45 РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА - 12.03.2022

Прва година

1А. Марин, Максим, Матеј и Марјан се четири браќа. Мајка им ги затекнала како ги изеле сите кифлички што ги испекла. На нејзиното прашање „Кој ги изеде кифличките?“, тие ги дале следните изјави:
Марин: „Сите јадевме од кифличките.“
Максим: „Јас и Марин заедно изедовме исто толку кифлички колку и Матеј и Марјан заедно.“
Матеј: „Марјан изеде повеќе кифлички од мене.“
Марјан: „Но, јас и Марин заедно изедовме помалку од Максим и Матеј заедно.“
Мајка им знае дека сите четворица ја зборуваат вистината. Кој изел најмногу кифлички?

Решение 1. Нека Марин, Максим, Матеј и Марјан изеле a,b,c,d кифлички соодветно. Тогаш, изјавите кои ги дале се: Марин: „$a,b,c,d>0$“, Максим: „$a+b=c+d$“, Матеј: „$d>c$“, Марјан: „$a+d<b+c$“.
Од $a+b=c+d$ и $a+d<b+c$ имаме $(a+b)+(a+d)<(c+d)+(b+c)$ т.е. $2a+b+d<b+2c+d$, односно $2a<2c$, од каде $a<c$ (**10**).
Од $c+d=a+b$ и $a+d<b+c$ имаме $(c+d)+(a+d)<(a+b)+(b+c)$ т.е. $a+c+2d<a+2b+c$, односно $2d<2b$, од каде $d<b$ (**10**).
Сега, од $a<c$, $d<b$ и $d>c$ имаме дека $a<c<d<b$, односно Максим изел најмногу кифлички (**5**).

Решение 2. Од изјавата на Матеј заклучуваме дека Матеј не е тој кој изел најмногу кифлички, затоа што Марјан изел повеќе од него. **(3)**
Да претпоставиме дека Марјан изел најмногу кифлички. Значи, Марјан изел повеќе или исто толку кифлички колку и Максим, односно Максим изел помалку или исто толку колку и Марјан. Од изјавата на Максим заклучуваме дека Матеј изел помалку или исто толку кифлички колку и Марин, за да Марин и Максим заедно имаат изедено еднаков број кифлички како и Матеј и Марјан заедно. Па тогаш, Максим и Матеј заедно имаат изедено помалку или исто толку кифлички колку и Марјан и Марин заедно, што противречи на изјавата на Марјан, па не може Марјан да изел најмногу кифлички. **(10)**
Да претпоставиме дека Марин изел најмногу кифлички. Тогаш, Марин изел повеќе или исто толку кифлички колку и Матеј. Од изјавата на Максим заклучуваме дека Марјан морал да изеде повеќе или исто толку кифлички колку и Максим. Но, тогаш Марјан и Марин заедно ќе имаат изедено повеќе или исто толку кифлички колку и Матеј и Максим заедно, што противречи на изјавата на Марјан, па не може Марин да изел најмногу кифлички. **(10)** Заклучуваме дека Максим е тој кој изел најмногу кифлички. **(2)**

1Б. Александар, Бојан, Васил и Горан играле игри со џамлии. Одиграле вкупно четири игри и секој од нив победил во точно една игра, при што победувале во редослед како погоре дадениот. На крајот од секоја игра и пред почетокот на наредната игра, победникот во последната одиграна игра му дава на секој друг играч во играта, онолку џамлии колку што играчот има во тој момент во себе. После сите одиграни игри, секој од играчите имал по точно 48 џамлии. Колку џамлии имал секој играч пред почетокот на првата игратa?

Решение 1. После сите одиграни игри, секој од играчите имал точно 48 џамлии. Значи $(48,48,48,48)$ се бројот на џамлии после сите одиграни игри на Александар, Бојан, Васил и Горан, соодветно. Победник во четвртата игра бил Горан, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на чевртата игра играчите имале $48:2=24$, $48:2=24$, $48:2=24$ и $48+24+24+24=120$ џамлии соодветно т.е. $(24,24,24,120)$ (**10**). Победник во третата игра бил Васил, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на третата игра играчите имале $24:2=12$, $24:2=12$, $24+12+12+60=108$ и $120:2=60$ џамлии соодветно т.е. $(12,12,108,60)$ (**5**). Победник во втората игра бил Бојан, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на втората игра играчите имале $12:2=6$, $12+6+54+30=102$, $108:2=54$ и $60:2=30$ џамлии соодветно т.е. $(6,102,54,30)$ (**5**). Победник во првата игра бил Александар, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на првата игра играчите имале $6+51+27+15=99$, $102:2=51$, $54:2=27$ и $30:2=15$ џамлии соодветно т.е. $(99,51,27,15)$.

Па, пред почетокот на првата игра Александар имал 99, Бојан имал 51, Васил имал 27 и Горан имал 15 џамлии **(5)**.
Решение 2. Нека a,b,v,g се бројот на џамлии пред почетокот на играта на Александар, Бојан, Васил и Горан, соодветно.
Во првата игра победник е Александар, па пред почетокот на втората игра Александар имал $a-b-v-g$, Бојан имал $2b$, Васил имал $2v$ и Горан имал $2g$ џамлии.
Во втората игра победник е Бојан, па пред почетокот на третата игра Александар имал $2(a-b-v-g)$, Бојан имал $2b-(a-b-v-g)-2v-2g=3b-a-v-g$, Васил имал $4v$ и Горан имал $4g$ џамлии.
Во третата игра победник е Васил, па пред почетокот на четвртата игра Александар имал $4(a-b-v-g)$, Бојан имал $2(3b-a-v-g)$, Васил имал $4v-2(a-b-v-g)-(3b-a-v-g)-4g=7v-a-b-g$ и Горан имал $8g$ џамлии.
Во четвртата игра победник е Горан, па после сите одиграни игри Александар имал $8(a-b-v-g)$, Бојан имал $4(3b-a-v-g)$, Васил имал $2(7v-a-b-g)$ и Горан имал $8g-4(a-b-v-g)-2(3b-a-v-g)-(7v-a-b-g)=15g-a-b-v$ џамлии.
Од тоа што после сите одиграни игри сите имале по точно 48 џамлии, добиваме

$$\begin{cases}8(a-b-v-g)=48\\4(3b-a-v-g)=48\\2(7v-a-b-g)=48\\15g-a-b-v=48\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b-v-g=6 & (1)\\-a+3b-v-g=12 & (2)\\-a-b+7v-g=24 & (3)\\-a-b-v+15g=48 & (4)\end{cases}. \textbf{ (15)}$$

