 п)**. Со решавање на последната квадратна равенка ги добиваме решенијата $m_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=-1\pm\sqrt{5}$ **(5 п)**, но од условот $D>0,$ единствено решение за m ќе биде $m=\sqrt{5}-1$ **(5 п)**.

3АБ. (Сигма 127, Рубрика задачи, задача 1717)

На страната AB на триаголникот ABC избрана е произволна точка D. Нека правата p повлечена низ точката *D*, паралелна со страната BC, ја сече страната AC во точка E. Нека правата q повлечена низ точката D паралелна со страната AC, ја сече страната BC во точка F. Докажи дека $P_{CEDF}=2\sqrt{P_{ADE}\cdot P_{DBF}}$.

Решение: Од сличноста на триаголниците ADE и DBF добиваме дека $\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{DF}:\overline{BF}$ односно $\overline{DE}\cdot\overline{DF}=\overline{AE}\cdot\overline{BF}$ ... (1) **(5 п)**. Нека h_1 и h_2 се висините спуштени од точката D во триаголниците ADE и DBF соодветно. Така, за паралелограмот $CEDF$ имаме $P_{CEDF}=\overline{CE}\cdot h_1=\overline{DF}\cdot h_1$...(2), односно $P_{CEDF}=\overline{CF}\cdot h_2=\overline{DE}\cdot h_2$...(3) **(10 п)**.

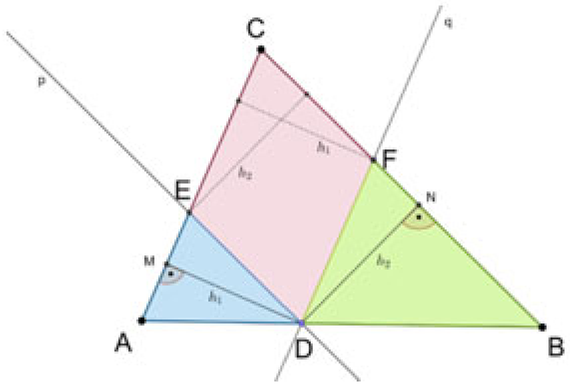
Со множење на равенките (2) и (3), и со користење на равенството (1) добиваме дека

$$P_{CEDF}^{\;2}=\overline{DE}\cdot\overline{DF}\cdot h_1\cdot h_2$$

$$P_{CEDF}^{\;2}=\overline{AE}\cdot\overline{BF}\cdot h_1\cdot h_2$$

$$P_{CEDF}^{\;2}=2\frac{\overline{AE}\cdot h_1}{2}\cdot 2\frac{\overline{BF}\cdot h_2}{2}$$

$$P_{CEDF}^{\;2}=4\cdot P_{ADE}\cdot P_{DBF}$$



Конечно, $P_{CEDF}=2\sqrt{P_{ADE}\cdot P_{DBF}}$ **(10 п)**.

4А. Во множеството природни броеви реши го системот $\begin{cases} x+yz=2024z \\ y+zx=2024x \\ z+xy=2024y \end{cases}$.

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases} x=z(2024-y) \\ y=x(2024-z) \\ z=y(2024-x) \end{cases}$ **(5 п)**. Бидејќи x,y,z се природни броеви, од првата равенка следува дека $z|x$, од втората $x|y$ и од третата $y|z$. Од $z|x$ и $x|y$ следува дека $z|y$, а бидејќи и $y|z$ мора $y=z$ **(8 п)**. Тогаш од $x|y$ и $y=z$ следува $x|z$ и имајќи предвид дека $z|x$ добиваме и $x=z$ **(3 п)**. Значи, $x=y=z$ па ја добиваме равенката $x+x^2=2024x$ **(3 п)**. Бидејќи $x\neq 0$, важи $1+x=2024$ и оттука добиваме $x=2023$ **(4 п)**. Решение на дадениот систем е $x=y=z=2023$ **(2 п)**.

