РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД 46 -ТИОТ РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2023

4.03.2023

ПРВА ГОДИНА

1А. Докажи дека бројот $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...56}_{n}$ е полн квадрат за секој природен број n.

Решение. Го запишуваме бројот на следниот начин:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots56}_{n}=\underbrace{11\ldots1}_{2n}+4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}+1=\frac{1}{9}\left(\underbrace{99\ldots9}_{2n}+4\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}+9\right)= \quad \textbf{(5 поени)}$$

$$=\frac{1}{9}\left(\underbrace{99\ldots9}_{2n}+1+4\cdot\left(\underbrace{99\ldots9}_{n}+1\right)+4\right)=\frac{1}{9}(10^{2n}+4\cdot10^{n}+4)= \quad \textbf{(10 поени)}$$

$$=\frac{1}{9}(10^{n}+2)^2=\left[\frac{1}{3}(10^{n}+2)\right]^2=\left(\underbrace{33\ldots3}_{n}+1\right)^2=\underbrace{33\ldots34}_{n}{}^2, \quad \textbf{(10 поени)}$$

што требаше да се докаже.

1Б. Докажи дека, ако збирот на броевите $\overline{abc}$ и $\overline{xyz}$ е делив со 37, тогаш и бројот $\overline{abcxyz}$ е делив со 37.
Решение. Нека $37 \mid (\overline{abc}+\overline{xyz})$, тогаш $\overline{abc}+\overline{xyz}=37k$ за некој $k\in\mathbb{N}$ **(5 поени)**. За бројот $\overline{abcxyz}$ имаме:

$$\overline{abcxyz}=1000\cdot\overline{abc}+\overline{xyz}= \textbf{(5 поени)} =999\cdot\overline{abc}+(\overline{abc}+\overline{xyz})=(\textbf{5}\text{ поени})$$

$$=37\cdot27\cdot\overline{abc}+37k=(\textbf{5}\text{ поени})=37(27\cdot\overline{abc}+k),$$

од каде заклучуваме дека $37 \mid \overline{abcxyz}$. (**5** поени)

2АБ. Нека a е цел број и нека равенката $|2ax-x-b|=b$ има две решенија x_1 и x_2 кои се цели броеви. Ако збирот на целите броеви од интервалот (x_1,x_2) е 15, докажи дека b е непарен број.

Решение 1. Со решавање на равенката се добива $2ax-x-b=b$ или $2ax-x-b=-b$, т.е. $x=\frac{2b}{2a-1}$ или $x=0$. Значи едно решение е $x_1=0$, а другото решение е $x_2=\frac{2b}{2a-1}$ **(10 поени).** Бидејќи $15=1+2+3+4+5$, заклучуваме дека $x_2=6$ (т.е. збирот на целите броеви меѓу 0 и 6, без 0 и 6, изнесува 15) **(5 поени)**. Следи дека $x_2=\frac{2b}{2a-1}=6$, т.е. $b=3(2a-1)$ е непарен број **(10 поени)**.

Решение 2. Бројот b е апсолутна вредност на некој број, па значи $b\geq0$. За $x=0$ равенката станува $|-b|=b$, што значи дека $x_1=0$ е едно решение на равенката **(5 поени).** Ако со x_2 го означиме второто решение, тогаш бидејќи $15=1+2+3+4+5$, заклучуваме дека $x_2=6$ (т.е. збирот на целите броеви меѓу 0 и 6, без 0 и 6, изнесува 15) **(5 поени)**. Да претпоставиме сега дека b е парен број, односно $b=2k$ за некој $k\in\mathbb{N}$. Тогаш равенката добива облик: $|2ax_2-x_2-b|=b$, односно $|12a-6-2k|=2k$.
Последново станува $2|6a-3-k|=2k$, или во поедноставена форма $|6a-3-k|=k$. Од тука добиваме $6a-3-k=k$ или $6a-3-k=-k$ **(5 поени)**. Во првиот случај следува дека $6a-3=2k$ што е контрадикција бидејќи левата страна е непарен, а десната парен број. Во вториот случај, следува $6a-3=0$, т.е. $a=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ што е контрадикција со условот дека a е цел број. Заклучуваме дека b не може да биде парен број, односно бројот b е непарен. **(10 поени)**

3А. (Сигма 126, Рубрика задачи, задача 1701) Ако a,b,c се природни броеви, тогаш докажи дека $7\mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$.

Решение 1. Ако $7\mid a$ или $7\mid b$ или $7\mid c$, тогаш $7\mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$ **(5 поени).** Нека $7\nmid a$, $7\nmid b$, и $7\nmid c$, тогаш a,b,c се од облик $7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5$ или $7k+6$, за некое $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Од тоа што $(7k+1)^3\equiv1^3\equiv1(\bmod 7)$, $(7k+2)^3\equiv2^3\equiv1(\bmod 7)$, $(7k+3)^3\equiv3^3\equiv6(\bmod 7)$, $(7k+4)^3\equiv4^3\equiv1(\bmod 7)$, $(7k+5)^3\equiv5^3\equiv6(\bmod 7)$ и $(7k+6)^3\equiv6^3\equiv6(\bmod 7)$, следува дека можни остатоци при делење на кубовите a^3,b^3,c^3 на природните броеви a,b,c со 7 се 1 или 6 **(10 поени)**. Тоа значи дека барем два од броевите a^3,b^3,c^3 при делење со 7 даваат ист остаток, од каде следува дека разликата на тие два броја е делива со 7. Така имаме дека $7\mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$ **(10 поени)**.

