СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Изборен тест за ИМО 2022

Ден 1

Вторник, 17. Мај 2022

Задача 1. Нека n е позитивен цел број. Во редица се поставени n светилки, при што секоја светилка е во една од следните две состојби: вклучена или исклучена. При секој потег, избираме цел број i $(1 \leq i \leq n)$ и ја променуваме состојбата на првите i светилки во редицата. Определете ја најмалата вредност k така што после најмногу k потези секогаш може да се постигне сите светилки да се вклучени, независно од почетната конфигурација на состојби.

Задача 2. Даден е цел број $n \geq 2$. Нека $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ се такви што сите корени на полиномот $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$ се позитивни реални броеви. Одредете ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$.

Задача 3. Нека $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ги разгледуваме сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со особина за секои броеви $a, b, n \in \mathbb{N}$ да важи $f(f(n) + n) = n$ и $f(a + b - 1) \leq f(a) + f(b)$. Докажете дека за $f(2022)$ има најмногу две можни вредности.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Изборен тест за ИМО 2022

Ден 2

Среда, 18. Мај 2022

Задача 4. Даден е остроаголен триаголник ABC таков што $AB < AC$. Тангентите на опишаната кружница (ABC) повлечени низ точките B и C се пресекуваат во точка Y. Нека D и E се подножјата на висините BD и CE (спуштени кон AC и AB, соодветно). Кружницата ω_1 минува низ точката A и ја допира правата DE во точката E. Слично, кружницата ω_2 минува низ точката A и ја допира правата DE во точката D. Нека X е втората пресечна точка на кружниците ω_1 и ω_2. Докажете дека точките A, X и Y се колинеарни.

Задача 5. За дадени позитивни цели брови a и d, дефинирана е аритметичката прогресија $a_1 = a$ и $a_{n+1} = a_n + d$. За секој позитивен цел број x, нека $\omega(x)$ е бројот на различни (позитивни) прости делители на x. Докажете дека постојат бесконечно многу вредности k за кои бројот $\omega(a_k)$ е парен и бројот $\omega(a_{k+1})$ е непарен.

Задача 6. На табла се запишани броевите $1, 2$ и 3. Двајца другари ја играат следната игра. Наизменично, секој од играчите на таблата допишува еден број што не го надминува 2022 и не е претходно запишан на таблата, така што новиот број е збир или производ на два броја што веќе се појавуваат на таблата. Во играта победува оној кој ќе го запише бројот 2022. Кој од играчите има победничка стратегија и зошто?

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Изборен тест за ИМО 2022

Ден 1: Решенија и распределба на поени

Задача 1. Нека n е позитивен цел број. Во редица се поставени n светилки, при што секоја светилка е во една од следните две состојби: вклучена или исклучена. При секој потег, избираме цел број i $(1 \leq i \leq n)$ и ја променуваме состојбата на првите i светилки во редицата. Определете ја најмалата вредност k така што после најмногу k потези секогаш може да се постигне сите светилки да се вклучени, независно од почетната конфигурација на состојби.

Решение. Одговорот е: $k = n$.

Најпрво индуктивно го докажуваме неравенството $k \leq n$. Базата на индукција, т.е. случајот $n = 1$, е тривијално задоволена. Индуктивната претпоставка е дека со најмногу n потези секогаш може да се постигне состојбата во која сите n светилки се вклучени. Да разгледаме редица од $n+1$ светилки. Доколку последната (најдесната) светилка е исклучена, тогаш при првиот потег (избирајќи $i = n+1$) ја вклучуваме оваа светилка. За настанатата конфигурација од состојби на првите n светилки, согласно индуктивната претпоставка, доволни се уште најмногу n потези за да се постигне состојбата при која сите светилки се вклучени. Значи, во овој случај, со не повеќе од $n+1$ потези успеваме да ги вклучиме сите $n+1$ светилки.

Од друга страна, доколку последната светилка е првично вклучена, тогаш со не повеќе од n потези успеваме да ги вклучиме и првите n светилки. Со ова е комплетиран индуктивниот доказ дека $k \leq n$. **(3п)**

Во продолжение го докажуваме неравенството $k \geq n$, со тоа што ќе посочиме конкретна конфигурација од почетни состојби за која се неопходни n потези. Имено, нека почетната конфигурација состојби е алтернирачка, т.е. нема две соседни светилки во иста состојба, и притоа последната (најдесната) светилка е исклучена. Ваквата конфигурација ја нарекуваме n-*алтернирачка*.

Со индукција по n ќе докажеме дека n потези се потребни за вклучување на сите светилки од n-алтернирачка почетна конфигурација. Со други зборови, докажуваме дека при најмногу $n-1$ потези, секогаш барем една од светилките е исклучена.