4Б. Во множеството природни броеви реши го системот $\begin{cases} x+yz=59 \\ xy+z=46 \end{cases}$.

Решение. Од првата ја одземаме втората равенка и добиваме $(x-z)+y(z-x)=13$ односно $(z-x)(y-1)=13$ **(5 п)**. Бидејќи $y\geq 1$, јасно $y-1\geq 0$ **(3 п)**, па ги добиваме следните потслучаи:

$$\begin{cases} y-1=1 \\ z-x=13 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y-1=13 \\ z-x=1 \end{cases} \quad \textbf{(3 п)}.$$

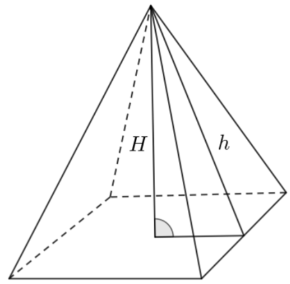
Во првиот случај $y=2$ и со замена во првата равенка на дадениот систем добиваме $x+2z=59$. Сега го решаваме системот $\begin{cases} x+2z=59 \\ -x+z=13 \end{cases}$. Ако ги собереме двете равенки добиваме $3z=72$, односно $z=24$ и оттука $x=11$ **(6 п)**.

Во вториот случај, $y=14$ и ако замениме во првата равенка на дадениот систем добиваме $x+14z=59$. Сега го решаваме системот $\begin{cases} x+14z=59 \\ -x+z=1 \end{cases}$. Ако ги собереме двете равенки добиваме $15z=60$, од каде $z=4$, па $x=3$ **(6 п)**.

Конечно, системот има две решенија: $(11,2,24)$ и $(3,14,4)$ **(2 п)**.

ТРЕТА ГОДИНА

1АБ. (Сигма 129, Задачи од училницата, втора година, задача 4)
Основниот раб и висината на една правилна четириаголна пирамида се однесуваат како 5:6, а волуменот на пирамидата изнесува 400 cm³ . Пресметај ја плоштината на пирамидата.



Решение. Од условот на задачата имаме $a:H=5:6 \Rightarrow H=\frac{6a}{5}$ **(5 п).** Од друга страна знаеме дека $V=400$, па $\frac{a^2H}{3}=400$ **(5 п).** Ако ја замениме висината во последната релација добиваме $\frac{a^2}{3}\cdot\frac{6a}{5}=400$, односно $a=10$ **(5 п).** Следува дека $H=12$ и $h=\sqrt{H^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=13$ **(5 п).** Тогаш $P_{\text{пир.}}=a^2+\frac{4ah}{2}=360\,\text{cm}^2$ **(5 п).**

2А. (Сигма 129, Рубрика задачи, Задача 1747)
Одреди го производот од решенијата на равенката $\sqrt{2023}\cdot x^{\log_{2023}x}=x^2$.
Решение. Да забележиме дека $x>0$. Со логаритмирање на дадената равенка со основа 2023 добиваме

$$\log_{2023}\left(\sqrt{2023}\cdot x^{\log_{2023}x}\right)=\log_{2023}x^2 \Leftrightarrow \log_{2023}\sqrt{2023}+\log_{2023}x^{\log_{2023}x}=2\log_{2023}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_{2023}2023+\log_{2023}x\cdot\log_{2023}x=2\log_{2023}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\log_{2023}^2 x=2\log_{2023}x \Leftrightarrow 1+2\log_{2023}^2 x=4\log_{2023}x \quad \textbf{(10 п).}$$

Така ја добиваме квадратната равенка $2\log_{2023}^2 x-4\log_{2023}x+1=0$ која со смената $\log_{2023}x=y$ се трансформира во квадратната равенка $2y^2-4y+1=0$ **(5 п).** Со користење на Виетовите формули добиваме $y_1+y_2=2$ односно $\log_{2023}x_1+\log_{2023}x_2=2$, од каде имаме $\log_{2023}(x_1\cdot x_2)=2$ **(5 п).**
На тој начин добиваме дека $x_1\cdot x_2=2023^2$ **(5 п).**

