65 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА

УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА

16.04.2022

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

Прва година

1. За броевите a,b, $a\neq 1$, $b\neq 1$ важи $a+b=1$. Докажи дека $\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2b-2a}{a^2b^2+3}$.

Решение. Од $a+b=1$ имаме дека $a=1-b$ и $b=1-a$. Имајќи ги во предвид овие три равенства, имаме

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}&=\frac{1-b}{(b-1)(b^2+b+1)}-\frac{1-a}{(a-1)(a^2+a+1)}=\\
&=-\frac{1}{(b^2+b+1)}+\frac{1}{(a^2+a+1)}=\frac{b^2+b+1-a^2-a-1}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}=\\
&=\frac{(b^2-a^2)+(b-a)}{a^2b^2+a^2b+a^2+ab^2+ab+a+b^2+b+1}=\\
&=\frac{(b-a)(b+a)+(b-a)}{a^2b^2+(a^2+(a^2b+ab^2)+ab+b^2)+(a+b)+1}=\\
&=\frac{(b-a)\cdot 1+(b-a)}{a^2b^2+(a^2+ab(a+b)+ab+b^2)+1+1}=\\
&=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+(a^2+ab\cdot 1+ab+b^2)+2}=\\
&=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+(a+b)^2+2}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+1^2+2}=\frac{2b-2a}{a^2b^2+3},
\end{aligned}$$

со што го покажавме тврдењето.

2. Најди го најмалиот природен број n за кој што $n^2+2022n$ е полн квадрат на природен број.

Решение. Нека $m\in\mathbb{N}$ е природен број таков што $n^2+2022n=m^2$. Последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$n^2+2022n=m^2 \Leftrightarrow \left(n+1011\right)^2-1011^2=m^2 \Leftrightarrow \left(n+1011\right)^2-m^2=1011^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(n+1011+m\right)\left(n+1011-m\right)=1011^2 \Leftrightarrow \left(n+1011+m\right)\left(n+1011-m\right)=3^2\cdot 337^2.$$

Нека $n+1011+m=p$ и $n+1011-m=q$, тогаш $p\cdot q=3^2\cdot 337^2$, $p,q\in\mathbb{N}$ и $p>q$. Значи, $(p,q)\in\{(1011^2,1),(3\cdot 337^2,3),(337^2,3^2),(3^2\cdot 337,337)\}$. Со одземање на двете равенки добиваме $2m=p-q$, од каде $m=\frac{p-q}{2}$, па со замена во првата равенка се добива $n=p-1011-m=p-1011-\frac{p-q}{2}=\frac{p+q}{2}-1011$.

Најмалиот n се добива за најмала вредност на збирот $p+q$, па затоа $p+q=3^2\cdot 337+337=(3^2+1)\cdot 337=10\cdot 337=3370$, а $n=\frac{p+q}{2}-1011=\frac{3370}{2}-1011=674$.

3. Најди ги сите подредени парови од цели броеви (x,y) за кои што важи $x^3+y^3=(x+y)^2$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во еквивалентна форма

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)^2 \text{ т.е. } (x+y)(x^2-xy+y^2-x-y)=0,$$

од каде добиваме дека $x+y=0$ или $x^2-xy+y^2-x-y=0$. Од $x+y=0$ ги добиваме решенијата $(k,-k)$, $k\in\mathbb{Z}$. Ако второто равенство го помножиме со 2, ќе добиеме $2x^2-2xy+2y^2-2x-2y=0$, односно $x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1=2$ т.е. $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$, од каде заклучуваме дека $(x-y)^2,(x-1)^2,(y-1)^2\in\{0,1\}$.

Ако $(x-y)^2=0,(x-1)^2=1,(y-1)^2=1$, ги добиваме решенијата $(0,0)$ и $(2,2)$.

Ако $(x-y)^2=1,(x-1)^2=0,(y-1)^2=1$, ги добиваме решенијата $(1,0)$ и $(1,2)$.