Исто така, имаме дека вкупниот број џамлии е $4\cdot 48=192$, односно имаме

$$a+b+v+g=192. \qquad (5)$$

Сега, со собирање на (1) и (5) добиваме $2a=198$, од каде $a=99$. Ако оваа вредност ја замениме во (2)-(5) добиваме

$$\begin{aligned}3b-v-g&=111 && (2')\\-b+7v-g&=123 && (3')\\-b-v+15g&=147 && (4')\\b+v+g&=93 && (5')\end{aligned}$$

Со собирање на (2') и (5') добиваме $4b=204$, од каде $b=51$. Ако оваа вредност ја замениме во (3')-(5') добиваме

$$\begin{aligned}7v-g&=174 && (3'')\\-v+15g&=198 && (4'')\\v+g&=42 && (5'')\end{aligned}$$

Со собирање на (3'') и (5'') добиваме $8v=216$, од каде $v=27$. Тогаш, од (5'') добиваме $g=42-v=42-27=15$. Се проверува дека, за добиените вредности важи и (4'').
Значи, Александар имал 99 џамлии, Бојан имал 51 џамлија, Васил имал 27 џамлии и Горан имал 15 џамлии пред почетокот на првата играта. **(10)**

2АБ. (Сигма 121, Задачи од училница, стр. 44, решение во Сигма 122)
Даден е системот линеарни равенки $\begin{cases}(a+3)x-2(a+3)y=12-3a\\(a+3)x+(a+3)y=-1-a\end{cases}$, каде што $a\neq -3$ е параметар кој не зависи од x и y. Одреди ги сите целобројни вредности на параметарот a за кои решенијата на системот се негативни броеви.

Решение. Го решаваме системот линеарни равенки $\begin{cases}(a+3)x-2(a+3)y=12-3a\\(a+3)x+(a+3)y=-1-a\end{cases}$. Со одземање на првата од втората равенка на системот добиваме

$$\begin{cases}(a+3)x-2(a+3)y=12-3a\\ 3(a+3)y=-13+2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+3)x-2(a+3)\cdot\dfrac{-13+2a}{3(a+3)}=12-3a\\ y=\dfrac{-13+2a}{3(a+3)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{10-5a}{3(a+3)}\\ y=\dfrac{-13+2a}{3(a+3)}\end{cases}.\ \mathbf{(10)}$$

По услов на задачата, решенијата на системот се негативни броеви, односно $x<0$ и $y<0$, што значи дека $\begin{cases}\dfrac{10-5a}{3(a+3)}<0\\ \dfrac{-13+2a}{3(a+3)}<0\end{cases}$ (*) . Овој систем е еквивалентен со вкупноста од системите неравенки:

$$(1)\ \begin{cases}10-5a>0\\ 3(a+3)<0\\ -13+2a>0\end{cases};\qquad (2)\ \begin{cases}10-5a<0\\ 3(a+3)>0\\ -13+2a<0\end{cases}.\ \mathbf{(10)}$$

Вкупноста на системите претставува унија на поединечните множества решенија.

Множеството решенија на системот (1) е $M_1=\varnothing$. Системот (2) се сведува на $\begin{cases}a>2\\ a>-3\\ a<6{,}5\end{cases}$, а неговото множество решенија е $M_2=\left(2,\dfrac{13}{2}\right)$. Следува дека решението на системот неравенки (*) е множеството $M_1\cup M_2=\varnothing\cup\left(2,\dfrac{13}{2}\right)=\left(2,\dfrac{13}{2}\right)$. Целобројните вредности од овој интервал се броевите 3, 4, 5 и 6.

Значи за параметарот добиваме вредности $a\in\{3,4,5,6\}$ (**5**).

3А. (Сигма 123, Задачи од училницата, стр. 28)

Одреди ги сите парови природни броеви (x,y), такви што x и y се заемно прости и ја задоволуваат равенката $x^2+2y^2+334=\text{НЗС}(x^2,y^2)$.

Решение. Броевите x и y се заемно прости броеви, па важи $\text{НЗД}(x,y)=1$ и $\text{НЗД}(x^2,y^2)=1$. Од тоа што за секои два природни броја $a,b\in\mathbb{N}$ важи $\text{НЗД}(a,b)\cdot\text{НЗС}(a,b)=ab$, добиваме дека $\text{НЗД}(x^2,y^2)\cdot\text{НЗС}(x^2,y^2)=x^2y^2$, односно $\text{НЗС}(x^2,y^2)=x^2y^2$. Тогаш, дадената равенка преминува во $x^2+2y^2+334=x^2y^2$ (**5**), која ја трансформираме во облик $y^2(x^2-2)=x^2+334$, односно $y^2=\dfrac{x^2+334}{x^2-2}$.

Бидејќи $y^2=\dfrac{x^2+334}{x^2-2}=\dfrac{x^2-2+336}{x^2-2}=1+\dfrac{336}{x^2-2}$ е природен број, мора x^2-2 да биде делител на бројот $336=2^4\cdot3\cdot7$. Оттука имаме $x^2-2\in\{1,2,4,8,16,3,6,12,24,46,7,14,28,56,112,21,42,84,168,336\}$, односно

$$x^2\in\{3,4,6,10,18,5,8,14,26,48,9,16,30,58,114,23,44,86,170,338\}.\ \mathbf{(10)}$$

Единствени можни вредности за квадратот на природен број, x^2, се 4, 9 и 16, од каде x може да биде 2, 3 или 4. Ќе ги разгледаме трите случаи:

1. Ако $x=2$, тогаш $y^2=1+\dfrac{336}{2^2-2}=169$, т.е. $y=13$.
2. Ако $x=3$, тогаш $y^2=1+\dfrac{336}{3^2-2}=1+\dfrac{336}{7}=49$, т.е. $y=7$.
3. Ако $x=4$, тогаш, $y^2=1+\dfrac{336}{4^2-2}=25$, т.е. $y=5$.

