СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

29. МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

1. Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со: $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n+n)}{n+1}$ за секој $n \geq 1$. Докажете дека

$$n(n+1) > \frac{(x_1 + ... + x_n)^2}{x_{n+1}}.$$

Решение. Најпрво да забележиме дека

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n+n)}{n+1} \iff (n+1)x_{n+1} - nx_n = x_n^2. \quad \textbf{(2 поени)}$$

Оттука

$$x_1^2 + ... + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}((i+1)x_{i+1} - ix_i) = (n+1)x_{n+1} - x_1. \quad \textbf{(2 поени)}$$

Следствено

$$(n+1)x_{n+1} = x_1^2 + ... + x_n^2 + 2 > x_1^2 + ... + x_n^2. \quad \textbf{(1 поен)}$$

Користејќи го неравенството помеѓу квадратна и аритметичка средина добиваме:

$$x_{n+1} > \frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n+1} \geq \frac{(x_1 + ... + x_n)^2}{n(n+1)} \Longrightarrow n(n+1) > \frac{(x_1 + ... + x_n)^2}{x_{n+1}} \quad \textbf{(3 поени)}$$

што и требаше да се докаже. □

2. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека E е средишна точка на $\overline{AC}$. Кружницата опишана околу $\triangle CDE$ ја сече $\overline{BC}$ во F $(F \neq C)$. Нека B' е рефлексија на B во однос на F.

Докажете дека EF е тангента на опишаната кружница на $\triangle B'DF$.

Решение. Од тетивноста на четириаголниците $ABCD$ и $CDEF$ следува

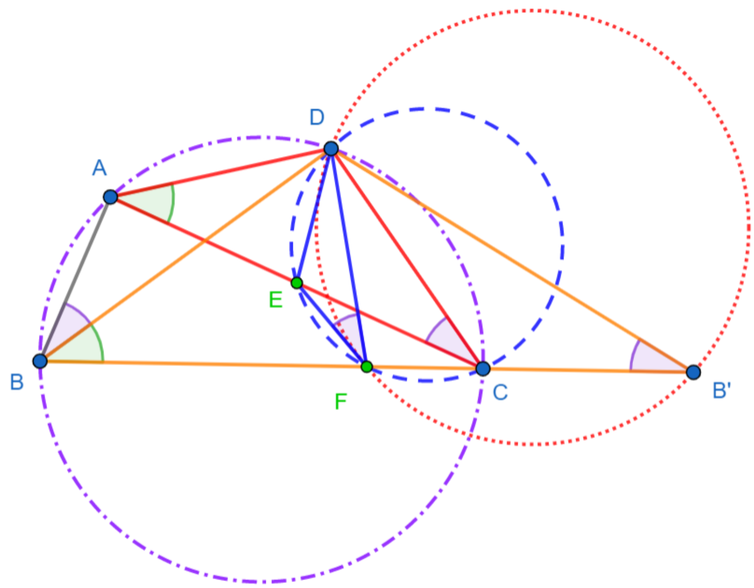
$$\angle ABD = \angle ACD = \angle DCE = \angle DFE.$$

Слично,

$$\angle ADB = \angle ACB = \angle ECF = \angle EDF. \quad \textbf{(2 поени)}$$

Оттука

$$\angle ADE = \angle ADB + \angle BDE = \angle EDF + \angle BDE = \angle BDF. \quad \textbf{(1 поен)}$$



Од $\angle ADE = \angle BDF$ и $\angle DAE = \angle DBC$ (бидејќи $ABCD$ е тетивен) заклучуваме дека се слични $\triangle ADE$ и $\triangle BDF$. Користејќи го ова заедно со фактот дека E и F се средините на AC и BB', соодветно, добиваме

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BF} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot BB'} = \frac{AC}{BB'}. \quad \textbf{(2 поени)}$$

Заради $\angle DAC = \angle DBB'$, слични се $\triangle DAC$ и $\triangle DBB'$. Оваа сличност повлекува еднаквост на аглите $\angle DCA$ и $\angle DB'B$. **(1 поен)** Конечно, заклучуваме дека

$$\angle DB'F = \angle DB'B = \angle DCA = \angle DCE = \angle DFE.$$

Значи EF е тангента на опишаната кружница на $\triangle B'DF$. **(2 поени)** □

3. Низата $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ е дефинирана со: $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ за секој $n \geq 1$. За произволен природен број $m \geq 2$, нека $L(m)$ е неговиот најголем прост делител.