Ова тврдење е тривијално точно за случајот $n = 1$. Разгледуваме $(n+1)$-алтернирачка почетна конфигурација. Да претпоставиме дека оптималната (најкратка) низа што доведува до состојба на вклученост на сите $n+1$ светилки се состои од не повеќе од n потези. Важно е да воочи дека редоследот на потези во оваа низа е сосема небитен: имено, состојбата на секоја светилка зависи само од парноста на бројот на потези во кои се дејствува врз неа. Бидејќи барем еден потег ја менува почетната состојба на последната светилка, можеме да претпоставиме дека тоа е првиот потег. Всушност тоа е единствениот таков потег (заради претпоставената оптималност на низата потези). Но после овој потег состојбите на првите n светилки формираат n-алтернирачка конфигурација и притоа секој од преостаните (најмногу $n-1$) потези воопшто не дејствува врз последната светилка. Оттука, согласно индуктивната претпоставка, барем една од првите n светилки е исклучена после завршниот потег од низата. Оваа противречност го комплетира индуктивниот доказ. **(4п)** $\square$

Задача 2. Даден е цел број $n \geq 2$. Нека $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ се такви што сите корени на полиномот $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ се позитивни реални броеви. Одредете ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$.

Решение. Одговорот е: $\frac{2n}{n-1}$.

Нека $t_1, t_2, ..., t_n$ е енумерација на корените на полиномот $P(x)$ (сите се позитивни реални броеви). Од Виетовите формули имаме

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = -\frac{a_{n-1}}{1} = -a_{n-1}$$

и

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} t_i t_j = \frac{a_{n-2}}{1} = a_{n-2}.$$

Да забележиме дека

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 - 2 \cdot \sum_{1\leq i<j\leq n} t_i t_j = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}. \quad \textbf{(2п)}$$

Неравенството на Коши-Шварц дава

$$n \cdot (a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}) = n \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 = a_{n-1}^2.$$

Следствено

$$(n-1) \cdot a_{n-1}^2 \geq 2n \cdot a_{n-2} \iff \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} \geq \frac{2n}{n-1}. \quad \textbf{(3п)}$$

За да докажеме дека вредноста $\frac{2n}{n-1}$ е навистина достижна, го искористиме полиномот $P(x) = (x-1)^n$. Така $t_1 = t_2 = ... = t_n = 1 > 0$. Да забележиме дека за овој конкретен избор на полином важи $a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} t_i = -n$ и $a_{n-2} = \sum_{1\leq i<j\leq n} t_i t_j = \binom{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot (n^2 - n)$, што значи дека

$$\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} = \frac{2n^2}{n^2 - n} = \frac{2n}{n-1}. \quad \textbf{(2п)}$$

$\square$

Задача 3. Нека $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ги разгледуваме сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со особина за секои броеви $a, b, n \in \mathbb{N}$ да важи $f(f(n) + n) = n$ и $f(a + b - 1) \leq f(a) + f(b)$. Докажете дека за $f(2022)$ има најмногу две можни вредности.

Решение. Доколку обележиме $f(1) = a$, имаме $f(a+1) = 1$ и $f(a+2) = f(f(a+1)+a+1) = a+1$.

Ќе докажеме дека $f(aF_i + F_{i+1}) = aF_{i-1} + F_i$, каде F_i е i-тиот член на Фибоначиевата низа ($F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$). Равенството е точно за $i = 1$. Ако го претпоставиме равенството $f(aF_i+F_{i+1}) = aF_{i-1}+F_i$, добиваме $f(aF_{i+1}+F_{i+2}) = f((aF_{i-1}+F_i)+(aF_i+F_{i+1})) = f(f(aF_i + F_{i+1}) + (aF_i + F_{i+1})) = aF_i + F_{i+1}$.

Следствено, индуктивно важи

$$f(aF_i + F_{i+1}) = aF_{i-1} + F_i\,, \tag{1}$$

за секој природен број i.

Лема. За секој природен број a постојат бесконечно многу природни броеви m такви што $F_m \equiv 1 \pmod a$.

Доказ: Нека a е природен број. Очигледно $F_1 = 1 \equiv 1 \pmod a$. Ја разгледуваме низата $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ од (најмали ненегативни) остатоци на F_i по модул a. Бидејќи има конечно многу такви остатоци (имено a), пар од последвателни остатоци мора да се повторува (после најмногу a^2 индекси). Уште повеќе почнувајќи од остатоците A_i и A_{i+1} можеме да ја генерираме целата низа во двете насоки. Ова следува од равенствата $A_{i+2} \equiv A_{i+1}+A_i \pmod a$ и $A_{i-1} \equiv A_{i+1}-A_i \pmod a$. Според ова низата $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ е периодична, па $A_{k\cdot t+1} = A_1 = 1$, каде t е основниот период; следствено $F_{k\cdot t+1} \equiv 1 \pmod a$ за секој природен број k.