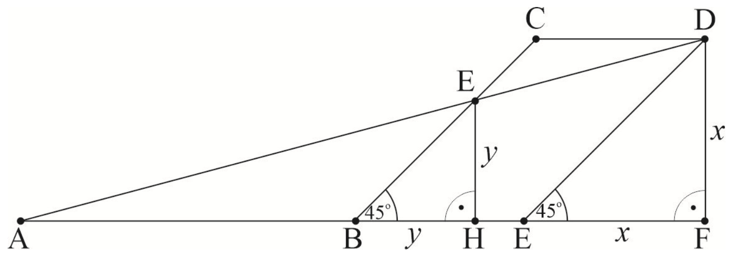
Решенија на равенката се паровите природни броеви $(x, y) = (2,13)$, $(x, y) = (3,7)$ и $(x, y) = (4,5)$. **(10)**

3Б. (Сигма 122, Задачи од училницата, стр. 32)
Најди ги сите природни броеви x што ја задоволуваат равенката $x^3 - x + p = 507$, каде што p е прост број.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик $x(x^2-1)+p=507$, односно $x(x-1)(x+1)+p=507$. **(5)** Собирокот $(x-1)x(x+1)$ е делив со 3, како производ на три последователни природни броеви. **(5)** Исто така и 507 е делив со 3, па следува дека мора и p да е делив со 3. Единствен прост број што е делив со 3 е $p=3$. **(5)** Сега равенката гласи $(x-1)x(x+1)=504$, односно $(x-1)x(x+1)=7\cdot 8\cdot 9$. Јасно, $x=8$. **(10)**

4АБ. За да стаса од дома до најблиската продавница, Кристијан се движи по обележана патека: оди 200 метри на исток, потоа 150 метри на северо–исток и уште 100 метри на исток (насоката северо–исток е одредена со симетралата на аголот формиран од насоките север и исток). Кристијан сакал да го скрати својот пат и почнал да се движи низ паркот по права линија, директно од неговиот дом кон продавницата. Точно кога ја пресретнал обележаната патека, сретнал еден дедо, се засрамил од неговиот прекорен поглед, па одлучил да продолжи да оди по обележаната патека до продавницата. За колку Кристијан го скратил патот од дома до продавницата?

Решение. Нека $\overline{AB}=200\,\text{m}, \overline{BC}=150\,\text{m}, \overline{CD}=100\,\text{m}$ се деловите од вообичаената патека од домот на Кристијан до продавницата. Тогаш, $\measuredangle ABC=\measuredangle BCD=135^\circ$ и $AB \parallel CD$. Нека E е точка од правата AB такашто $DE \parallel CB$ и F е точка од правата AB така што $DF \perp AB$. Тогаш, $BEDC$ е паралелограм и $\measuredangle FED=\measuredangle EBC=45^\circ$, па триаголникот ΔDFE е рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза $\overline{ED}=\overline{BC}=150\,\text{m}$. Од Питагорината теорема за ΔDFE имаме $\overline{EF}^2+\overline{DF}^2=\overline{ED}^2$, потоа од $\overline{EF}=\overline{DF}=x$ со замена добиваме $x^2+x^2=150^2$, од каде $x=\overline{EF}=\overline{DF}=\dfrac{150\sqrt{2}}{2}=75\sqrt{2}$ m **(5).**



Нека G е пресечната точка на AD и BC. Треба да ја пресметаме разликата меѓу должината на искршената линија формирана од отсечките AB и BG и должината $\overline{AG}$. Нека H е точка од правата AB така што $GH \perp AB$. Тогаш, триаголникот ΔBHG е рамнокрак правоаголен триаголник со краци $\overline{BH}=\overline{GH}=y$. Од сличноста на $\Delta AHG \sim \Delta AFD$ имаме $\overline{AH}:\overline{HG}=\overline{AF}:\overline{FD}$, односно

$$(200+y):y=\left(200+100+75\sqrt{2}\right):75\sqrt{2} \Leftrightarrow y=50\sqrt{2}\,\text{m} \quad \textbf{(5).}$$

Од Питагорината теорема за ΔBHG имаме $\overline{BG}^2=\overline{BH}^2+\overline{GH}^2=\left(50\sqrt{2}\right)^2+\left(50\sqrt{2}\right)^2=5000+5000=10000$,

од каде $\overline{BG}=\sqrt{10000}=100\,\text{m}$ **(5).** Потоа, од Питагорината теорема за ΔAHG имаме

$\overline{AG}^2=\overline{AH}^2+\overline{GH}^2=\left(200+50\sqrt{2}\right)^2+\left(50\sqrt{2}\right)^2=40000+20000\sqrt{2}+5000+5000=50000+20000\sqrt{2}$, од каде

$\overline{AG}=\sqrt{50000+20000\sqrt{2}}$ m **(5)**. Кристијан својот пат го скратил за

$$(200+100)-\sqrt{50000+20000\sqrt{2}}=\left(300-\sqrt{50000+20000\sqrt{2}}\right)\text{m}. \ \textbf{(5)}$$

(Скратувањето е приближно еднакво на 20 m.)

Втора година

1А. (Сигма 121, Рубрика задачи, задача 1623) Реши го системот равенки $\begin{cases} x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}=36 \\ 27y\sqrt{y}+9x\sqrt{y}=28 \end{cases}$.

Решение. Со собирање и одземање на равенките на системот се добива еквивалентниот систем $\begin{cases} x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}+27y\sqrt{y}+9x\sqrt{y}=36+28 \\ x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}-27y\sqrt{y}-9x\sqrt{y}=36-28 \end{cases}$ **(5 п.)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x})^3+3(\sqrt{x})^2(3\sqrt{y})+3(\sqrt{x})(3\sqrt{y})^2+(3\sqrt{y})^3=64 \\ (\sqrt{x})^3-3(\sqrt{x})^2(3\sqrt{y})+3(\sqrt{x})(3\sqrt{y})^2-(3\sqrt{y})^3=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}+3\sqrt{y})^3=4^3 \\ (\sqrt{x}-3\sqrt{y})^3=2^3 \end{cases}$$ **(6 п.)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=4 \\ \sqrt{x}-3\sqrt{y}=2 \end{cases} \text{ (3 п.) } \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}=6 \\ 6\sqrt{y}=2 \end{cases} \text{ (5 п.) } \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{y}=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (3 п.) } \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=\frac{1}{9} \end{cases}$$ **(3 п.)**.

1Б. (Сигма 122, Рубрика задачи Сигма 122, задача 1641) Ако за ненултите реални броеви a,b и c важат равенствата $a^2+a=b^2$, $b^2+b=c^2$ и $c^2+c=a^2$, одреди ја вредноста на изразот $(a-b)(b-c)(c-a)$.