Докажете дека постои k таков што $L(a_k) > 1000^{1000}$.

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е., дека за секој n важи $L(a_n) \leq 1000^{1000}$. Нека $A = \{p : p \text{ е прост број и } p < 1000^{1000}\}$. Тогаш, за секој $n \geq 1$ множеството од сите прости делители на a_n, означено со D_n, е подмножество од A. **(2 поени)**

Избираме $p \in A$. Нека $\nu_p(x)$ е експонентот на најголемиот степен на p што го дели x. Ако $p|a_k$ за некој k, тогаш $\nu_p(a_{k+1}) = \nu_p(a_k) + \nu_p(a_k + 1) = \nu_p(a_k)$ (бидејќи $p \nmid a_k + 1$) и $p|a_{k+1}$. Значи за секој $p \in D_k$ важи $\nu_p(a_k) = \nu_p(a_{k+1})$, а притоа и $a_{k+1} > a_k$. Следствено, a_{k+1} има дополнителен прост делител $q \in A$, покрај сите прости делители p на a_k. Заклучуваме дека D_k е вистинско подмножество на D_{k+1} за секој k. **(4 поени)**

Но, тогаш имаме бесконечна низа од вистински подмножества ограничена одозгора со A:

$$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \ldots \subset A.$$

Ваквата низа противречи на конечноста на множеството A. **(2 поени)** □

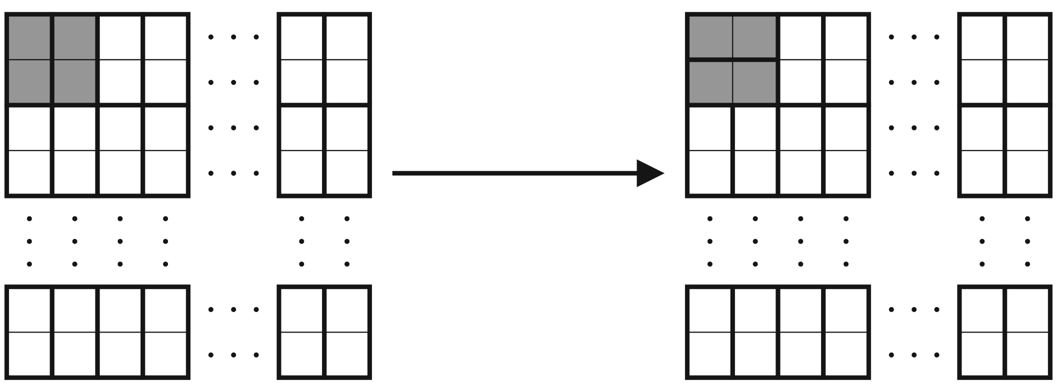
4. Софија и Виктор ја играат следната игра на табла со димензии 2022×2022:
- прво, Софија целосно ја покрива таблата со домина што не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата;
- следно, Виктор запишува позитивен цел број n на лист хартија, без притоа да ја види специфичната конфигурација од домина на таблата;
- потоа, Виктор ја гледа таблата со домината на неа, избира n од нив и ги фиксира (лепи) на таблата;
- после тоа, Софија ги отстранува од таблата преостаните (незалепени) домина, и се обидува да добие ново целосно покривање на таблата, кое би се разликувало од почетното.

Доколку Софија успее во тоа, таа победува, а во спротивно победник е Виктор.

Најдете ја најмалата можна вредност за n при која Виктор секогаш може да победи, без разлика на почетната конфигурација.

Решение. *Одговор:* 1011^2.

Да забележиме веднаш дека $n \geq 1011^2$. Навистина, нека почетното покривање на Софија е конфигурација при која таблата е најпрво поделена на (дисјунктни) 2×2 квадрати, и секој од нив е покриен со точно две домина. За победа, Виктор мора да фиксира барем по едно домино во секој од тие 2×2 квадрати. Од друга страна, бројот на такви 2×2 квадрати изнесува $\frac{2022^2}{4} = 1011^2$. **(1 поен)**