2Б. (Сигма 130, Задачи од училницата, трета година, задача 1) Докажи дека ако $\log_b x=\frac{1}{2}(\log_a x+\log_c x)$, тогаш $\log_b\sqrt{ac}=\log_b a\cdot\log_b c$, за $x,a,b,c>0$ и $x,a,b,c\neq 1$.
Решение. Ги користиме својствата на логаритмите и трансформираме до еквивалентни равенства. Од $\log_b x=\frac{1}{2}(\log_a x+\log_c x)$, добиваме $2\log_b x=\frac{\log_b x}{\log_b a}+\frac{\log_b x}{\log_b c}$ **(5 п).** Од $x\neq 1$ следува $\log_b x\neq 0$, па последниот израз е $2=\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_b c}$ **(5 п).** Од овде добиваме дека $2\log_b a\cdot\log_b c=\log_b a+\log_b c$, односно $\frac{1}{2}(\log_b a+\log_b c)=\log_b a\cdot\log_b c$ **(5 п).** Од тоа што $\log_b a+\log_b c=\log_b(ac)$, следува дека $\frac{1}{2}(\log_b a+\log_b c)=\log_b\sqrt{ac}$ **(5 п).** Заклучуваме дека $\log_b\sqrt{ac}=\log_b a\cdot\log_b c$ **(5 п).**

3АБ. За кои вредности на параметарот $k\in\mathbb{N}$, графикот на функцијата $f(x)=x^2-kx+4$ ја сече апцисната оска во точки со координати ненегативни цели броеви помали од 2024?
Решение. Од условот на задачата имаме дека пресечните точки се точките со координати $(n,0)$ каде што $0\le n<2024$, $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$. Според тоа, ги бараме решенијата на равенката $n^2-kn+4=0$, а тие се

определени со $n_{1,2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-16}}{2}$, односно $n=\frac{k-\sqrt{k^2-16}}{2}$ или $n=\frac{k+\sqrt{k^2-16}}{2}$ **(5 п).**

Притоа, равенката има реални решенија ако $k^2-16\ge 0$, односно $k\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$ **(5 п).** Да ги определиме вредностите на $k\in\mathbb{N}$ за кои k^2-16 е полн квадрат. Важи $k^2-16=m^2 \Leftrightarrow k^2-m^2=16 \Leftrightarrow (k-m)(k+m)=16$, па можни се следните случаи:

1) $\begin{cases} k-m=1 \\ k+m=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{17}{2} \\ m=\frac{15}{2} \end{cases}$, 2) $\begin{cases} k-m=2 \\ k+m=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=5 \\ m=3 \end{cases}$ и 3) $\begin{cases} k-m=4 \\ k+m=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ m=0 \end{cases}$ **(10 п).**

Според тоа добиваме дека единствени вредности за кои k^2-16 е полн квадрат се $k=4$ и $k=5$. Со замена во $n_{1,2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-16}}{2}$, за $k=4$ добиваме дека $n=2$, а за $k=5$ добиваме дека $n_1=4$ и $n_2=1$.

Значи, бараните вредности за k се $k=4$ и $k=5$, а пресечните точки се точките со координати $(1,0)$, $(2,0)$ и $(4,0)$ **(5 п).**

4А. Најди го аголот α во радијани таков што $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Решение. $\sin\alpha=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1-\sqrt{2}}{6-3\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)=$

$$=\frac{1-\sqrt{2}}{4-4\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{4\left(1-\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)= \textbf{(10 п)}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}= \textbf{(5 п)}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}= \textbf{(5 п)}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{7\pi}{24}. \textbf{ (5 п)}$$

Следува бараниот агол е $\alpha=\frac{7\pi}{24}$.