Решение 2. Ако $7\mid a$ или $7\mid b$ или $7\mid c$, тогаш $7\mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$ **(5 поени)**. Нека $7\nmid a$, $7\nmid b$, и $7\nmid c$, тогаш a,b,c се од облик $7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5$ или $7k+6$, за некое $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Од тоа што

$$(7k+1)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2 + 3\cdot 7k + 1 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2 + 3\cdot k) + 1,$$
$$(7k+2)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2\cdot 2 + 3\cdot 7k\cdot 2^2 + 2^3 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 2 + 3\cdot k\cdot 2^2 + 1) + 1,$$
$$(7k+3)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2\cdot 3 + 3\cdot 7k\cdot 3^2 + 3^3 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 3 + 3\cdot k\cdot 3^2 + 3) + 6,$$
$$(7k+4)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2\cdot 4 + 3\cdot 7k\cdot 4^2 + 4^3 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 4 + 3\cdot k\cdot 4^2 + 9) + 1,$$
$$(7k+5)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2\cdot 5 + 3\cdot 7k\cdot 5^2 + 5^3 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 5 + 3\cdot k\cdot 5^2 + 17) + 6,$$
$$(7k+6)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2\cdot 6 + 3\cdot 7k\cdot 6^2 + 6^3 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 6 + 3\cdot k\cdot 6^2 + 30) + 6,$$

следува дека можни остатоци при делење на кубовите a^3, b^3, c^3 на природните броеви a, b, c со 7 се 1 или 6 **(10 поени)**. Тогаш барем два од броевите a^3, b^3, c^3 при делење со 7 даваат ист остаток, од каде пак следува дека разликата на тие два броја е делива со 7. Така имаме дека $7 \mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$ **(10 поени)**.

3Б. (Сигма 127, Задачи од училницата, Прва година, задача 2) Нека a и b се реални броеви за кои важи $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ и $a-b=\frac{3}{2}$. Најди ги сите можни вредности на изразот $A = a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2b + 2ab^2 + a^2b^2$.

Решение. Со квадрирање на втората равенка добиваме $a^2 - 2ab + b^2 = \frac{9}{4}$, односно $a^2 + b^2 = \frac{9}{4} + 2ab$. Заменуваме во првото равенство $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{5}{2}$ и добиваме $\frac{\frac{9}{4}+2ab}{ab} = \frac{5}{2}$, од каде $ab = \frac{9}{2}$ **(5 поени)**. Ако пак на двете страни на равенството $a^2 - 2ab + b^2 = \frac{9}{4}$ додадеме $4ab$, имаме $(a+b)^2 = \frac{9}{4} + 4ab$. За $ab = \frac{9}{2}$ добиваме $(a+b)^2 = \frac{81}{4}$, односно $a+b = \frac{9}{2}$ или $a+b = -\frac{9}{2}$ **(10 поени)**. Сега дадениот израз го запишуваме во облик

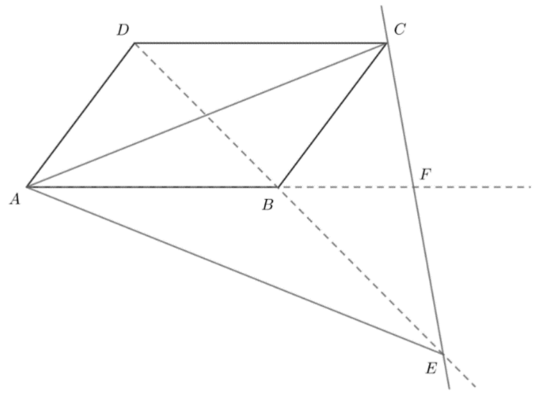
$$A = a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2b + 2ab^2 + a^2b^2 = (a+b)^2 + 2ab(a+b) + (ab)^2 = [(a+b)+ab]^2$$ **(5 поени)**.

За $a+b=\frac{9}{2}$ и $ab=\frac{9}{2}$ добиваме дека $A = \left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)^2 = 81$. За $a+b=-\frac{9}{2}$ и $ab=\frac{9}{2}$ добиваме дека $A = \left(\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\right)^2 = 0$. Значи можните вредности на изразот се само 81 и 0 **(5 поени)**.

4АБ. (Сигма 126, Задачи од училницата, Прва година, задача 2)

Нека $ABCD$ е паралелограм. На полуправата DB е избрана точка E таква што полуправата AB е симетралата на $\measuredangle CAE$. Нека $F = CE \cap AB$. Докажи дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1$.

Решение. Отсечките BF и DC се паралелни. Според теоремата на Талес за пропорционални отсечки имаме $\overline{EC} : \overline{EF} = \overline{DC} : \overline{BF}$ и бидејќи $\overline{AB} = \overline{DC}$, добиваме дека $\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$ …..(1) **(5 поени)**. Полуправата AF е симетрала на $\measuredangle CAE$ во ΔCAE, па според својството за симетрала на агол имаме дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$ **(5 поени)**. На двете страни на ова равенство го додаваме бројот 1 и го запишуваме во облик $1+\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1+\frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$.



Средуваме до $1+\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EF}+\overline{CF}}{\overline{EF}}$, односно $1+\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}$ **(10 поени)**. Од равенството (1), добиваме дека $1+\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$, или конечно $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1$ **(5 поени)**.