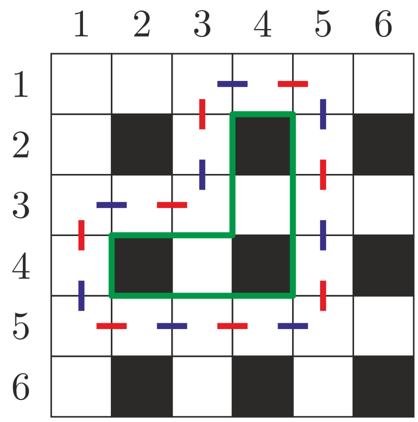
Ќе докажеме дека овој број е доволен. Ги нумерираме редиците и колоните со $1, 2, \ldots, 2022$, и на секое единечно квадратче му придаваме пар целобројни координати (број на редица, број на колона). Потоа го боиме во црно секое единечно квадратче за кое обете координати се непарни. Да забележиме дека во секој 2×2 квадрат на таблата е содржано точно едно црно квадратче и вкупниот број на црни квадратчиња изнесува $\frac{2022^2}{4} = 1011^2$. Го тврдиме следново:

Ако при произволно почетно покривање на таблата Виктор го фиксира секое домино што покрива црно квадратче, тогаш Софија не може да добие ново покривање кое се разликува од почетното.

Ова го докажуваме со контрадикција. Претпоставувајќи го спротивното, нека Софија сепак може да добие нова конфигурација. Конструираме два графа, син и црвен, чии темиња се единечните квадрати на таблата: имено, ги поврзуваме со сино ребро секои две темиња (единечни квадрати) кои се покриени со исто домино при почетната конфигурација, и додаваме по едно црвено ребро помеѓу секои две темиња (единечни квадрати) кои се покриени со исто домино при новата конфигурација. Да забележиме дека и синиот граф $G_{\text{син}} = (V, E')$ и црвениот граф $G_{\text{црвен}} = (V, E'')$ се 1-регуларни, т.е., во секој од нив темињата имаат степен 1. Земаме симетрична разлика на двата графа, односно го разгледуваме графот $G = (V, E' \triangle E'')$, игнорирајќи ги притоа боите на ребрата. Со оглед на тоа дека $E' \neq E''$, графот G не е празен, т.е. множеството ребра $E' \triangle E'' \neq \emptyset$. Секое неизолирано теме v во G има степен 2: имено, v е инцидентно со едно сино и со едно црвено ребро. Оттука влечеме три заклучоци:

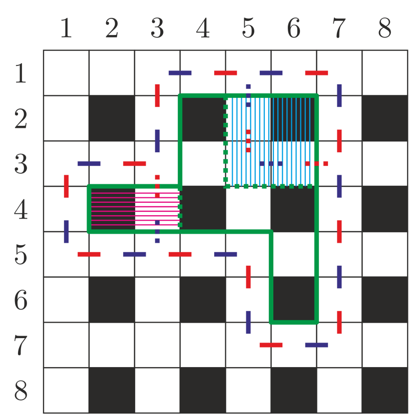
(*i*) секое црно теме (единечен квадрат) е изолирано во G;
(*ii*) $E' \triangle E''$ претставува дисјунктна унија од циклуси;
(*iii*) секој таков циклус C има парна должина и неговите ребра наизменично алтернираат во боја. **(4 поени)**

Да разгледаме еден произволен циклус C во G. Тој претставува затворена искршена линија без самопресекувања. Ја набљудуваме неговата *внатрешност* $\mathrm{Int}(C)$, т.е., севкупноста од сите единечни квадратчиња кои се целосно содржани внатре во C.



Да забележиме дека при обете конфигурации површината $\mathrm{Int}(C)$ е целосно покриена со домина (кои не излегуваат надвор од неа), бидејќи $\mathrm{Int}(C)$ е изолирана од остатокот на таблата. Притоа $\mathrm{Int}(C)$ е непразна: имено, мора да содржи барем едно црно единечно квадратче (со оглед на тоа дека секој 2×2 квадрат на таблата содржи точно едно црно квадратче). Од истите причини секое ќоше (аголно единечно квадратче) од $\mathrm{Int}(C)$ е црно. Ќе докажеме дека е невозможно површината $\mathrm{Int}(C)$ целосно да се покрие со домина (кои не излегуваат надвор од неа), покажувајќи го следново тврдење:

Плоштината на $\mathrm{Int}(C)$ *е непарна.*



Ова го потврдуваме со индукција по b, бројот на црни единечни квадратчиња содржани во $\mathrm{Int}(C)$. Тврдењето важи за $b = 1$, бидејќи тогаш вкупната плоштина изнесува 1. Нека $b > 1$ и тврдењето важи за сите помали вредности. Ќошињата на $\mathrm{Int}(C)$ се црни и можеме да заобиколиме (изоставиме) едно од нив, со што ја намалуваме плоштината за 2 (ако црното квадратче е на ќош во две насоки - штрафирано со хоризонтални линии) или за 4 (ако црното поле е на ќош во една насока - штрафирано со вертикални линии). Така парноста на плоштината останува непроменета, а вредноста на b се намалува за 1, па применлива е индуктивната претпоставка. **(3 поени)**

Со ова е комплетиран доказот дека $n \leq 1011^2$. □

Забелешка: Накратко, распределбата на поени гласи: 1 *поен за точен нумерички одговор,* 4 *поени за графовска репрезентација и воочување на алтернирачки циклус* C*,* 3 *поени за доказ дека плоштината на внатрешноста* $\mathrm{Int}(C)$ *е непарна.*

5. Даден е остроаголен триаголник ABC $(AB < AC)$ со опишана кружница Γ. Нека I и I_a се центрите на впишаната и A-припишаната кружница, соодветно. Правата AI по втор пат ја сече Γ во D, а точката A' е дијаметрално спротивна на A во однос на Γ. Точките X и Y се избрани на Γ така што важи $\angle IXD = \angle I_aYD = 90°$. Тангентите на Γ во X и Y се сечат во Z.

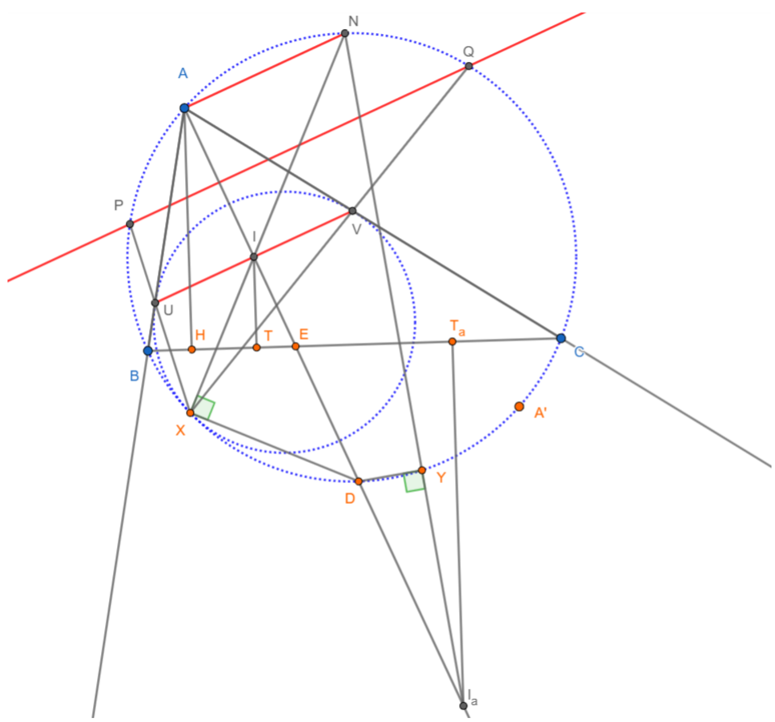
Докажете дека A', D и Z се колинеарни.

Решение. Даваме две решенија со независни распределби на поени.

Прво решение. Ќе го поделиме доказот на неколку чекори.

Чекор 1: Правите IX и I_aY се сечат на Γ.

Доказ: Нека N е средината на лакот $\overset{\frown}{BC}$ што ја содржи A. Тогаш ND е дијаметар во Γ, па $\angle NXD = 90°$. Правите IX и NX се нормални на DX, па IX минува низ N. Слично, $\angle NYD = 90°$, т.е. $NY \perp YD$, што значи дека I_aY минува низ N. Заклучуваме дека IX и I_aY се сечат на Γ во точката N. **(1 поен)** ⋄



Чекор 2: Нека P и Q се средините на помалите лакови $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AC}$. Нека правите PX и QX ги сечат отсечките AB и AC во U и V, соодветно. Тогаш опишаната кружница на $\triangle UXV$, означена со ω_1, е тангентна на AB, AC и Γ.