4Б. Пресметај ја вредноста на изразот $\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\ldots+\cos^2 88^\circ+\cos^2 89^\circ$.

Решение. Нека $S=\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\ldots+\cos^2 88^\circ+\cos^2 89^\circ$.

Користејќи го идентитетот $\cos\alpha=\sin\left(90^\circ-\alpha\right)$, **(5 п),** добиваме

$$S=\sin^2 89^\circ+\sin^2 88^\circ+\ldots+\sin^2 2^\circ+\sin^2 1^\circ=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\ldots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ \textbf{ (10 п).}$$

Со собирање на левите и десните страни на равенствата

$S=\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\ldots+\cos^2 88^\circ+\cos^2 89^\circ$ и $S=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\ldots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ$, добиваме

$$2S=\left(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ\right)+\left(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ\right)+\ldots+\left(\sin^2 88^\circ+\cos^2 88^\circ\right)+\left(\sin^2 89^\circ+\cos^2 89^\circ\right)=$$

$$=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{89\text{пати}}=89$$

Следува $S=\frac{89}{2}$ **(10 п).**

ЧЕТВРТА ГОДИНА

1А. (Сигма 129, Рубрика задачи, задача 1749)
Нека $1, x_2, x_3\ , x_4\ , \dots\dots, x_n, 1000$ е најдолгата можна низа од природни броеви такви што, почнувајќи од третиот член, секој нареден е еднаков на збирот на сите претходни членови. Одреди ја вредноста на членот x_2.
Решение. Според условот на задачата имаме дека

$$x_3 = 1 + x_2$$
$$x_4 = 1 + x_2 + x_3 = 1 + x_2 + (1 + x_2) = 2 + 2x_2 = 2^1 \cdot (1 + x_2)$$
$$x_5 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + x_2 + (1 + x_2) + (2 + 2x_2) = 4 + 4x_2 = 2^2 \cdot (1 + x_2)$$
$$x_6 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 + x_2 + (1 + x_2) + (2 + 2x_2) + (4 + 4x_2) = 8 + 8x_2 = 2^3 \cdot (1 + x_2)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = 2^{n-3} \cdot (1 + x_2)\ \textbf{(8 п).}$$

Јасно е дека $(n+1)$-иот член на низата е $x_{n+1} = 2^{n-2} \cdot (1 + x_2)$ и тој е еднаков на 1000, односно $2^{n-2} \cdot (1 + x_2) = 1000$ **(4 п).** Бидејќи според условот, низата е најдолгата можна, 2^{n-2} е најголемиот степен на бројот 2 кој е делител на 1000 **(6 п).** Бидејќи $1000 = 2^3 \cdot 3^5$, следува дека $n - 2 = 3$ т.е $n = 5$ **(4 п).** Тогаш $x_2 = \frac{1000}{2^{5-2}} - 1 = 124$ **(3 п).**

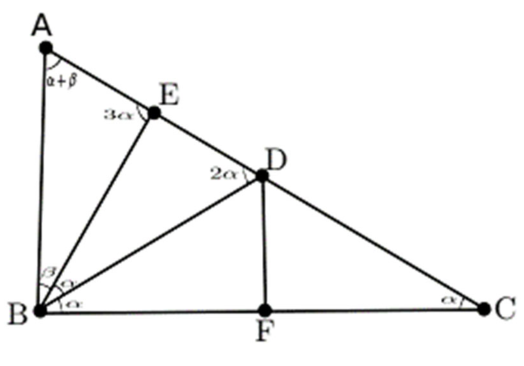
1Б. (Сигма 130, Задачи од училницата, задача 1)
Збирот на првите m броеви во дадена аритметичка прогресија се бележи со S_m. Докажи дека ако во аритметичката прогресија важи $S_m = S_n = 0$, тогаш $S_{m+n} = mnd$.
Решение. Од $S_m = \frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d)$ и $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ **(3 п),** следува дека

$$S_{m+n} = \frac{m+n}{2}(2a_1 + (m+n-1)d) = \textbf{(5 п)}$$
$$= \frac{m}{2}(2a_1 + (m+n-1)d) + \frac{n}{2}(2a_1 + (m+n-1)d) = \textbf{(8 п)}$$
$$= S_m + \frac{m}{2}nd + S_n + \frac{n}{2}md = (7\ \text{п}) = mnd.\ \textbf{(2 п)}$$