ВТОРА ГОДИНА

1А. Реши ја равенката во множеството реални броеви: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(\sqrt{5}-x)^2}=7$.

Решение. Јасно, $x\neq 0,\sqrt{5}$. Воведуваме смена $y=\sqrt{5}-x$ и го добиваме системот $\begin{cases} x+y=\sqrt{5} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=7 \end{cases}$ **(3 поени)**.

Имаме: $7=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{(x+y)^2-2xy}{x^2y^2}=\frac{5-2xy}{x^2y^2}$ **(4 поени)** и оттука ја добиваме квадратната равенка по xy, $7(xy)^2+2xy-5=0$ **(3 поени)**. Нејзини решенија се $\frac{-1\pm\sqrt{1+35}}{7}=\frac{-1\pm 6}{7}$, т.е. $xy=\frac{5}{7}$ и $xy=-1$ **(3 поени)**. Од $x+y=\sqrt{5}$ и $xy=\frac{5}{7}$ следува дека x и y се решенија на квадратната равенка $z^2-\sqrt{5}z+\frac{5}{7}=0$, односно $x,y=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5-\frac{20}{7}}}{2}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{\frac{15}{7}}}{2}=\frac{7\sqrt{5}\pm\sqrt{105}}{14}$. Од $x+y=\sqrt{5}$ имаме $x=\sqrt{5}-y=\sqrt{5}-\frac{7\sqrt{5}\pm\sqrt{105}}{14}=\frac{7\sqrt{5}\mp\sqrt{105}}{14}$ па равенката по x ги има решенијата $x_{1,2}=\frac{7\sqrt{5}\pm\sqrt{105}}{14}$ **(6 поени)**. Од $x+y=\sqrt{5}$ и $xy=-1$ следува дека x и y се решенија на равенката $z^2-\sqrt{5}z-1=0$, односно $x,y=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5+4}}{2}=\frac{\sqrt{5}\pm 3}{2}$ и поради $x=\sqrt{5}-y=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}\pm 3}{2}=\frac{\sqrt{5}\mp 3}{2}$ следува дека решенија се $x_{3,4}=\frac{\sqrt{5}\pm 3}{2}$ **(6 поени)**.

1Б. Лора купува пакет со сини и црвени хартиени листови, во кој односот на бројот на сините и бројот на црвените листови е $2:7$. Секој ден, Лора користи 1 син и 3 црвени листови. Еден ден, откако зела 3 црвени листови и го потрошила последниот син лист, во пакетот останале 15 црвени листови. Колку вкупно листови имало во пакетот на почетокот?

Решение. Нека на почетокот во пакетот имало x сини и y црвени листови. Тогаш, $\frac{x}{y}=\frac{2}{7}$ **(5 поени)**. Бидејќи Лора користи секој ден по еден син лист, по x денови во пакетот ќе нема повеќе сини листови **(5 поени)**. Но, Лора секој ден користи и по три црвени листови, па затоа за x денови ќе потроши $3x$ црвени листови, а бидејќи откако ги потрошила сите сини листови останале 15 црвени листови, на почетокот во пакетот имало $y=3x+15$ црвени листови **(5 поени)**. Тогаш, $\frac{x}{3x+15}=\frac{2}{7}$, $7x=6x+30$ и оттука $x=30$ **(5 поени)**. За вкупниот број на листови добиваме $x+y=30+3\cdot 30+15=135$ **(5 поени)**.

2АБ. (**Сигма 122, Задачи од училницата, Втора година, 1 задача**)

Ако a и b се позитивни цели броеви такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{1}{b^2-2b}$, најди ја најмалата вредност на збирот $a+b$.

Решение. Од $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{1}{b^2-2b}$, сведувајќи на заеднички именител на левата страна, добиваме $\frac{6+3+2}{6a}=\frac{1}{b^2-2b}$, а оттука пак $11(b^2-2b)=6a$ **(3 поени)**. Гледаме дека 11 е делител на левата страна од каде мора да е делител и на десната страна, односно $11\mid a$ **(3 поени)**. Следува $a=11A$, за A е позитивен цел број. Од $11(b^2-2b)=66A$ следува дека $b^2-2b=6A$, па 6 е делител на десната страна заради што мора да е делител и на левата страна **(3 поени)**. Значи $6\mid b^2-2b$, односно $6\mid b(b-2)$. Последното е производ на два последователни парни или два последователни непарни броја **(4 поени)**. Нивниот производ е делив со 6, значи е делив со 2, оттука мора да се и двата парни **(3 поени)**. Едниот од нив треба да е делив истовремено и со 3 **(3 поени)**. Ја бараме најмалата вредност на збирот $a+b$, па проверуваме за најмалиот b делив и со 2 и со 3 односно за $b=6$ **(3 поени)**. Добиваме $b^2-2b=36-12=24=6\cdot 4$ па $6A=24$, односно $A=4$. Оттука $a=44$, $b=6$. Јасно најмалата вредност на збирот е $a+b$ е 50 **(3 поени)**.

3АБ. (**Сигма 126, Рубрика задачи, задача 1710**) Реши го системот равенки $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x^2+y^2-z^2=8-2xy \\ x^3+y^3-z^3=86-3xyz \end{cases}$.