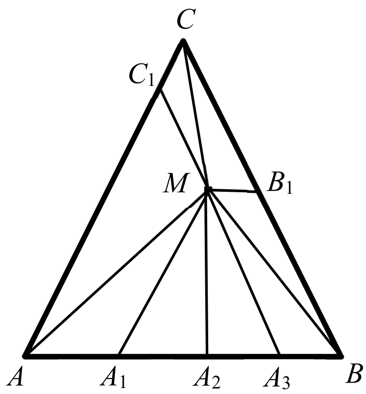
Ако $(x-y)^2=1,(x-1)^2=1,(y-1)^2=0$, ги добиваме решенијата $(0,1)$ и $(2,1)$.

Значи, множеството решенија е $\{(k,-k)\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(2,2),(1,0),(1,2),(0,1),(2,1)\}$.

4. Нека M е точка од внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC. Докажи дека

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2<2\overline{AB}^2.$$

Решение. Нека A_1 е точка од страната AB така што $MA_1 \,||\, CA$, B_1 е точка од страната BC така што $MB_1 \,||\, AB$ и C_1 е точка од страната CA така што $MC_1 \,||\, BC$. Нека $\overline{MA_1}=x$, $\overline{MB_1}=y$ и $\overline{MC_1}=z$.



Четириаголникот C_1AA_1M е рамнокрак трапез затоа што $MA_1 \,||\, CA$, а од $MC_1 \,||\, BC$ имаме дека $\measuredangle MC_1A=\measuredangle BCA=60^\circ=\measuredangle A_1AC_1$. Од тука $\overline{AA_1}=\overline{MC_1}=z$. Нека A_2 е точка од страната AB така што $MA_2\perp AB$, и A_3 е точка од страната AB, така што $MA_3 \,||\, BC$. Тогаш, триаголникот A_1A_3M е рамностран триаголник, $\overline{A_1A_3}=\overline{MA_1}=x$, $\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}\overline{A_1M}=\frac{x}{2}$.

Четириаголникот A_3BB_1M е паралелограм па имаме дека $\overline{A_3B}=\overline{MB_1}=y$, од каде пак $a=\overline{AB}=\overline{AA_1}+\overline{A_1A_3}+\overline{A_3B}=x+y+z$.

Понатаму, од Питагорината теорема за триаголниците AA_2M и A_1A_2M имаме

$$\overline{MA}^2=\overline{AA_2}^2+\overline{MA_2}^2=\overline{AA_2}^2+\overline{MA_1}^2-\overline{A_1A_2}^2=$$
$$=\left(z+\frac{x}{2}\right)^2+x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2=z^2+zx+\left(\frac{x}{2}\right)^2+x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2=z^2+zx+x^2.$$

Слично, $\overline{MB}^2=x^2+xy+y^2$ и $\overline{MC}^2=y^2+yz+z^2$. Конечно,

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=z^2+zx+x^2+x^2+xy+y^2+y^2+yz+z^2=$$
$$=2(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)-3(xy+xz+yz)<$$
$$<2(x+y+z)^2=2a^2=2\overline{AB}^2,$$

што требаше да се докаже.

Втора година

1. Нека k е природен број и нека $z_1,z_2,...,z_{2022}$ се ненулти комплексни броеви со ист модул такви што $z_1^k+z_2^k+...+z_{2022}^k=0$. Докажи дека $\frac{1}{z_1^k}+\frac{1}{z_2^k}+...+\frac{1}{z_{2022}^k}=0$.

Решение. Нека $r=|z_1|=|z_2|=...=|z_{2022}|>0.$ Тогаш

$$\frac{1}{z_1^k}+\frac{1}{z_2^k}+...+\frac{1}{z_{2022}^k}=\frac{1}{z_1^k}\cdot\frac{\overline{z}_1^k}{\overline{z}_1^k}+\frac{1}{z_2^k}\cdot\frac{\overline{z}_2^k}{\overline{z}_2^k}+...+\frac{1}{z_{2022}^k}\cdot\frac{\overline{z}_{2022}^k}{\overline{z}_{2022}^k}=\frac{\overline{z}_1^k}{r^{2k}}+\frac{\overline{z}_2^k}{r^{2k}}+...+\frac{\overline{z}_{2022}^k}{r^{2k}}=\frac{1}{r^{2k}}(\overline{z}_1^k+\overline{z}_2^k+...+\overline{z}_{2022}^k)=$$

$$\frac{1}{r^{2k}}\overline{(z_1^k+z_2^k+...+z_{2022}^k)}=\frac{1}{r^{2k}}\cdot 0=0\,.$$