2А. На кривата $y = x^4 - 2x^2$ се наоѓаат 4 различни точки кои лежат на една права. Докажи дека збирот на апсцисните координати на овие четири точки е 0.
Решение. Нека $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2), T_3(x_3, y_3), T_4(x_4, y_4)$ се 4 различни точки кои лежат на правата $y = ax + b$. Тогаш, важи $x_k^4 - 2x_k^2 = y_k = ax_k + b$, за $k = 1,2,3,4$. **(5 п).** Значи, x_1, x_2, x_3, x_4 се решенија на равенката $x^4 - 2\,x^2 - ax - b = 0$ **(5 п).**
Равенката е од 4-ти степен, па има најмногу 4 реални решенија. Јасно, тогаш x_1, x_2, x_3, x_4 се воедно и сите решенија на равенката **(5 п).** Конечно, бидејќи коефициентот пред x^3 е 0, од Виетовите врски добиваме дека $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ **(10 п).**

2Б. Нека x и y се природни броеви така што $\dfrac{2024!}{7^x \cdot 11^y}$ е цел број. Која е најголемата можна вредност на $x + y$?
Решение. За да го одредиме x - експонентот на 7 во $2024!$, ќе го одредиме најпрво бројот на множители на 7 помали од 2024, а тоа е 289. Бидејќи степените на 7 ги броевме по еднаш, броиме уште по една 7- ка за множителите на $49=7^2$, помали од 2024 кои се вкупно 41, како и уште по една 7-ка за множителите на $343=7^3$ помали од 2024, кои се вкупно 5. Значи експонентот на 7 во $2024!$ е $289 + 41 + 5 = 335$. **(10 п).** Слично, експонентот на 11 во 2024! е $184 + 16 + 1 = 201$, каде 184 е бројот на множители на 11, 16 е бројот на множители на $11^2 = 121$ и 1 е бројот на множители на $11^3 = 1331$ помали од 2024 **(10 п).** Оттука, најголемата можна вредност на $x + y$ за која количникот е цел број, е $335 + 201 = 536$ **(5 п).**

3А. Даден е триаголникот ABC во кој $\measuredangle ABC = 90°$. Нека D е средишна точка на страната AC, E е средишна точка на отсечката AD и BD е симетралата на $\measuredangle CBE$. Најди го $\measuredangle BCA$.
Решение. Нека точките D и E се како во условот на задачата. Да означиме $\measuredangle CBD = \alpha$ и $\measuredangle ABE = \beta$ (види цртеж). Од условот во задачата, BD е симетралата на $\measuredangle CBE$ па $\measuredangle DBE = \alpha$. Според тоа, имаме дека $2\alpha + \beta = 90°$ **(3п).** Бидејќи во правоаголен триаголник, тежишната линија кон хипотенузата е еднаква на половина од должината на хипотенузата, ΔBCD е рамнокрак и $\measuredangle BCD = \alpha$ **(5 п).** Тогаш $\measuredangle BAE = 90° - \alpha = (2\alpha + \beta) - \alpha = \alpha + \beta$ **(2 п).**



Да забележиме дека $\measuredangle BDA = 2\alpha$ (како надворешен агол за ΔBDC). Користејќи дека, од условот на задачата, $\overline{AE} = \overline{ED}$, со примена на синусната теорема за ΔABE и ΔBED добивме:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} \quad \textbf{(8 п).}$$