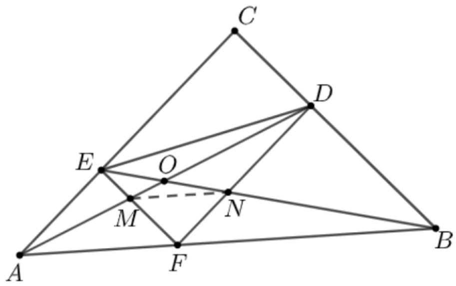
Решение. $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x^2+y^2-z^2=8-2xy \\ x^3+y^3-z^3=86-3xyz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ (x+y)^2=8+z^2 \\ (x+y)^3-3xy(x+y-z)=86+z^3 \end{cases}$ **(7 поени)** $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ (2+z)^2=8+z^2 \\ (x+y)^3-6xy=86+z^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ 4+4z+z^2=8+z^2 \\ (x+y)^3-6xy=86+z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ z=1 \\ 3^3-6xy=87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ z=1 \\ xy=-10 \end{cases}$ **(10 поени)** $\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ z=1 \\ x(3-x)=-10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ z=1 \\ x^2-3x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y=5 \\ z=1 \\ x=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-2 \\ z=1 \\ x=5 \end{cases} \right)$ **(8 поени)**.

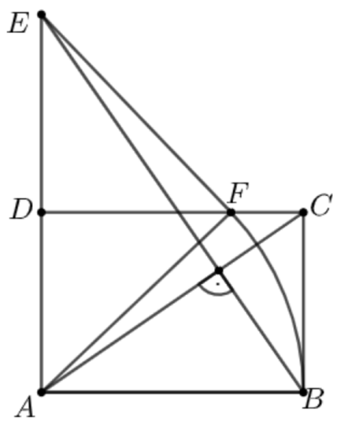
Значи, системот има две подредени тројки решенија $(-2,5,1)$ и $(5,-2,1)$.

4А. На страните BC, CA и AB на триаголникот ABC избрани се точки D, E, F, соодветно, така што четириаголникот $CEFD$ е паралелограм. Нека $\{O\}=AD \cap BE$, $\{M\}=AD \cap EF$ и $\{N\}=DF \cap BE$. Докажи дека триаголникот DEO и четириаголникот $FNOM$ имаат еднакви плоштини.



Решение. Од паралелноста на EF и CB следува $P_{BED}=P_{BMD}$ и оттука $P_{DEO}=P_{BED}-P_{BOD}=P_{BMD}-P_{BOD}=P_{BMO}$ **(5 поени)**.
Слично, од паралелноста на CA и DF имаме $P_{ADE}=P_{ANE}$ и оттука $P_{DEO}=P_{ADE}-P_{AOE}=P_{ANE}-P_{AOE}=P_{ANO}$ **(5 поени)**. Значи, $P_{BMO}=P_{ANO}$ и оттука следува дека $P_{BMN}=P_{ANM}$ **(5 поени)**. Бидејќи триаголниците BMN и ANM имаат еднаква страна и еднаква плоштина, следува дека висините од B и A на BMN и ANM, соодветно се еднакви па поради тоа MN и AB се паралелни и важи $P_{FNM}=P_{ANM}$ **(5 поени)**. Тогаш,
$P_{FNOM}=P_{FNM}+P_{NOM}=P_{ANM}+P_{NOM}=P_{ANO}=P_{DEO}$, што требаше да се докаже **(5 поени)**.

4Б. Даден е правоаголник $ABCD$, $AB>BC$. Нормалата спуштена од B кон дијагоналата AC ја сече правата AD во точка E, а кружницата со центар A која минува низ B ја сече страната CD во точка F. Докажи дека AF и EF се заемно нормални прави.



Решение. Нека $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b$. Триаголниците ABE и BCA се слични (правоаголни се и $\measuredangle BAC=\measuredangle AEB$ (како агли со заемно нормални краци)) **(5 поени)** па затоа $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$ и оттука $\overline{AE}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}}=\frac{a^2}{b}$ **(5 поени)**. За правоаголниот триаголник AFD имаме $\overline{AF}=a, \overline{AD}=b$, па $\overline{DF}=\sqrt{a^2-b^2}$ **(3 поени)**. Тогаш, од правоаголниот триаголник DFE, каде $\overline{ED}=\overline{AE}-\overline{AD}=\frac{a^2}{b}-b=\frac{a^2-b^2}{b}$ **(3 поени)**, добиваме

$$\overline{EF}^2=(\frac{a^2-b^2}{b})^2+\sqrt{a^2-b^2}^2=(a^2-b^2)\frac{a^2-b^2+b^2}{b^2}=\frac{a^2(a^2-b^2)}{b^2}$$ **(3 поени)**.

Од $\overline{EF}^2+\overline{AF}^2=\frac{a^2(a^2-b^2)}{b^2}+a^2=\frac{a^2(a^2-b^2+b^2)}{b^2}=(\frac{a^2}{b})^2=\overline{AE}^2$ **(3 поени)**, следува дека триаголникот AFE е правоаголен, па затоа AF и EF се заемно нормални прави **(3 поени)**.

ТРЕТА ГОДИНА

1А. (Сигма 124, Рубрика Задачи, Задача 1673) Во множеството реални броеви реши ја равенката $x^{\log_3(x-1)} + 2(x-1)^{\log_3 x} = 3x^2$.