Решение. Со собирање на трите равенства добиваме $a^2+b^2+c^2+a+b+c=a^2+b^2+c^2$ односно $a+b+c=0$ **(5 п.)**. На тој начин имаме дека $\begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ c+a=-b \end{cases}$ **(3 п.)**. Од равенството $a^2+a=b^2$ добиваме $a^2-b^2=-a$ односно $(a-b)(a+b)=-a$ **(3 п.)**. Бидејќи $a+b=-c\neq 0$, имаме дека $a-b=-\frac{a}{a+b}$ **(3 п.)**. Аналогно, имаме дека $b-c=-\frac{b}{b+c}$ **(2 п.)** и $c-a=-\frac{c}{c+a}$ **(2 п.)**. Тогаш за изразот $(a-b)(b-c)(c-a)$ добиваме $(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{-a}{a+b}\cdot\frac{-b}{b+c}\cdot\frac{-c}{c+a}=\frac{-a}{-c}\cdot\frac{-b}{-a}\cdot\frac{-c}{-b}=1$ **(7 п.)**.

2АБ. (Сигма 122, Рубрика задачи Сигма 122, задача 1648) Докажи дека за секои реални броеви a, b и c, равенката $3(a+b+c)x^2+4(ab+bc+ca)x+4abc=0$ има реални решенија. При кои услови решенијата на равенката се еднакви меѓу себе?

Решение. За дискриминантата на квадратната равенка имаме:

$D=16(ab+bc+ca)^2-48abc(a+b+c)=$ **(5 п.)**

$16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2-3a^2bc-3ab^2c-3abc^2)=$

$16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-ab^2c-abc^2)=$

$8(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2a^2bc-2ab^2c-2abc^2)=$ **(5 п.)**

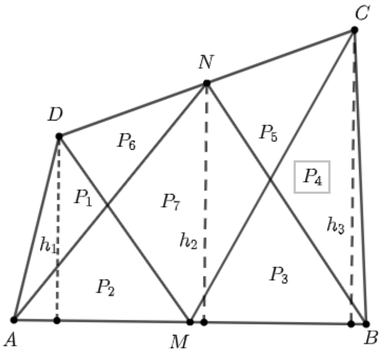
$8[(a^2b^2-2ab^2c+b^2c^2)+(b^2c^2-2abc^2+c^2a^2)+(c^2a^2-2a^2bc+a^2b^2)]=$

$8[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2]\geq 0$. **(5 п.)**

Ова значи дека дискриминантата е ненегативен реален број, па квадратната равенка ќе има реални решенија за секои реални броеви a,b,c **(3 п.)**. Равенката ќе има двоен корен ако и само ако $D=0$ **(2 п.)**, т.е. ако и само ако $ab-bc=0$, $bc-ca=0$ и $ca-ab=0$, т.е. кога $ab=bc=ca$ **(5 п.)**.

3А. Нека M и N се средини на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$. Докажи дека $P_{\Delta ABN}+P_{\Delta CDM}=P_{\square ABCD}$.

Решение. Отсечките AN, BN, CM и DM го делат четириаголникот на шест триаголници со плоштини $P_1, P_2, ..., P_6$, соодветно, и еден четириаголник со плоштина P_7, како на цртежот **(3 п.)**. Нека висината на триаголникот AMD спуштена кон AM е h_1, висината на триаголникот ABN спуштена кон AB е h_2 и висината на триаголникот MBC спуштена кон MB е h_3 **(3 п.)**. Тогаш добиваме трапез со основи h_1 и h_3 и средна линија h_2, па $h_2 = \frac{h_1 + h_3}{2}$ **(5 п.)**. Имаме,



$$P_{\Delta ABN} = P_2 + P_3 + P_7 = \frac{\overline{AB} \cdot h_2}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \frac{h_1 + h_3}{2}}{2} = \frac{\frac{\overline{AB}}{2} \cdot h_1}{2} + \frac{\frac{\overline{AB}}{2} \cdot h_3}{2} = \frac{\overline{AM} \cdot h_1}{2} + \frac{\overline{MB} \cdot h_3}{2} \text{ (5 п.)}$$

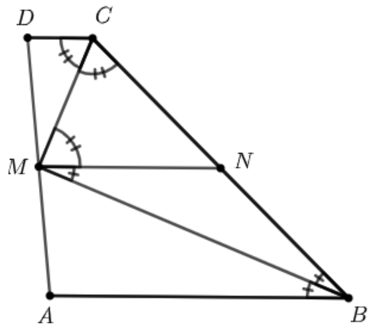
Притоа имаме $\frac{\overline{AM} \cdot h_1}{2} + \frac{\overline{MB} \cdot h_3}{2} = P_{\Delta AMD} + P_{\Delta MBC} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ **(3 п.)**.

Изедначувајќи ги двете добиени равенства следува дека $P_7 = P_1 + P_4$ **(3 п.)**, па имаме:

$$P_{\Delta ABN} + P_{\Delta CDM} = P_2 + P_3 + P_7 + P_5 + P_6 + P_7 = P_2 + P_3 + P_7 + P_5 + P_6 + (P_1 + P_4) = P_{\square ABCD} \text{ (3 п.)}.$$

3Б. Симетралата на аголот ABC и симетралата на аголот BCD во трапез $ABCD$, се сечат во точка M на кракот AD на трапезот. Пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$, ако се познати $\overline{MB} = p$, $\overline{MC} = q$ и висината на трапезот h (h е растојанието меѓу основите AB и CD на трапезот).

Решение. Нека $\angle ABM = \varphi, \angle DCM = \psi$, т.е. $\angle ABC = 2\varphi$ и $\angle BCD = 2\psi$. Тогаш, од $2\varphi + 2\psi = 180°$ следува дека $\varphi + \psi = 90°$ **(4 п.),** па затоа триаголникот BCM е правоаголен и имаме $\overline{BC} = \sqrt{p^2 + q^2}$ **(3 п.)**. Нека N е средина на BC, тогаш $\overline{NM} = \overline{NC} = \overline{NB}$ **(4 п.).** Сега $\angle CMN = \angle MCN$ а оттука и $\angle CMN = \angle MCD$, па следува дека MN е паралелна со DC (и со AB) **(5 п.)**. Бидејќи N е средина на BC, следува M е средина на AD **(4 п.)**. Јасно, MN е средна линија во трапезот и оттука $P = \overline{MN}h = \frac{\overline{BC}}{2}h = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{2}h$ **(5 п.)**.



4АБ. Најди ги сите прости броеви p за кои системот $\begin{cases} p + 49 = 2x^2 \\ p^2 + 49 = 2y^2 \end{cases}$ има решение во природните броеви (x, y се природни броеви).