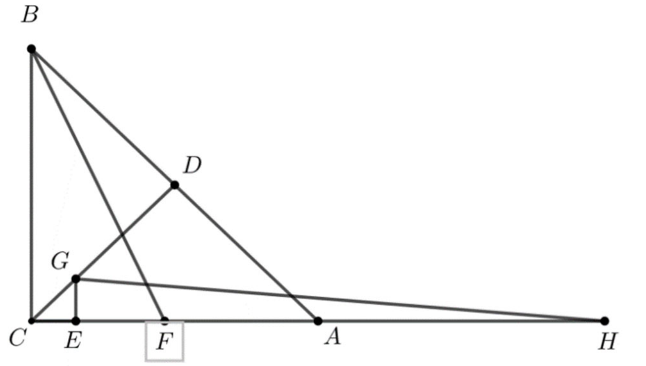
2. Реши ја равенката $(5-2x)^2+(\frac{1}{2-x}-1)^2=9$ во множеството реални броеви.

Решение. Јасно, $x\neq 2$. Нека $2-x=t$ т.е. $x=2-t$. Тогаш, $5-2x=5-4+2t=1+2t$ па добиваме еквивалентна равенка $(1+2t)^2+(\frac{1}{t}-1)^2=9$. Оттука $4t^2+4t+1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1=9$, односно $4t^2-4+\frac{1}{t^2}+4t-\frac{2}{t}=3$, за на крај да добиеме $(2t-\frac{1}{t})^2+2(2t-\frac{1}{t})-3=0$. Со уште една смена имаме квадратна равенка $z^2+2z-3=0$ со решенија 1 и -3, па затоа важи $2t-\frac{1}{t}=1$ или $2t-\frac{1}{t}=-3$.

Ако $2t-\frac{1}{t}=1$, тогаш $2t^2-t-1=0$ и добиваме решенија $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}$, т.е. $t_1=1$, $t_2=-\frac{1}{2}$, а ако $2t-\frac{1}{t}=-3$, тогаш $2t^2+3t-1=0$ па ги имаме решенија $t_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$.

Конечно, од $x=2-t$ добиваме: $x_1=2-t_1=1$, $x_2=2-t_2=\frac{5}{2}$, $x_{3,4}=2-t_{3,4}=\frac{11\pm\sqrt{17}}{4}$.

3. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. На катетата CA се избрани точки E и F такви што $2\overline{CE}=\overline{EF}$. Нормалата на отсечката CA издигната во точката E и тежишната линија на триаголникот ABC повлечена од темето C, се сечат во точка G. Нека H е точка на правата CA таква што точката A е средина на отсечката CH. Докажи дека правите GF и BH се паралелни прави.



Решение. Нека $\overline{CE}=x$, $\overline{GE}=y$. Тогаш, $\overline{EF}=2x$, $\overline{AF}=b-3x$ а $\overline{FH}=2b-3x$. Триаголниците CEG и ACB се слични (правоаголни и $\angle GCE=\angle BAC$ (DC и DA се радиуси на опишаната кружница околу ΔABC па ΔADC е рамнокрак)), а оттука важи $\frac{\overline{GE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, т.е. $\frac{y}{x}=\frac{a}{b}$, односно имаме $y=\frac{ax}{b}$. За плоштината на триаголникот BGF имаме:

$$P_{BGF}=P_{BCF}-P_{GBCE}-P_{EFG}=\frac{3x\cdot a}{2}-\frac{a+y}{2}x-\frac{2x\cdot y}{2}=\frac{2xa-3xy}{2}=\frac{2xa-3x\frac{ax}{b}}{2}=\frac{2abx-3ax^2}{2b}$$

$$=\frac{ax}{b}\frac{2b-3x}{2}=\frac{y(2b-3x)}{2}=\frac{\overline{GE}\cdot\overline{FH}}{2}=P_{FHG}\,.$$

Заклучуваме дека триаголниците BGF и HGF се еднаквоплоштни и имаат иста страна, GF, па затоа нивните висини од темињата B и H се еднакви, односно растојанијата од темињата B и H до правата GF се еднакви. Оттука следува дека GF и BH се паралелни прави.