Решение. Јасно е дека $x \in (1,+\infty)$. Нека $\log_3(x-1) = u$ и $\log_3 x = v$ **(5 поени)**. Со овие смени имаме дека $x^{\log_3(x-1)} = 3^{\log_3 x^{\log_3(x-1)}} = 3^{\log_3(x-1)\cdot\log_3 x} = 3^{uv}$ **(4 поени)**, односно $(x-1)^{\log_3 x} = 3^{\log_3(x-1)^{\log_3 x}} = 3^{\log_3 x\cdot\log_3(x-1)} = 3^{uv}$ **(4 поени)**. Исто така $x^2 = 3^{\log_3 x^2} = 3^{2\log_3 x} = 3^{2v}$ **(2 поени)**. Сега дадената равенка преминува во облик $3\cdot 3^{uv} = 3\cdot 3^{2v}$, од каде добиваме дека $uv = 2v$, односно $v(u-2) = 0$. Од последното имаме дека $v = 0$ или $u - 2 = 0$ **(5 поени)**. За $v = 0$, од $\log_3 x = v$ добиваме дека $x = 1$. Но $1 \notin (1,+\infty)$ па $x = 1$ не е решение на дадената равенка **(3 поени)**.

За $u - 2 = 0$, односно $u = 2$, од $\log_3(x-1) = u$ добиваме дека $x = 10$. Јасно, $10 \in (1,+\infty)$, па $x = 10$ е единствено решение на дадената равенка **(2 поени)**.

1Б. (Сигма 125, Рубрика задачи, Задача 1963) Во множеството реални броеви најди ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y\cdot\log_y(3x-y) = 1 \end{cases}$.

Решение. Да забележиме дека од дефиницијата на логаритамската функција, следува дека $x > 0$, $y > 0$, $3x - y > 0$ и $y \neq 1$. Ако логаритмираме со основа y во првата равенка на системот и го искористиме равенството $\frac{1}{\log_4 y} = \log_y 4$ за втората равенка на системот, дадениот систем преминува во облик

$$\begin{cases} \log_y\left(yx^{\log_y x}\right) = \log_y x^{\frac{5}{2}} \\ \log_y(3x-y) = \dfrac{1}{\log_4 y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y y + \log_y\left(x^{\log_y x}\right) = \dfrac{5}{2}\log_y x \\ \log_y(3x-y) = \log_y 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \log_y x\cdot\log_y x = \dfrac{5}{2}\log_y x \\ 3x - y = 4 \end{cases}.$$ **(10 поени)**

Воведуваме смена $\log_y x = t$. Равенката $1 + \log_y x\cdot\log_y x = \frac{5}{2}\log_y x$ го добива обликот $1 + t^2 = \frac{5}{2}t$, односно $2 + 2t^2 = 5t$ или $2t^2 - 5t + 2 = 0$, што всушност е квадратна равенка по t, со решенија $t_1 = 2$ и $t_2 = \frac{1}{2}$ **(5 поени)**.

Разгледуваме два случаи:

1. За $t_1 = 2$, од $\log_y x = t$, добиваме дека $\log_y x = 2$, односно $x = y^2$. Со замена во $3x - y = 4$, добиваме $3y^2 - y - 4 = 0$, квадратна равенка по y со решенија $y_1 = \frac{4}{3}$ и $y_2 = -1$. Јасно, $y > 0$, па $y = \frac{4}{3}$ е единствена можна вредност за y во овој случај. Тогаш, со замена во $x = y^2$, добиваме дека $x = \frac{16}{9}$.

Заклучуваме дека во овој случај, решение на дадениот систем е подредениот пар $\left(\frac{16}{9},\frac{4}{3}\right)$ **(5 поени)**.

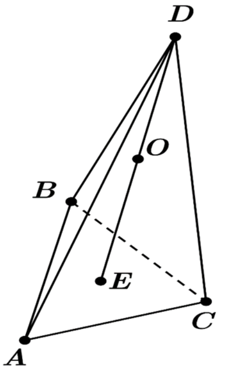
2. За $t_2 = \frac{1}{2}$, од $\log_y x = t$, добиваме дека $\log_y x = \frac{1}{2}$, од каде следува дека $x = \sqrt{y}$, односно $x^2 = y$. Со замена во $3x - y = 4$, добиваме $x^2 - 3x + 4 = 0$, што претставува квадратна равенка по x која нема реални корени.

Па, во овој случај и дадениот систем нема да има реални решенија **(5 поени)**.

Значи, единствено решение на дадениот систем е подредениот пар $\left(\frac{16}{9},\frac{4}{3}\right)$.

2АБ. (Сигма 121, Рубрика задачи, Задача 1632) Правилна триаголна пирамида има раб на основата b и агол меѓу бочните рабови α. Докажи дека радиусот на опишаната сфера околу пирамидата е $\dfrac{b}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

Решение. Нека ΔABC е основа на пирамидата, а D е нејзиниот врв. Нека O е центарот на сферата опишана околу неа и нека точката E е проекцијата на точката O врз рамнината ABC. Од $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = R$ следува



дека $\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{CE}$. ΔABC е рамностран триаголник, па следува дека точката E е центарот на опишаната кружница околу него. Бидејќи пирамидата е правилна, точката D исто така се проектира во E. Значи, точките E, D и O се колинеарни. Од ΔABC имаме $\overline{CE}=\frac{b\sqrt{3}}{3}$ **(5 поени)**, а од рамнокракиот ΔADC имаме дека $\overline{CD}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ **(5 поени)**. ΔDEC е правоаголен, па $\sin\angle CDE=\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$ **(7 поени)**. Од рамнокракиот ΔDOC имаме дека $\overline{DO}=\overline{OC}=r$, па $r=\overline{DO}=\frac{\overline{CD}}{2\cos\angle CDE}=\frac{b}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$ **(8 поени)**.