Решение. Јасно, $p \neq 2$ бидејќи десните страни на равенките се парни броеви, па за да и левата страна е парна треба p да е непарен прост број **(1 п.)**. Од условите во задачата добиваме:

$2y^2 = p^2 + 49 > p + 49 = 2x^2$ и оттука $y > x$ **(2 п.)**;

$(p+7)^2 > p^2 + 49 = 2y^2 > y^2$ и оттука $p + 7 > y$, $p > y - 7$ т.е. $p \geq y - 6$ **(3 п.).**

Нека $p > y > x$. Ако од втората равенка ја одземеме првата, добиваме $p^2 - p = 2y^2 - 2x^2$, односно $p(p-1) = 2(y-x)(y+x)$ **(2 п.)**. Бидејќи p не е делител на 2, следува p е делител на $(y-x)(y+x)$, а од $p > y > x$ следува дека $y - x < p$ и $y + x < 2p$ **(2 п.),** па затоа p е делител на $x + y$ и уште, $x + y = p$ **(3 п.)**. Тогаш, добиваме $p - 1 = 2(y - x)$ т.е. $p = 2(y-x) + 1$, а ако во последната равенка замениме дека $x + y = p$ добиваме $y = 3x - 1$ односно $p = 4x - 1$. Ако последното го замениме во првата равенка, имаме $4x + 48 = 2x^2$, $x^2 - 2x - 24 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+24} = 1 \pm 5$, па решение во множеството природни броеви е $x = 6$. Тогаш, $y = 17$ и $p = 23$. Значи, за $p = 23$ решение на дадениот систем е $(x, y) = (6,17)$ **(5 п.)**.

Да ги разгледаме случаите кога $y-6\le p\le y$. т.е. $p=y-t, t=0,1,...,6$. Ако замениме во втората равенка од системот добиваме $(y-t)^2+49=2y^2$ и оттука ја добиваме $y^2+2ty-t^2-49=0$. Дискриминанта е $D=4(t^2+t^2+49)=4(2t^2+49)$. Тогаш од $t=0,1,...,6$, бидејќи решаваме во природни броеви, дискриминантата е квадрат на некој природен број за $t=0,4,6$ **(3 п.)**. За $t=0$ добиваме $y=p=7$ и тогаш $x^2=28$ што нема решение во природни броеви. За $t=4$ добиваме $y_{1,2}=-4\pm 9$ па $y=5$ и тогаш $p=1$, но 1 не е прост број. За $t=6$ добиваме $y_{1,2}=-6\pm 11$ па $y=5$ и тогаш $p=-1$, т.е. p не е прост број **(3 п.)**. Значи, единствено решение е $p=23$, $x=6$ и $y=17$ **(1 п.)**.

Трета година

1АБ. (Сигма 119, Рубрика задачи, зад. 1593) Најди ги сите вредности на параметарот a, за кои што множеството решенија на неравенката $6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$ содржи барем еден цел број.

Решение. Ја средуваме неравенката како неравенка по параметарот a, во облик $4a^2+(6x-24)a+6x^2-3x+35<0$ **(5).**

За да постои вредност на параметарот a, која ја задоволува неравенката (параболата е отворена нагоре), потребен и доволен услов е дискриминантата на квадратната равенка $4a^2+(6x-24)a+6x^2-3x+35=0$ да е позитивна (односно параболата да има две пресечни точки со $x-$ оската). Значи $D=(6x-24)^2-4\cdot 4\cdot(6x^2-3x+35)=-15x^2-60x+4>0$ односно $15x^2+60x-4<0.$ Оттука добиваме $x\in\left(-\frac{8\sqrt{15}}{15}-2,\frac{8\sqrt{15}}{15}-2\right)$ **(5).** Во овој интервал целобројни вредности за променливата се: $x=-4, x=-3, x=-2, x=-1, x=0.$ **(5)**

За секоја од овие вредности на x ќе ги најдеме соодветните вредности за параметарот a.

Неравенката по параметарот a, $4a^2+(6x-24)a+6x^2-3x+35<0$, за $x=-4$, добива облик $4a^2-48a+143<0 \quad\Leftrightarrow\quad a\in\left(\frac{11}{2},\frac{13}{2}\right)$.

Ако $x=-3$, тогаш добиваме неравенка $2a^2-21a+49<0 \quad\Leftrightarrow\quad a\in\left(\frac{7}{2},7\right)$.

Ако $x=-2$, имаме неравенка $4a^2-36a+65<0 \quad\Leftrightarrow\quad a\in\left(\frac{5}{2},\frac{13}{2}\right)$.

За $x=-1$, добиваме неравенка $2a^2-15a+22<0 \quad\Leftrightarrow\quad a\in\left(2,\frac{11}{2}\right)$.

Ако $x=0$, тогаш важи $4a^2-24a+35<0 \quad\Leftrightarrow\quad a\in\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$. **(5)**

Унијата на сите добиени интервали ни ги одредува бараните вредности на параметарот a, $a\in(2,7)$. **(5)**

2А. (Сигма 120, Рубрика задачи, зад. 1611) Познато е дека $a^x=b^y=c^z=30^w$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}$, каде a, b, c се природни броеви, а x, y, z, w се реални броеви. Одреди го збирот $a+b+c$.

Решение. Да забележиме дека ниту еден од броевите a, b, c не може да е 1. Ако било кој од броевите a, b или c прима вредност 1, тогаш $30^w=1$, од каде $w=0$, што не е можно затоа што по условот на задачата x, y, z, w се ненулти реални броеви **(2).** Сега $a,b,c>1$, па со логаритмирање на равенството $a^x=b^y=c^z=30^w$ добиваме $x=w\cdot\log_a 30,\quad y=w\cdot\log_b 30,\quad z=w\cdot\log_c 30$ **(5).**

Од равенството $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}$ добиваме $\frac{1}{w\cdot\log_a 30}+\frac{1}{w\cdot\log_b 30}+\frac{1}{w\cdot\log_c 30}=\frac{1}{w}$ односно $\log_{30} a+\log_{30} b+\log_{30} c=1.$ На тој начин добиваме $\log_{30} abc=1$ од каде следува дека $abc=30.$ **(10)** Со оглед на фактот што *a*, *b*, *c* се природни броеви поголеми од 1, за производот имаме $abc=2\cdot3\cdot5,$ а за бараните броеви *a*, *b*, *c* имаме вредности 2, 3 и 5 (во било кој редослед). Конечно бараниот збир е $a+b+c=2+3+5=10.$ **(5)**

2Б. Одреди го количникот на броевите $2021^{\sqrt{\log_{2021}2022}}$ и $2022^{\sqrt{\log_{2022}2021}}$.