Доказ: Паскалова теорема применета на $BACPXQ$ ни дава дека точките $BA \cap PX = U$, $AC \cap XQ = V$ и $CP \cap BQ = I$ се колинеарни, па I лежи на правата UV.

Ако пак ја примениме Паскалова теорема на $NABQPX$, добиваме дека $NA \cap QP$, $AB \cap PX = U$ и $BQ \cap NX = I$ се колинеарни. Меѓутоа, познато е (и лесно се докажува со пресметување на аглите) дека $AN \parallel PQ$. Тоа значи дека AN и PQ се сечат во бесконечна точка, па правата IU е паралелна со правите AN и PQ.

Да воочиме дека $\angle DAN = 90^\circ$, бидејќи DN е дијаметар, па $AN \perp AI$. Оттука, PQ и UV се нормални на AI.

Бидејќи $PQ \parallel UV$, постои хомотетија $\mathcal{H}$ со центар во X таква што $\mathcal{H}(P) = U$ и $\mathcal{H}(Q) = V$. Тангентата t_P на Γ во P е паралелна со AB заради симетрија, па $\mathcal{H}(t_P) = AB$. Слично, тангентата t_Q на Γ во Q е паралелна со AC, па $\mathcal{H}(t_Q) = AC$.

Од претходната дискусија заклучуваме дека $\mathcal{H}(\Gamma) = \odot UXV$ и $\odot UXV$ ги допира правите AB и AC. Фактот дека $\odot UXV$ ја допира и Γ следува од $\mathcal{H}(\Gamma) = \odot UXV$. **(2 поени)** $\diamond$

Чекор 3: Кружниците Γ и ω_2 се допираат во Y, каде што ω_2 е кружницата тангентна на AB и AC што ја допира Γ од надворешната страна.

Доказ: Доказот е аналоген со доказот на Чекор 2, заради дуалноста помеѓу впишаната и A-припишаната кружница. **(1 поен)** $\diamond$

Чекор 4: Четириаголникот $XDYA'$ е хармониски.

Доказ. Нека Ψ е композицијата на инверзијата со центар A и радиус $r = \sqrt{AB \cdot AC}$ со рефлексијата во однос на симетралата на аголот $\angle BAC$. Јасно, $\Psi \circ \Psi$ е идентично пресликување.

Воведуваме неопходна нотација за неколку дополнителни точки. Нека H, T и T_a се нормалните проекции на A, I и I_a врз правата BC, соодветно. Нека E е пресечната точка на AD и BC. Имаме дека BI и BI_a се внатрешната и надворешната симетрала на аголот $\angle ABE$, па двојниот однос $(A, E; I, I_a)$ е еднаков на -1, односно овие точки формираат хармониска четворка.

Ортогонално проектирање го зачувува двојниот однос, и оттука $(H, E; T, T_a) = -1$. Користејќи го фактот дека инверзијата и рефлексијата го зачувуваат двојниот однос, доволно е да се докаже дека $\Psi(H) = A'$, $\Psi(E) = D$, $\Psi(T_a) = X$ и $\Psi(T) = Y$. Ова повлекува дека четириаголникот $A'DXY$ е хармониски, бидејќи Ψ го зачувува двојниот однос.

Лесно се гледа дека $\Psi(B) = C$ и $\Psi(C) = B$, па $\Psi(BC) = \Gamma$. Исто така, $E \in AD \cap BC$ повлекува $\Psi(E) \in \Psi(AD) \cap \Psi(BC) = AD \cap \Gamma$, што значи дека $\Psi(E) = D$.

Да забележиме дека $\triangle ABH$ е сличен со $\triangle AA'C$, што значи дека $AH \cdot AA' = AB \cdot AC = r^2$ и $\angle BAH = \angle CAA'$, па $\Psi(H) = A'$.