4. За природните броеви a,b,c, $a<b<c$ важи дека НЗД$(c-a,c-b)=1$. Нека постои цел број d таков што $a+d,b+d,c+d$ се должини на страни на правоаголен триаголник. Докажи дека постојат цели броеви l и m за кои важи $c+d=l^2+m^2$.

Решение. Од условот $a<b<c$ и од тоа што $a+d,b+d,c+d$ се должини на страни на правоаголен триаголник имаме дека важи равенството $(a+d)^2+(b+d)^2=(c+d)^2$. Со квадрирање и средување

добиваме $d^2+\left(2a+2b-2c\right)\cdot d+\left(a^2+b^2-c^2\right)=0.$ Ја решаваме последната равенка како квадратна равенка по d и добиваме решенија $d_{1/2}=-\left(a+b-c\right)\pm\sqrt{\left(a+b-c\right)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)}$. Решенијата ги трансформираме до следниот облик $d_{1/2}=-\left(a+b-c\right)\pm\sqrt{2\left(c-a\right)\cdot\left(c-b\right)}.$

Бројот d е цел број, од каде заклучуваме дека $2\left(c-a\right)\cdot\left(c-b\right)$ е полн квадрат на природен број, односно $2\left(c-a\right)\cdot\left(c-b\right)=x^2$, за $x\in\mathbb{N}.$ Од условот на задачата НЗД$(c-a,c-b)=1$ мора да важи $\left(c-a\right)=2p^2$ и $\left(c-b\right)=q^2$ или $\left(c-a\right)=p^2$ и $\left(c-b\right)=2q^2$, при што во двата случаи $p,q>0,$ НЗД$\left(p,q\right)=1$. Тогаш добиваме $d_{1/2}=-\left(a+b-c\right)\pm 2pq$.

Заради симетрија, ќе го разгледаме само случајот $\left(c-a\right)=2p^2$ и $\left(c-b\right)=q^2$, од каде имаме

$$c+d=c-\left(a+b-c\right)\pm 2pq=c-a+c-b\pm 2pq=2p^2+q^2\pm 2pq=\left(p\pm q\right)^2+p^2.$$

Значи $c+d=\left(p\pm q\right)^2+p^2=l^2+m^2$, за $l=p\pm q,\ m=p,$ што требаше и да се докаже.

Трета година

1. Реши ја равенката $y^3=x^3+8x^2-6x+8$ во множеството природни броеви.

Решение. Да го разгледаме изразот $y^3-(x+1)^3$, во кој со замена на равенството од условот добиваме

$$y^3-(x+1)^3=y^3-x^3-3x^2-3x-1=5x^2-9x+7.$$

Квадратната равенка $5x^2-9x+7=0$ има дискриминанта $D<0$, од каде следува дека квадратната функција $f(x)=5x^2-9x+7$ нема реални решенија и $f(x)=5x^2-9x+7>0$. Тогаш и изразот $y^3-(x+1)^3>0$, односно важи $y>x+1$.

Од друга страна, на сличен начин како погоре добиваме дека

$$y^3-(x+3)^3=y^3-x^3-9x^2-27x-27=-x^2-33x-19=-(x^2+33x+19),$$

но за $x\in\mathbb{N}$ ($x>0$), последниот израз е негативен, односно $y^3-(x+3)^3=-(x^2+33x+19)<0$, од каде $y<x+3$. Решенијата на равенката се во множеството природни броеви, па затоа од $x+1<y<x+3$, останува единствена можност $y=x+2.$ Со замена во почетната равенка имаме $(x+2)^3=x^3+8x^2-6x+8$ односно $x^3+6x^2+12x+8=x^3+8x^2-6x+8$. Добиваме еквивалентна равенка $2x^2-18x=0$, односно $2x(x-9)=0$. Од тука решенијата се $x=9$, $y=11$. (Другото решение на последната равенка, вредноста $x=0$, не припаѓа на множеството природни броеви, па не се разгледува).