Со поедноставување на изразот добиваме: $\sin(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ **(4 п).**

Оттука, $\sin(\alpha-\beta) = 0$, па имаме $\alpha = \beta = \measuredangle BCA = 30^\circ$ **(3 п).**

Второ решение. Да означиме $\measuredangle CBD = \alpha$ и $\measuredangle ABE = \beta$ (цртеж). Бидејќи во правоаголен триаголник, тежишната линија кон хипотенузата е еднаква на половина од должината на хипотенузата, имаме $\overline{BD} = \overline{DC}$, па ΔBCD е рамнокрак и $\measuredangle BCD = \alpha$. Тогаш, $\measuredangle BDA = 2\alpha$ (како надворешен агол за ΔBDC). **(6 п).** Нека F е средишна точка на страната BC. ΔBCD е рамнокрак, од каде следи дека *F* е и подножје на висината од *D*, па $\measuredangle DFB = 90^\circ$ **(4 п).** Сега, BD е симетралата на $\measuredangle CBE$ па следува дека и $\measuredangle EBD = \alpha$. Оттука, ΔBDE и ΔBCE се слични, па од $\overline{BD} = \overline{DC}$, за соодносот на нивните страни имаме: $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{DC}} = \frac{1}{2}$ **(8 п).**

Значи, $\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BF}$, па следува дека ΔBDE и ΔBDF се складни (признак САС) **(5 п).**

Оттука добиваме $\measuredangle DEB = 90^\circ$, па $\measuredangle BCA = \measuredangle EBD = \frac{1}{3}90^\circ = 30^\circ$ **(2 п).**

3Б. Ако за реалните броеви *x,y,z* важи $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 1$, покажи дека

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} = 0\,.$$

Решение. Ако првото равенство го помножиме одделно со x, y и z, **(10 п)** и добиените релации ги замениме во второто равенство ќе добиеме:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} &= x - \left(\frac{xy}{x+z} + \frac{xz}{x+y}\right) + y - \left(\frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{x+y}\right) + z - \left(\frac{xz}{y+z} + \frac{yz}{x+z}\right) = \\ &= \left(x - \frac{xy}{y+z} - \frac{xz}{y+z}\right) + \left(y - \frac{xy}{x+z} - \frac{yz}{x+z}\right) + \left(z - \frac{xz}{x+y} - \frac{yz}{x+y}\right) = \\ &= \frac{x(y+z)-xy-xz}{y+z} + \frac{y(x+z)-xy-yz}{x+z} + \frac{z(x+y)-xz-yz}{x+y} = 0 \quad \textbf{(15).}\end{aligned}$$

4АБ. (Сигма 130, Задача 1765) Сите темиња на правилен стоаголник се обоени во 10 различни бои. Докажи дека постои правоаголник чии темиња се обоени во најмногу две бои.

Решение. Нека k е опишаната кружница околу правилниот стоаголник. На тој начин добиваме 50 различни дијаметри **(5 п).** Да забележиме дека секој дијаметар со било кое теме од правилниот стоаголник, различно од крајните точки на тој дијаметар, според Талесова теорема формира прав агол. Значи, било кои два дијаметри формираат правоаголник **(8 п).** Ако постојат два дијаметри чии крајни точки се обоени во иста боја, тогаш тоа би бил правоаголникот чии темиња се обоени во најмногу две бои **(2 п).**

Нека не постојат два дијаметри чии крајни точки се обоени во иста боја односно постои само еден дијаметар чии крајни точки се обоени во иста боја. Бидејќи боењето е можно со 10 различни бои, постојат $C_2^{10} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ различни начини на боење на крајните точки на дијаметрите со различни бои **(8 п).** Бидејќи постојат 50 дијаметри може да се најдат два дијаметри чии крајни точки се обоени на ист начин со две различни бои, па тоа би бил бараниот правоаголник чии темиња се обоени во најмногу две бои **(2 п).**