Сега ќе докажеме дека $\Psi(T_a) = X$. Бидејќи впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира AB, AC и BC, Ψ ја пресликува во кружницата што ги допира AB,AC и $\Gamma = \Psi(BC)$. Тоа значи дека A-припишаната кружница се пресликува или во ω_1 или во ω_2 (дефинирана во Чекор 2 и Чекор 3). Лесно се гледа дека A-припишаната кружница се пресликува во ω_1. Тоа значи дека $\Psi(T_a)$ истовремено лежи на ω_1 и Γ, следствено $\Psi(T_a) = X$. Слично добиваме дека $\Psi(T) = Y$, бидејќи впишаната кружница се пресликува во ω_2. **(3 поени)** $\diamond$

Заклучок: Докажавме дека $XDYA'$ е хармониски четириаголник. Добро познато својство на хармониските четириаголници е: *тангентите на нивната опишана кружница повлечени во две спротивни темиња се сечат на дијагоналата формирана преостанатите две темиња.* Заклучуваме дека тангентите на Γ во X и Y се сечат на правата $A'D$, што и требаше да се докаже. **(1 поен)** $\square$

*Забелешка: Поените за одреден чекор може да се заработат само доколку ве{*ке се добиени сите поени за секој претходен чекор.

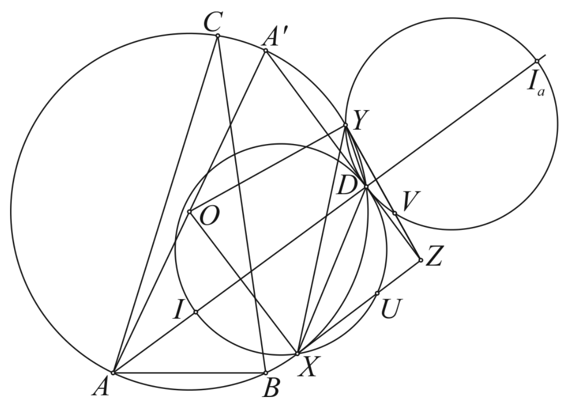
Второ решение. Прво да приметиме дека AA' е дијаметар во опишаната кружница, и оттука $\angle ADA' = 90^\circ$. **(1)**

Имаме

$$2 \cdot \angle DBI + \angle BDA = 2 \cdot \angle DBC + 2 \cdot \angle CBI + \angle BCA = 180^\circ\,,$$

што повлекува дека $\triangle BDI$ е рамнокрак. Исто така, $\angle IBI_a = 90^\circ$, што значи дека D е средишна точка на II_a, па $DI = DI_a$. **(1 поен)**.

Точките X и Y се на кружниците k_1 со дијаметар ID и k_2 со дијаметар DI_a, соодветно, односно овие точки се вторите пресечни точки на k_1 и k_2 со опишаната кружница на $\triangle ABC$ (D е првиот пресек). Користејќи го **(1)**, заклучуваме дека $A'D$ е заедничката тангента на k_1 и k_2. **(1 поен)**



Нека U и V се пресечните точки на k_1 со XZ и k_2 со YZ, соодветно. Ги имаме следниве сличности: $\triangle XUD \sim \triangle A'DX$ ($\angle UXD = \angle DA'X$ и $\angle XUD = \angle A'DX$). Следствено

$$\frac{XU}{DX} = \frac{A'D}{XA'}$$

и $\triangle YVD \sim \triangle A'DY$ ($\angle VYD = \angle DA'Y$ и $\angle YVD = \angle A'DY$), што повлекува

$$\frac{YV}{DY} = \frac{A'D}{YA'}.$$

Доколку ги поделиме овие равенства, добиваме

$$\frac{XU}{YV} = \frac{DX}{DY} \cdot \frac{A'D}{XA'} \cdot \frac{YA'}{A'D} = \frac{DX}{DY} \cdot \frac{YA'}{XA'} = \frac{DX}{DY} \cdot \frac{\sin\angle YDA}{\sin\angle XDA} =$$
$$= \frac{DX}{DY} \cdot \frac{\sin\angle YVD}{\sin\angle XUD} = \frac{DX}{\sin\angle XUD} \cdot \frac{\sin\angle YVD}{DY} = \frac{DI}{DI_a} = 1.$$

Од претходните пресметки добиваме $XU = YV$. **(3 поени)**

Сега, за степенот на Z во однос на k_1 и k_2 имаме:

$$ZX \cdot ZU = ZX \cdot (ZX - UX) = ZY \cdot (ZY - VY) = ZY \cdot ZV. \text{ } \textbf{(2 поени)}$$

Заклучуваме дека Z лежи на радикалната оса на кружниците k_1 и k_2, па $ZD \perp II_a$, што заедно со **(1)** повлекува дека Z, D и A' се колинеарни. **(1 поен)** $\square$