3АБ. Најди ги сите вредности на реалниот параметар m за кои функцијата $f(x)=\left|x^2-6x\right|-m$ има точно три реални нули.

Решение. Дадената функција $f(x)=\left|x^2-6x\right|-m$ можеме да ја запишеме во облик

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6x-m, & x^2-6x\geq 0 \\ -\left(x^2-6x\right)-m, & x^2-6x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^2-6x-m, & x\in(-\infty,0]\cup[6,+\infty) \\ -x^2+6x-m, & x\in(0,6) \end{cases}. \textbf{ (5 поени)}$$

За да има точно три нули, можни се два случаја и тоа равенката $x^2-6x-m=0$ да има точно два реални и различни корена, а равенката $-x^2+6x-m=0$ да има двоен корен или обратно.

Случај 1. Равенката $x^2-6x-m=0$ има два реални и различни корена ако нејзината дискриминанта $D_1>0$, односно $36+4m>0$. Равенката $-x^2+6x-m=0$ има двоен корен ако нејзината дискриминанта $D_2=0$, односно $36-4m=0$. Според тоа го добиваме следниот систем $\begin{cases} D_1>0 \\ D_2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 36+4m>0 \\ 36-4m=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4m>-36 \\ 4m=36 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>-9 \\ m=9 \end{cases}$, од каде следува дека единствено решение на системот е $m=9$ **(5 поени)**. Да провериме дали за $m=9$ решенијата на равенките припаѓаат во соодветните интервали. За $m=9$ равенката $x^2-6x-m=0$ преминува во равенка од облик $x^2-6x-9=0$ која има решенија $x_{1,2}=3\pm3\sqrt{2}$ и тие припаѓаат на $(-\infty,0]\cup[6,+\infty)$. За $m=9$ равенката $-x^2+6x-m=0$ преминува во облик $x^2-6x+9=0$ која има двоен корен $x=3$ и тој припаѓа на $(0,6)$ **(5 поени)**.

Случај 2. Равенката $x^2-6x-m=0$ има двоен корен ако нејзината дискриминанта $D_1=0$, односно $36+4m=0$. Равенката $-x^2+6x-m=0$ има два реални и различни корена ако нејзината дискриминанта $D_2>0$, односно $36-4m>0$. Според тоа го добиваме следниот систем $\begin{cases} D_1=0 \\ D_2>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 36+4m=0 \\ 36-4m>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4m=-36 \\ -4m>-36 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=-9 \\ m<9 \end{cases}$, од каде следува дека единствено решение на систем $m=-9$ **(5 поени)**. Да провериме дали за $m=-9$ решенијата на равенките припаѓаат во соодветните интервали. За $m=-9$ равенката $x^2-6x-m=0$ преминува во равенка од облик $x^2-6x+9=0$ која има двоен корен $x=3$, но тој не припаѓа на интервалот $(-\infty,0]\cup[6,+\infty)$ **(5 поени)**.

Заклучуваме дека единствена можна вредност за параметарот m за кои функцијата $f(x)=\left|x^2-6x\right|-m$ има точно три реални нули е $m=9$ и тие се $x_1=3-\sqrt{18}$, $x_2=3+\sqrt{18}$ и $x_3=3$.

4А. Докажи дека $2\sin2^\circ+4\sin4^\circ+6\sin6^\circ+...+180\sin180^\circ=90\mathrm{ctg}1^\circ$.

Решение. Ќе докажеме дека $2\sin2^\circ\sin1^\circ+4\sin4^\circ\sin1^\circ+6\sin6^\circ\sin1^\circ+...+178\sin178^\circ\sin1^\circ=90\cos1^\circ$ **(5 поени)**.
Левата страна на равенството е еквивалентна со

$$1\cdot2\sin2^\circ\sin1^\circ+2\cdot2\sin4^\circ\sin1^\circ+3\cdot2\sin6^\circ\sin1^\circ+...+89\cdot2\sin178^\circ\sin1^\circ \textbf{ (5 поени)}.$$

Користејќи го идентитетот $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$, последниот израз е еквивалентен со

$$\left(\cos1^\circ-\cos3^\circ\right)+2\left(\cos3^\circ-\cos5^\circ\right)+...+89\left(\cos177^\circ-\cos179^\circ\right)=$$

$$=\cos1^\circ+\cos3^\circ+\cos5^\circ+\cos7^\circ+...+\cos177^\circ-89\cos179^\circ. \textbf{ (5 поени)}$$

Користејќи го идентитетот $\cos\alpha=-\cos\left(180^\circ-\alpha\right)$, групирајќи, од последниот израз добиваме дека

$$\cos 1^\circ + \left(\cos 3^\circ + \cos 177^\circ\right) + \left(\cos 5^\circ + \cos 175^\circ\right) + \ldots + \left(\cos 89^\circ + \cos 91^\circ\right) - 89\cos 179^\circ = \quad \textbf{(5 поени)}$$

$$= \cos 1^\circ + \left(\cos 3^\circ + \cos\left(180^\circ - 3^\circ\right)\right) + \left(\cos 5^\circ + \cos\left(180^\circ - 175^\circ\right)\right) + \ldots + \left(\cos 89^\circ + \cos 91^\circ\right) - 89\cos\left(180^\circ - 179^\circ\right) =$$

$$= \cos 1^\circ + \left(\cos 3^\circ - \cos 3^\circ\right) + \left(\cos 5^\circ - \cos 5^\circ\right) + \ldots + \left(\cos 89^\circ - \cos 89^\circ\right) - 89\cos\left(180^\circ - 179^\circ\right) =$$

$$= \cos 1^\circ - 89\left(-\cos 1^\circ\right) = \cos 1^\circ + 89\cos 1^\circ = 90\cos 1^\circ. \textbf{ (5 поени)}$$