2. Најди ги сите реални броеви a и b $(a<b)$ за кои се исполнети условите $|\lg(a+1)|=\left|\lg\left(-\frac{b+1}{b+2}+1\right)\right|$ и $|\lg(10a+6b+22)|=4\cdot\lg 2$.

Решение. Забележуваме дека мора $0<a+1$, а од условот на задачата важи и $0<a+1<b+1<b+2.$

Од $|\lg(a+1)|=\left|\lg\left(-\frac{b+1}{b+2}+1\right)\right|$ имаме $\left|\lg(a+1)\right|=\left|\lg\left(-\frac{b+1}{b+2}+1\right)\right|=\left|\lg\left(\frac{1}{b+2}\right)\right|=\left|-\lg\left(b+2\right)\right|=\left|\lg\left(b+2\right)\right|.$

Потребно е да разгледаме два случаи:

Случај 1: За $a+1=b+2$, од вториот услов следува дека

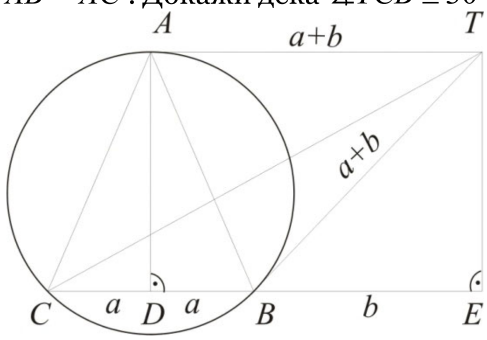
$$|\lg(10a+6b+22)|=4\cdot\lg 2 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\lg(16b+32)\right|=\lg 16.$$

Тогаш, можни се следните случаи: $16b+32=\frac{1}{16}$ или $16b+32=16$, односно $b_1=-2+\frac{1}{256}$ и $b_2=-1$, но и двете решенија противречат на условот $0<b+1$.

Случај 2: За $a+1=\dfrac{1}{b+2}$, имаме $10a+6b+22=10(a+1)+6(b+2)=6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}$. Сега, од вториот услов добиваме: $\left|\lg(10a+6b+22)\right|=\left|\lg\left(6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}\right)\right|=\lg 16$, односно $6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}=16$ или $6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}=\dfrac{1}{16}$. Ќе воведеме смена $b+2=w$ во двата случаи. Во првиот случај, добиваме $6w^2-16w+10=0$, односно $w_1=1, w_2=\dfrac{10}{6}$, од каде $b_1=-1, b_2=-\dfrac{1}{3}$. Бидејќи $0<b+1$, $b_1=-1$ не е решение. За $b=-\dfrac{1}{3}, a=-\dfrac{2}{5}$ добиваме едно решение. Во вториот случај, еквивалентната равенка по w е $96w^2-w+160=0$, што е квадратна равенка која нема реални решенија. Останува, $b=-\dfrac{1}{3}, a=-\dfrac{2}{5}$ да е единственото решение кое ги задоволува двата услови на задачата.

3. Тангентите повлечени од точка T кон кружница k ја допираат кружницата во точки A и B. Нека C е точка од кружницата, различна од точките A и B, таква што $\overline{AB}=\overline{AC}$. Докажи дека $\measuredangle TCB \le 30^0$.