Решение: Да ги означиме дадените броеви со $2021^{\sqrt{\log_{2021}2022}}=x$ и $2022^{\sqrt{\log_{2022}2021}}=y.$ Го бараме нивниот количник $\frac{x}{y}, y\neq 0.$ **(5)** Тогаш $\log x=\sqrt{\log_{2021}2022}\cdot\log 2021$ и $\log y=\sqrt{\log_{2022}2021}\cdot\log 2022.$ **(5)**

Може да запишеме $\log x=\sqrt{\frac{\log 2022}{\log 2021}}\cdot\log 2021$ и $\log y=\sqrt{\frac{\log 2021}{\log 2022}}\cdot\log 2022$ **(5),**

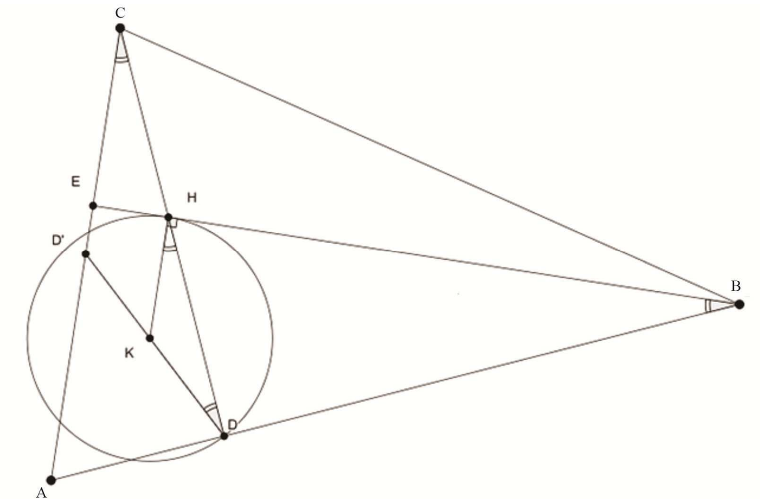
односно $\log x=\sqrt{\log 2021\cdot\log 2022}$ и $\log y=\sqrt{\log 2022\cdot\log 2021}.$ **(5)**

Последново покажува дека $\log x=\log y$ односно $x=y,$ па бараниот количник е еднаков на 1. **(5)**

3А. Во триаголник ABC, CD е висината во триаголникот спуштена од темето од C и точката H е ортоцентарот на триаголникот. Нека точката K е центар на кружница која што минува низ точката D и нека правата BH е тангента на кружницата со допирна точка H. Докажи дека правата DK ја преполовува страната AC.

Решение. Нека $D'=DK\cap AC.$ Нека E е подножната точка на висината спуштена од темето B (види цртеж). Јасно е дека $\measuredangle BHK=90^0.$ ΔADC и ΔAEB се правоаголни, па важи:

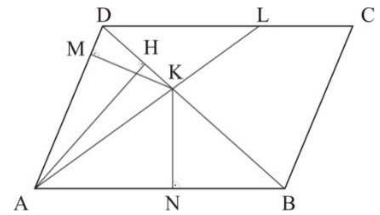
$\measuredangle ACD=180^o-(90^o+\measuredangle CAD)=90^o-\measuredangle CAD=\measuredangle ABE$ (или како агли со заемно нормални краци) **(5)**.



Понатаму,

$\measuredangle DBH=90^0-\measuredangle DHB=\measuredangle BHK-\measuredangle DHB=\measuredangle DHK.$ ΔKDH е рамнокрак па $\measuredangle KDH=\measuredangle KHD.$ Оттука $\measuredangle KDH=\measuredangle KHD=\measuredangle ABE=\measuredangle ACD,$ па добиваме дека $\Delta AD'D$ е рамнокрак и $\overline{CD'}=\overline{DD'}$ **(12)**. ΔADC е правоаголен со прав агол во темето $D,$ па според талесовата теорема, постои кружница со дијаметар AC на која лежи темето $D.$ Од $\overline{CD'}=\overline{DD'}$, каде $D'\in AC$, јасно е дека точката D' е центарот на таа кружница и тогаш важи $\overline{AD'}=\overline{CD'}$. Со тоа докажавме дека правата правата DK ја преполовува страната $AC.$ **(8)**

3Б. (Сигма 120, Задачи од училницата, стр. 32) Даден е паралелограм $ABCD$. Симетралата на $\measuredangle DAB$ ја сече страната DC во точка $L,$ а дијагоналата BD во точка K, таква што $\overline{DK}:\overline{KB}=3:4$. Пресметај ја должината на отсечката $LC,$ ако периметарот на паралелограмот е 28.



Решение. AL е симетрала на $\measuredangle DAB$ па важи $\measuredangle DAL = \measuredangle LAB = \measuredangle ALD$ (последните два агли се еднакви како наизменични агли при трансверзала AL), од каде ΔALD е рамнокрак (**5**). Да означиме $\overline{DL} = \overline{AD} = b$ и $\overline{AB} = \overline{DC} = a$.
За плоштините на триаголниците на цртежот имаме

$$P_{\Delta AKD} : P_{\Delta ABK} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{MK}}{2} : \frac{\overline{AB} \cdot \overline{NK}}{2} = \overline{AD} : \overline{AB} = b : a,$$

каде MK, NK се соодветните висини спуштени кон страните и за нив важи $\overline{MK} = \overline{NK}$ затоа што точката K, како точка од симетралата на $\measuredangle DAB$ е подеднакво оддалечена од краците на аголот. **(12)**

Од друга страна, $P_{\Delta AKD} : P_{\Delta ABK} = \dfrac{\overline{DK} \cdot \overline{AH}}{2} : \dfrac{\overline{BK} \cdot \overline{AH}}{2} = \overline{DK} : \overline{KB} = 3:4$. (**3**)

Сега, изедначувајќи ги односите на плоштините добиваме дека важи $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4}$, а од периметарот на паралелограмот $2(a+b) = 28$, со замена, имаме $b = 6, a = 8$. Конечно, $\overline{LC} = a - b = 2$. (**5**)