Со тоа докажавме дека $2\sin 2^\circ \sin 1^\circ + 4\sin 4^\circ \sin 1^\circ + 6\sin 6^\circ \sin 1^\circ + \ldots + 178\sin 178^\circ \sin 1^\circ = 90\cos 1^\circ$, односно $2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + 6\sin 6^\circ + \ldots + 180\sin 180^\circ = 90\mathrm{ctg}1^\circ$.

4Б. Ако $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x = 1$, пресметај ја вредноста на изразот $\sin^6 x - 4\sin^4 x + 8\sin^2 x$.

Решение. Од $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x = 1$ имаме дека $\cos x + \cos^3 x = 1 - \cos^2 x$. Со квадрирање на левата и десната страна на последното равенство добиваме дека

$$\left(\cos x + \cos^3 x\right)^2 = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 x + 2\cos^4 x + \cos^6 x = \sin^4 x \Leftrightarrow \textbf{(10 поени)}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + 2\left(1 - \sin^2 x\right)^2 + \left(1 - \sin^2 x\right)^3 = \sin^4 x \Leftrightarrow \textbf{(5 поени)}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + 2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x + 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x = \sin^4 x \Leftrightarrow \textbf{(5 поени)}$$

$$\Leftrightarrow 4 - 8\sin^2 x + 4\sin^4 x - \sin^6 x = 0 \Leftrightarrow \sin^6 x - 4\sin^4 x + 8\sin^2 x = 4. \textbf{ (5 поени)}$$

ЧЕТВРТА ГОДИНА

1А.2Б. (Сигма 123, Задача 1 од Училницата) Одреди ги сите парови цели броеви x и y такви што $1+2026x+2028y=xy$.

Решение. За целите броеви x и y, ќе го разгледаме производот:

$$\left(x-2028\right)\left(y-2026\right)=xy-2028y-2026x+2026\cdot 2028. \quad \textbf{(10 поени)}$$

Да забележиме дека важи $1+2k\cdot\left(2k+2\right)=1+4k^2+4k=\left(2k+1\right)^2$ и ако го искористиме условот, за производот добиваме: $\left(x-2028\right)\left(y-2026\right)=1+2026\cdot 2028=2027^2$ **(7 поени)**. Бројот 2027 е прост број, па следува дека $x-2028\in\left\{\pm 1,\pm 2027,\pm 2027^2\right\}$. Ги добиваме следниве парови за x и y:

$\left(x,y\right)\in\left\{\left(2029,2027^2+2026\right),\left(2027,-2027^2+2026\right),\left(4055,4053\right),\left(1,-1\right),\right.$

$\left.\left(2027^2+2028,2027\right),\left(-2027^2+2028,2025\right)\right\}$ **(8 поени).**

1Б. (Задачи од Училница Сигма 119) Одреди ја разликата на аритметичката прогресија со прв член 4, кај која a_{10}, a_{31} и a_{34} се страни на правоаголен триаголник со хипотенуза a_{34}.

Решение. Од Питагорината теорема имаме: ${a_{10}}^2+{a_{31}}^2={a_{34}}^2$ **(3 поени)**. Ако ги означиме прввиот елемент од прогресијата со a_1 и разликата со d, тогаш последното равенство станува:

$$\left(a_1+9d\right)^2+\left(a_1+30d\right)^2=\left(a_1+33d\right)^2. \quad \textbf{(10 поени)}$$

Со средување на изразот добиваме ${a_1}^2+12a_1d-108d^2=0$ **(4 поени)**, и ако во овој израз ставаме $a_1=4$ добиваме $27d^2-12d-4=0$ **(2 поени)**. Решенијата на последната квадратна равенка се $d_1=\frac{2}{3}$ и $d_2=-\frac{2}{9}<0$ **(3 поени)**. Го елиминираме второто решение, бидејќи за страните на триаголникот тогаш ќе се добијат негативни броеви, што е невозможно **(2 поени)**. Значи бараната вредност за разликата е $d=\frac{2}{3}$. **(1 поен)**

2А. (Задачи од Училница Сигма 117) Најди ја равенката на заедничката тангента на параболите $y=x^2+2x+2$ и $y=x^2+x+2$.

Решение. Нека заедничката тангента има равенка $y=kx+b$ **(2 поени)**. Тогаш секоја од равенките: $x^2+2x+2=kx+b$ и $x^2+x+2=kx+b$ има единствено решение **(5 поени)**. Јасно, детерминантите на квадратните равенки $x^2+(2-k)x+2-b=0$ и $x^2+(1-k)x+2-b=0$ се и двете нули, имено:

$D_1=\left(2-k\right)^2-4\left(2-b\right)=k^2-4k+4b-4=0$ и $D_2=\left(1-k\right)^2-4\left(2-b\right)=k^2-2k+4b-7=0$ **(10 поени)**.

Со одземање на втората од првата равенка добиваме $-2k+3=0$ или $k=\frac{3}{2}$ **(5 поени)**.