Решение. Согласно условите на задачата, ΔABC е рамнокрак. Нека D е подножјето на висината спуштена од врвот A. Јасно, центарот на кружницата лежи на AD, а заради фактот дека AT е тангента следи дека $AT \perp AD$. Нека E е точка таква да $ADET$ е правоаголник. Означуваме $\overline{CD}=\overline{DB}=a$ и $\overline{BE}=b$. Тогаш $\overline{BT}=\overline{AT}=a+b$. Тврдењето на задачата $\measuredangle TCB \le 30^0$ е еквивалентно со $\cos\measuredangle TCB \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, односно $\overline{CE} \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{CT}$ или



уште повеќе $\overline{CE}^2 \ge \dfrac{3}{4}\overline{CT}^2$. Од Питагорината теорема за триаголниците CTE, BTE добиваме $\overline{CT}^2=\overline{CE}^2+\overline{TE}^2=\overline{CE}^2+\overline{BT}^2-\overline{BE}^2=(2a+b)^2+(a+b)^2-b^2=5a^2+b^2+6ab$. Тврдењето добива облик $(2a+b)^2 \ge \dfrac{3}{4}(5a^2+6ab+b^2)$, а е еквивалентно со $a^2-2ab+b^2 \ge 0$ односно со $(a-b)^2 \ge 0$. Како последното неравенство е секогаш точно, точни се и сите претходни еквивалентни неравенства, па и тврдењето на задачата.

4. Ако за реалните броеви x и y важи релацијата $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$, најди ја најмалата вредност на изразот x^2+y^2 и одреди за кои вредности на x и y се достигнува таа.

Решение. Дадената релација може да се напише и во облик $\left(\dfrac{x+5}{14}\right)^2+\left(\dfrac{y-12}{14}\right)^2=1$, па затоа има смисла да се стави смена $\dfrac{x+5}{14}=\cos\theta,\ \dfrac{y-12}{14}=\sin\theta,\ \theta\in[0,2\pi)$ (јасно, во тој случај се добива основниот тригонометриски идентитет $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$). Ако ги изразиме променливите x и y, имаме

$$x^2+y^2=(14\cos\theta-5)^2+(14\sin\theta+12)^2=365+28\cdot(12\sin\theta-5\cos\theta)=$$
$$=365+28\cdot 13\cdot\left(\frac{12}{13}\sin\theta-\frac{5}{13}\cos\theta\right).$$

Да го разгледаме правоаголниот триаголник со страни 5, 12 и 13 (навистина $5^2+12^2=13^2$). Ако φ е помалиот остар агол на овој триаголник, тогаш имаме $\sin\varphi=\dfrac{5}{13}, \cos\varphi=\dfrac{12}{13}$ и оттука добиваме

$$x^2+y^2=365+28\cdot 13\cdot\left(\frac{12}{13}\sin\theta-\frac{12}{13}\cos\theta\right)=$$
$$=365+364\left(\cos\varphi\sin\theta-\sin\varphi\cos\theta\right)=365+364\sin(\theta-\varphi).$$

Тогаш $x^2+y^2=365+364\sin(\theta-\varphi)\geq 365-364=1$. Значи, најмалата вредност на изразот x^2+y^2 е 1 и истата се достигнува за $\theta-\varphi=\frac{3\pi}{2}$ односно $\theta=\frac{3\pi}{2}+\varphi.$

Во тој случај $x=14\cos\theta-5=14\sin\varphi-5=\frac{5}{13}$ и $y=14\sin\theta+12=14(-\cos\varphi)+12=-\frac{12}{13}.$

Четврта година

1. Нека $n>1$ е даден природен број. Докажи дека не постои нетривијална бесконечна аритметичка прогресија чии членови се n -ти степени на природни броеви.

Решение. Нека $a_1^n, a_2^n, a_3^n, \ldots$ се членови на бесконечна аритметичка прогресија. Бидејќи членовите на низата се различни природни броеви (низата е нетривијална), добиваме дека мора $a_1<a_2<a_3<\ldots$

Од условот за аритметичка прогресија важи $a_{k+1}^n-a_k^n=a_k^n-a_{k-1}^n$ за секој $k\geq 2$. Разложуваме и имаме:

$$(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-2}a_k+\ldots.+a_k^{n-1})=(a_k-a_{k-1})(a_k^{n-1}+a_k^{n-2}a_{k-1}+\ldots.+a_{k-1}^{n-1})\ \ldots.(1)$$