4АБ. Одреди ја максималната вредност на изразот $y = \mathrm{tg}\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) - \mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ за $x \in \left[-\dfrac{5\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Решение. Означуваме $z = -(x + \dfrac{\pi}{6})$, при што $z \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ и $2z \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. (**5**)

Функцијата $\mathrm{tg}\, x$ е непарна функција, додека $\cos x$ е парна функција. Јасно, тогаш важи

$$-\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \mathrm{tg}\left(-(x + \frac{\pi}{6})\right) = \mathrm{tg}\, z \text{ и } \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-(x + \frac{\pi}{6})\right) = \cos z \quad (\mathbf{2}).$$

За првиот член на изразот чија максимална вредност ја бараме, важи:
$\mathrm{tg}\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - (x + \dfrac{2\pi}{3})\right) = \mathrm{ctg}\,(-x - \dfrac{\pi}{6}) = \mathrm{ctg}\, z$ и оттука добиваме поинаков облик на изразот $y = \mathrm{ctg}\, z + \mathrm{tg}\, z + \cos z$ (**5**). Ќе го средиме изразот до облик:

$$y = \frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\sin z}{\cos z} + \cos z = \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\sin z \cdot \cos z} + \cos z = \frac{1}{\sin z \cdot \cos z} + \cos z = \frac{2}{\sin 2z} + \cos z \quad (\mathbf{5}).$$

Функцијата $\sin 2z$ е монотона растечка функција за $z \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, па на истиот интервал $\dfrac{2}{\sin 2z}$ е опаѓачка функција. Функцијата $\cos z$ е монотона опаѓачка функција за $z \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Значи двете функции на дадениот интервал достигнуваат максимум за $z = \dfrac{\pi}{6}$, па и изразот y достигнува максимум во истата точка $z = \dfrac{\pi}{6}$. Притоа,

$$y_{\max} = \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{11}{2\sqrt{3}} = \frac{11 \cdot \sqrt{3}}{6} \quad (\mathbf{8}).$$

Четврта година

1А. Нека A е 19-елементно подмножество од множеството $B = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 100\}$. Докажи дека множеството A содржи два елементи чиј збир е делив со 104.

Решение. Да ги разгледаме следните подредени парови чиј збир е 104 : $(4,100), (7,97), ..., (49,55)$. (**5**)

Овие парови ги опфаќаат сите броеви од множеството B, освен броевите 1 и 52. Броевите 1 и 52 можеби припаѓаат во A, но не се појавуваат во ниту еден од паровите погоре. (**3**) Заради ова, постојат најмалку $19 - 2 = 17$ броеви, елементи на множеството A, кои припаѓаат во некој од дадените парови. (**7**)

Бидејќи $17>16$, а постојат 16 парови на броеви чиј збир е делив со 104, од принципот на Дирихле, два од броевите во A мора да припаѓаат во ист пар, што значи постојат два елементи во A чии збир е делив со 104. **(10)**

1Б. Докажи дека бројот $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ е сложен .

Решение. Нека $a=5^{25}$. Од $a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$ добиваме

$$\begin{aligned}\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}&=\frac{a^5-1}{a-1}=a^4+a^3+a^2+a+1=\left(a^2+3a+1\right)^2-5a\left(a+1\right)^2=\\&=\left(a^2+3a+1+5^{13}\left(a+1\right)\right)\left(a^2+3a+1-5^{13}\left(a+1\right)\right).\end{aligned} \quad \textbf{(13)}$$

Бидејќи $a^2+3a+1+5^{13}\left(a+1\right)>a^2+3a+1-5^{13}\left(a+1\right)>1$ следува дека бројот $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ можеме да го претставиме како производ на два различни природни броеви различни од еден. Според тоа дадениот број е сложен. **(12)**

2А. (Сигма 123, Задачи од училница, стр.29)
Одреди ги сите парови цели броеви x и y такви што $1+2026x+2028y=xy$.
Решение. За целите броеви x и y, ќе го разгледаме производот:

$$\left(x-2028\right)\left(y-2026\right)=xy-2028y-2026x+2026\cdot 2028. \quad \textbf{(5)}$$

Ако го искористиме равенството дадено во условот, за производот добиваме

$$\left(x-2028\right)\left(y-2026\right)=1+2026\cdot 2028=2027^2.$$

(Притоа, искористивме дека $1+2k\cdot\left(2k+2\right)=1+4k^2+4k=\left(2k+1\right)^2$.) **(10)**

Од тоа што 2027 е прост број, следува дека $x-2028\in\left\{\pm1,\pm2027,\pm2027^2\right\}$, **(5)** од каде се добиваат следните парови за броевите x и y:

$$\begin{aligned}\left(x,y\right)\in\Big\{&\left(2029,2027^2+1\right),\left(2027,-2027^2+2026\right),\left(4055,4053\right),\left(1,-1\right),\\&\left(2027^2+2028,2027\right),\left(-2027^2+2028,2025\right)\Big\}.\end{aligned} \quad \textbf{(5)}$$

2Б. (Сигма 117, Задачи од училница, стр.28) Најди ја равенката на заедничката тангента на параболите $y=x^2+2x+2$ и $y=x^2+x+2$.

Решение. Нека заедничката тангента има равенка $y=kx+b$. Тогаш секоја од равенките $x^2+2x+2=kx+b$ и $x^2+x+2=kx+b$ има единствено решение. **(5)**

За детерминантите на квадратните равенки кои се добиваат $x^2+(2-k)x+2-b=0$ и $x^2+(1-k)x+2-b=0$, мора да важи дека се и двете нули, односно:

$$D_1=(2-k)^2-4(2-b)=k^2-4k+4b-4=0,$$

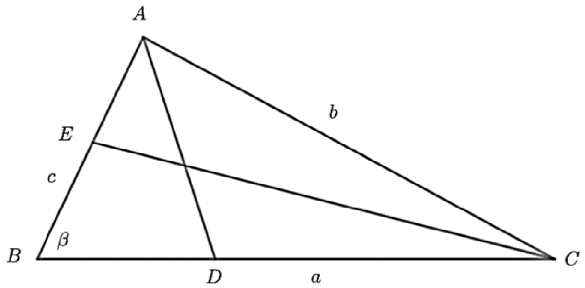
$$D_2=(1-k)^2-4(2-b)=k^2-2k+4b-7=0. \quad \textbf{(10)}$$

Со одземање на втората од првата равенка добиваме $-2k+3=0$ односно $k=\frac{3}{2}$. **(5)** Со замена во првата равенка имаме $b=\frac{4+4k^2-k^2}{4}=\frac{31}{16}$. **(3)** Значи, бараната равенка е $y=\frac{3}{2}x+\frac{31}{16}$. **(2)**

3А. (Сигма 119, Задачи од училницата, стр. 49) Во триаголникот ABC симетралата на аголот во темето A ја сече страната BC во точка D, а симетралата на аголот во темето C ја сече страната AB во точка E. Аголот во темето B е поголем од 60°. Докажи дека $\overline{AE}+\overline{CD}<\overline{AC}$.