Од првата равенка следи $b=\frac{4+4k-k^2}{4}=\frac{31}{16}$ **(2 поени)**, па бараната равенка е $y=\frac{3}{2}x+\frac{31}{16}$ **(1 поен)**.

3А. Нека $a_0=2023$ и $a_n=\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+1}$ за секој природен број *n*. Докажи дека за $n\geq 0$ важи $a_n\geq 2023-n$.

Решение 1. Ќе го искористиме принципот на математичка индукција. Јасно, $a_0=2023\geq 2023-0$ **(2 поени)**. Да претпоставиме дека $a_k\geq 2023-k$ за некој $k\geq 1$ **(3 поени)**. За a_{k+1} добиваме:

$$a_{k+1}=\frac{a_k^2}{a_k+1}>\frac{a_k^2-1}{a_k+1}=a_k-1\geq(2023-k)-1=2023-(k+1). \quad \textbf{(20 поени)}$$

Решение 2. Јасно $a_n>0$, за секој природен број *n*. Бидејќи $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_n+1}<1$ добиваме дека $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ е строго монотоно опаѓачка низа **(5 поени)**. Ако искористиме дека

$$a_{k+1}-a_k=\frac{a_k^2}{a_k+1}-a_k=\frac{-a_k}{a_k+1}=\frac{1}{a_k+1}-1, \quad \textbf{(5 поени)} \text{ за } n\geq 1 \text{ добиваме:}$$

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = 2023 + \left(\frac{1}{a_0+1} - 1\right) + \left(\frac{1}{a_1+1} - 1\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{a_{n-1}+1} - 1\right) = 2023 - n + \left(\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}+1}\right) > 2023 - n.$$

(15 поени)

3Б. Нека k е парен број. Дали е можно да се запише бројот 1 како збир од реципрочните вредности на k непарни природни броеви?

Решение. Да претпоставиме дека постојат непарни природни броеви $n_1, n_2, ..., n_k$, каде k е парен број, така што важи:

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k}. \quad (*) \quad \textbf{(3 поени)}$$

Равенството (*) може да се изрази во облик: $1 = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n_1 n_2 \cdots n_k}$, каде $m_i = \frac{n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}{n_i} = n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{i-1} \cdot n_{i+1} \cdot \ldots \cdot n_k$, за $i \in \{1, 2, ..., k\}$ **(12 поени)**. Оттука добиваме дека $n_1 n_2 \cdots n_k = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ **(2 поени)**.

Притоа:

– Бројот $n_1 n_2 \cdots n_k$ е непарен бидејќи е производ на непарни броеви. **(3 поени)**

– Бројот $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ е парен, бидејќи е збир на парен број (k) непарни броеви. **(3 поени)**

Оттука, заклучуваме дека броителот и именителот на дропката претставена со десната страна во (*) се различни броеви. Значи, такво запишување на бројот 1 не е можно. **(2 поени)**

4АБ. Колку најмалку броеви треба да бидат отстранети од множеството $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2023\}$, така што ниту еден од преостанатите елементи во множеството да не е производ на два различни преостанати елементи?

Решение. Условот на задачата ќе биде исполнет кога преостанатите елементи во M ќе бидат доволно големи, така што производот на ниту еден пар од нив нема да припаѓа меѓу нив. Најпрво, да воочиме дека од множеството M мора да биде отстранет бројот 1, бидејќи во спротивно неговиот производ со било кој друг елемент a од M ќе даде $a \cdot 1 = a$ од M. **(2 поени)**

Натаму, јасно е дека малите броеви 2,3, ..., се множители во најголем број производи кои припаѓаат во M. (Специјално, во M припаѓаат производите на бројот 2 со броевите 3, 4, ..., 1011, производите на бројот 3 со броевите 4, 5, ..., 674, производите на бројот 4 со броевите 5, 6, 7, ..., 505, итн.) Најголемиот број чиј што производ со друг број припаѓа во M е бројот 44, чијшто производ со 45 е $44 \cdot 45 = 1980$. **(3 поени)**

Ќе го искористиме бројот $44 + 45 = 89$ за да ја изведеме следната конструкција од дисјунктни триелементни множества, дефинирани во облик $\{k, 89 - k, k \cdot (89 - k)\}$ за $k = 2, 3, ..., 44$:

$$\{2, 87, 174\}, \ \{3, 86, 258\}, \ldots, \ \{44, 45, 1980\}.$$

Јасно, сите елементи на овие множества се елементи на M, и лесно се увидува дека секој пар од множества е взаемно дисјунктен пар. **(13 поени)**

Сега, за да секоја од овие тројки од броеви го исполни условот од задачата, потребно и доволно е од секое од наведените множества да отстраниме по еден број. **(2 поени)**

На пример, да ги отстраниме најмалите броеви од секое множество. Со тоа се отстранети 43 броеви, па заедно со бројот 1, вкупно отстранети се 44 броеви. Преостанатото множество е: $\{45, 46, 47, \ldots, 2023\}$, при што најмалиот можен производ во него е $45 \cdot 46 = 2070 > 2023$ и е надвор од множеството. Со тоа условот на задачата за ова множество е исполнет. **(3 поени)**

Од друга страна, согласно горната конструкција, јасно е дека со враќање на било кој од исфрлените броеви ќе може да се формира производ кој ќе припаѓа во M. Заклучуваме дека најмалиот број елементи кои треба да се отстранат од множеството M изнесува 44. **(2 поени)**