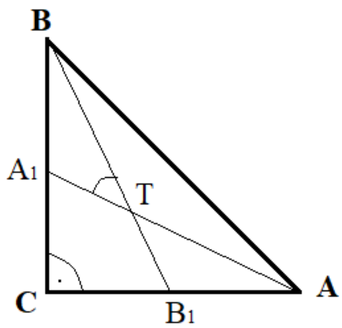
Бидејќи $a_k^{n-1}+a_k^{n-2}a_{k-1}+\ldots.+a_{k-1}^{n-1}<a_{k+1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-2}a_k+\ldots.+a_k^{n-1}$, за да важи (1) мора $a_{k+1}-a_k<a_k-a_{k-1}$ за секој $k\geq 2$. На овој начин добиваме бесконечна опаѓачка низа од природни броеви

$$a_2-a_1>a_3-a_2>a_4-a_3>\ldots.$$

што не е можно. Следува дека аритметичка прогресија со бараните својства не постои.

2. Тежишните линии повлечени кон катетите во правоаголен триаголник зафаќаат агол ϕ. Ако е познато дека $tg\,\phi=\frac{3}{4}$, најди ги аглите на триаголникот.

Решение. Нека ΔABC е со прав агол во темето C, катети $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$ и хипотенуза $\overline{AB}=c.$ Нека A_1 е средина на страната BC, B_1 е средина на страната CA, а должините на тежишните линии се $\overline{AA_1}=t_a$ и $\overline{BB_1}=t_b$. Нека T е тежиштето на триаголникот.



Од тригонометриското равенство $\cos^2\phi=\frac{1}{1+tg^2\phi}$ добиваме $\cos\phi=\frac{4}{5}$.

Користејќи дека $\measuredangle ATB_1=\measuredangle A_1TB=\phi$ и $\measuredangle ATB=180^\circ-\phi$, со примена на косинусната теорема имаме:

- Во ΔTA_1B: $\frac{a^2}{4}=\frac{t_a^{\,2}}{9}+\frac{4t_b^{\,2}}{9}-\frac{4t_at_b\cos\phi}{9}$,
- Во ΔTB_1A: $\frac{b^2}{4}=\frac{t_b^{\,2}}{9}+\frac{4t_a^{\,2}}{9}-\frac{4t_at_b\cos\phi}{9}$,
- Во ΔTAB: $c^2=\frac{4t_a^{\,2}}{9}+\frac{4t_b^{\,2}}{9}+\frac{8t_at_b\cos\phi}{9}$.

Од Питагорината теорема и горните равенства, по средување на изразите, добиваме:

$$\frac{20t_a^{\,2}}{9}+\frac{20t_b^{\,2}}{9}-\frac{32t_at_b\cos\phi}{9}=\frac{4t_a^{\,2}}{9}+\frac{4t_b^{\,2}}{9}+\frac{8t_at_b\cos\phi}{9}.$$

Заменувајќи $\cos\phi=\frac{4}{5}$, добиваме $\frac{16}{9}\left(t_a-t_b\right)^2=0$, т.е. $t_a=t_b$. Од овде следи дека ΔABC е рамнокрак, па земајќи в предвид дека е правоаголен заклучуваме дека неговите агли се $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

3. Најди ги сите решенија $k, l, m \in \mathbb{N}$ на равенката $k!l! = k! + l! + m!$. $(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)$.

Решение. Без губење на општоста, претпоставуваме дека $k \geq l$. Делејќи ја равенката со $l!$ добиваме

$$k! = \frac{k!}{l!} + 1 + \frac{m!}{l!} .$$

Бидејќи три члена во овој израз се цели броеви, тогаш и четвртиот е исто така цел број, од каде заклучуваме дека $m \geq l$. Натаму, збирот на десната страна е најмалку 3, од каде пак мора $k \geq 3$ и $k!$ е парен број. Оттука, точно еден од броевите $\frac{k!}{l!}, \frac{m!}{l!}$ е непарен број.

1) Да претпоставиме дека $\frac{k!}{l!}$ е непарен и $\frac{m!}{l!}$ е парен. Тогаш или $k = l$, или $k = l+1$ и l е парен, при што $m \geq l+1$.