Решение. Согласно стандардните ознаки за елементите на триаголник нека $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$. Според условот во задачата $\beta > 60^{\mathrm{O}}$, па оттука $\cos\beta < \cos 60^{\mathrm{O}} = \frac{1}{2}$ ($\cos x$ е опаѓачка функција на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). **(2)**

Од косинусната теорема имаме $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} < \frac{1}{2}$, односно $a^2+c^2 < ac+b^2$. **(4)**



На двете страни на ова неравенство додаваме $ab+bc$ и добиваме $ab+bc+a^2+c^2 < ab+bc+ac+b^2$.
Со групирање на собироците добиваме $c(b+c)+a(a+b) < a(b+c)+b(b+c)$, односно $c(b+c)+a(a+b) < (a+b)(b+c)$. Ако поделиме со $(a+b)(b+c) \neq 0$ добиваме $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c} < 1$, односно $\frac{bc}{a+b}+\frac{ba}{b+c} < b$. **(7)**

Според теоремата за односот во кој симетралата на аголот ја дели спротивната страна имаме $\overline{AE} = \frac{bc}{a+b}$ и $\overline{CD} = \frac{ab}{b+c}$.

Навистина, важи $\frac{b}{\overline{AE}} = \frac{a}{\overline{BE}}$, односно $b\overline{BE} = a\overline{AE}$. Бидејќи $\overline{AE}+\overline{BE} = c$, од $\overline{BE} = c-\overline{AE}$ добиваме $b(c-\overline{AE}) = a\overline{AE}$. Јасно $\overline{AE} = \frac{bc}{a+b}$. На истиот начин, од $\frac{b}{\overline{CD}} = \frac{c}{\overline{BD}}$ и $\overline{CD}+\overline{BD} = a$, добиваме $b\overline{BD} = c\overline{CD}$ и $\overline{BD} = a-\overline{CD}.$ Оттука $b(a-\overline{CD}) = c\overline{CD}$, односно $\overline{CD} = \frac{ab}{b+c}$. **(10)**

Со директна замена во неравенството следува дека $\overline{AE}+\overline{CD} < \overline{AC}$. **(2)**

3Б. (**Сигма 118, Рубрика Задачи, зад. 1562 (корегирана во однос на редниот број како зад. 1577 во Сигма 119)** Најди ги првите две и последните две цифри на децималниот запис на бројот x_{1001}, ако $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}x_n + \frac{\sqrt[10]{2}-1}{\sqrt[10]{2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Од рекурентната дефиниција на низата $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ добиваме $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}x_n + 1 - \frac{1}{\sqrt[10]{2}}$, односно $x_{n+1}-1 = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}(x_n-1)$. **(3)** Дефинираме нова низа, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ со $y_n = x_n - 1$, при што $y_1 = 1$, $y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}y_n$, $n = 1,2,...$ Од последново заклучуваме дека низата $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е геометриска прогресија, со прв член $y_1 = 1$ и количник $\frac{1}{\sqrt[10]{2}}$ **(10),** односно $y_{n+1} = y_1\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)^n$, $n = 1,2,...$ **(2)**. Имаме: $y_{1001} = \frac{1}{2^{100}}$, $x_n = y_n + 1$ за $n = 1,2,...$ од каде директно следи дека:

$$x_{1001}=1+\frac{1}{2^{100}}=1+\frac{5^{100}}{10^{100}}=1+\underbrace{0,0...01}_{100\text{ нули}}\cdot 5^{100}. \quad \textbf{(5)}$$

Значи, првите две цифри на бројот x_{1001} се 1 и 0, а двете последни цифри се 2 и 5. **(5)**

4А. Низата $f(1), f(2), f(3),...$ е дефинирана со формулата

$$f(n)=\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+....+\left[\frac{n}{n}\right]\right),$$

каде $[x]$ го означува целиот дел од x. Докажи дека $f(n+1)<f(n)$ за бесконечно многу природни броеви n.

Забелешка. $[x]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од x, односно $[x]=k \iff k\le x<k+1,\ k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Нека $g(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+....+\left[\frac{n}{n}\right]=nf(n)$ и дефинираме $g(0)=0$. **(3)**

Лесно се забележува дека $\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]=1$ ако n е делив со k, и $\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]=0$ ако n не е делив со k. **(3)**

Според тоа имаме:

$g(n)-g(n-1)=\left(\left[\frac{n}{1}\right]-\left[\frac{n-1}{1}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)+...+\left(\left[\frac{n}{n}\right]-\left[\frac{n-1}{n}\right]\right)=d(n)$, каде $d(n)$ го означува бројот на природни делители на бројот n. **(3)**

Добиваме:

$$g(n)=g(n-1)+d(n)=g(n-2)+d(n-1)+d(n)=....=d(1)+d(2)+....+d(n). \quad \textbf{(4)}$$

Оттука $f(n)=\dfrac{d(1)+d(2)+....+d(n)}{n}$.

Условот $f(n+1)<f(n)$ е еквивалентен со $\dfrac{d(1)+d(2)+...+d(n)+d(n+1)}{n+1}<f(n)$.**(5)**

Бидејќи $d(1)+d(2)+...+d(n)=nf(n)$ следува дека доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу природни броеви n за кои важи $d(n+1)<f(n)$. **(3)**

Условот е исполнет за бесконечно многу природни броеви n за кои $n+1$ е прост број. Во тој случај $d(n+1)=2<f(n)$. **(4)**

4Б. За секој природен број n, докажи дека важи $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$.

Решение. Имаме $k^3>k^3-k=k(k^2-1)=(k-1)k(k+1) \iff \dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}>\dfrac{1}{k^3}$. **(8)**

Ако искористиме дека $\dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{2}{k}+\dfrac{1}{k+1}\right)$ за $k=2,3,...,n$ **(5)** добиваме:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}<1+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)= \quad \textbf{(12)}$$

$$=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}=\frac{5}{4}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2n}=\frac{5}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}<\frac{5}{4}.$$