- Ако $k = l$, тогаш $k! = 2 + \frac{m!}{l!}$. Ако $k = 3$, тогаш решението е $k = l = 3, m = 4.$ Ако пак $k > 3$, тогаш $k!$ е делив со 3, од каде следи дека бројот $k! - 2$ не е делив со 3, значи $m = k+1$ или $m = k+2$. Оттука добиваме дека $\frac{m!}{k!} = k+1$ или $\frac{m!}{k!} = (k+1)(k+2)$, од каде пак следи дека $k! = k+3$ или $k! = 2 + (k+1)(k+2)$. Со директна проверка утврдуваме дека $k = 3$ и $k = 4$ не се решенија, а за уште поголеми вредности на k левата страна на равенството е поголема од десната.

- Ако $k = l+1$ и l е парен, тогаш треба да се реши равенката $(l+1)! = l + 2 + \frac{m!}{l!}$.

Левата страна на равенката и $\frac{m!}{l!}$ се деливи со $l+1$, па $l+2$ мора да е делив со $l+1$ што не е можно.

2) Нека сега $\frac{k!}{l!}$ е парен и $\frac{m!}{l!}$ е непарен. Тогаш или $m = l$, или $m = l+1$ и l е парен.

- Ако $m = l$ тогаш равенката се сведува на $k!l! = k! + 2l!$ односно $\frac{k!}{l!}\left(l! - 1\right) = 2$. Бидејќи $\frac{k!}{l!}$ е парен, добиваме дека $l! - 1 = 1$ односно $l = 2$ и $k! = 4$, што не е можно.

- Ако $m = l+1$ и l е парен, тогаш равенката станува $k!l! = k! + (l+2)l!$, односно $k!(l! - 1) = (l+2)l!$. Бидејќи $l!$ и $l! - 1$ се заемно прости, следи дека бројот $l+2$ мора да биде делив со $l! - 1$. Ова е можно само ако $l = 2$ и тогаш имаме $k! = 8$, што не е можно.

Заклучуваме дека единствено решение на равенката е $k = l = 3, m = 4$.

4. Нека $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ е даден полином чии коефициенти се реални броеви, $a_n \neq 0$ и притоа важи $p(x)\cdot p(2022x^4) = p(2022x^5 + x)$. Докажи дека полиномот $p(x)$ нема реални корени.

Решение. Нека k е најмалата вредност за која важи $a_k \neq 0$. Добиваме

$p(2022x^4) = a_n 2022^n x^{4n} + a_{n-1} 2022^{n-1} x^{4n-4} + \ldots + a_k 2022^k x^{4k}$

$p(x)\cdot p(2022x^4) = a_n^2 2022^n x^{5n} + \ldots + a_k^2 2022^k x^{5k}$ ... (1)

$p(2022x^5 + x) = a_n (2022x^5 + x)^n + \ldots + a_k (2022x^5 + x)^k = a_n 2022^n x^{5n} + \ldots + a_k x^k$ ... (2)

Од $p(x)\cdot p(2022x^4) = p(2022x^5 + x)$, (1) и (2) добиваме дека $k = 5k$, па оттука $k = 0$.

Значи $a_0 \neq 0$, од каде следува дека $p(0) = a_0 \neq 0$.

Да претпоставуваме дека $x_0 \neq 0$ е реален корен на полиномот $p(x)$. Следува $p(2022x_0^5 + x_0) = 0$, т.е., $x_1 = 2022x_0^5 + x_0$ е реален корен на $p(x)$. На овој начин ја формираме рекурентната низа $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ за која важи $x_n = 2022x_{n-1}^5 + x_{n-1}$ и притоа секој нејзин член е корен на полиномот $p(x)$. Бидејќи

$\frac{x_n}{x_{n-1}} = 2022x_{n-1}^4 + 1 > 1$, следува дека низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е строго монотоно растечка. Оттука добиваме дека $p(x)$ има бесконечно многу реални корени, што не е можно. Јасно, заклучуваме дека $p(x)$ нема реални корени.