За бројот $a = f(1)$, според лемата постои природен број n таков што $F_n \equiv 1 \pmod a$. Ова повлекува

$$\begin{aligned} aF_{n-2} + F_{n-1} = f(aF_{n-1} + F_n) &= f\left(a\cdot\left(F_{n-1} + \frac{F_n - 1}{a}\right) + 1\right) \\ &\le \left(F_{n-1} + \frac{F_n-1}{a}\right)\cdot f(a+1) \\ &= F_{n-1} + \frac{F_n-1}{a}\,. \end{aligned}$$

Значи $a^2 \le \frac{F_n-1}{F_{n-2}} < 3$, и оттука $a = 1$. Со замена во (1) добиваме $f(F_{n+1}) = F_n$. **(2п)**

Да воочиме дека

$$f(n+1) = f(n+2-1) \le f(n) + f(2) = f(n) + 1\,. \tag{2}$$

Со помош на индукција ќе докажеме дека f е монотоно растечка, од каде ќе следува дека $f(n+1) \in \{f(n), f(n)+1\}$.

За $n \in \{1,2\}$ секако важи $f(n+1) \ge f(n)$. Да претпоставиме дека $f(m) \ge f(m-1)$ за секој $m < n$, и нека $f(n) = k$. Ја разгледуваме низата со општ член $B_i = i + f(i)$, за која добиваме $B_{i+1} - B_i = f(i+1) - f(i) + 1$. Користејќи го (2), заклучуваме дека за секој $i+1 < n$ важи $1 \le B_{i+1} - B_i \le 2$. Според ова не постојат два последователни природни броеви кои не се во низата $(B_i)_{i=1}^{\infty}$. Следува дека постои природен број i таков што $B_i \in \{n-1, n\}$.

Ако $n = i + f(i)$, тогаш $i = f(f(i)+i) = f(n) = k$. Од (2) и индуктивната претпоставка добиваме $f(k-1) \in \{f(k)-1, f(k)\}$, па $f(f(k-1)+k-1) = k-1 = f(n)-1$. Бидејќи $f(k)+k = n$, заклучуваме дека важи $f(k-1)+k-1 \in \{n-2, n-1\}$. Од (2) добиваме $f(n-1) \le k = f(n)$.

Ако $n-1 = i + f(i)$, тогаш $f(n-1) = i$. Доколку $k < i$, важи $i+1+f(i+1) > n$, па $f(i+1) = f(i)+1$ и $f(n+1) = i+1 > f(n)+1$. Но ова противречи на (2), што значи дека мора да важи $k \ge i$; оттука $f(n) \ge f(n-1)$.

Со ова ја докажавме монотоноста на f. **(2п)**

Ќе докажеме уште дека $f(n) \in \left\{\left[\frac{n}{\phi}\right], \left[\frac{n}{\phi}\right]+1\right\}$, каде $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ова е точно за броевите на Фибоначи. Уште повеќе $F_{2i} = \left[\frac{F_{2i+1}}{\phi}\right] + 1$ и $F_{2i-1} = \left[\frac{F_{2i}}{\phi}\right]$.

Ако $f(k) = \left[\frac{k}{\phi}\right]$, тогаш $k = f(k + f(k)) = f(k + \left[\frac{k}{\phi}\right])$. Исто така $\frac{k+[k/\phi]}{\phi} < \frac{k\phi+k}{\phi^2} = k \cdot \frac{\phi+1}{\phi^2} = k$ и $\frac{k+[k/\phi]}{\phi} > \frac{k\phi+(k-1)}{\phi^2} = (k-1)\frac{\phi+1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi} > k-1$, што повлекува дека $f\left(k + \left[\frac{k}{\phi}\right]\right) = \left[\frac{k+[k/\phi]}{\phi} + 1\right]$.

Слично, ако $f(k) = \left[\frac{k}{\phi}\right] + 1$ тогаш $k = f\left(k + \left[\frac{k}{\phi} + 1\right]\right)$; следствено $k + 1 > \frac{k+1+[k/\phi]}{\phi} > k$, што повлекува $f\left(k + \left[\frac{k}{\phi} + 1\right]\right) = \left[\frac{k+1+[k/\phi]}{\phi}\right]$.

Според ова ако $f(m) \in \left\{\left[\frac{m}{\phi}\right], \left[\frac{m}{\phi} + 1\right]\right\}$ за секој $m < n$ и постои k таков што $n = k + f(k)$, тогаш $f(n) \in \left\{\left[\frac{n}{\phi}\right], \left[\frac{n}{\phi} + 1\right]\right\}$. Останува да го докажеме тврдењето кога $n \neq k + f(k)$. Според дискусијата за низата $(B_i)_{i=1}^{\infty}$, постои природен број k за кој важат равенствата $n-1 = k+f(k)$ и $n + 1 = k + 1 + f(k + 1)$.

Од $f(k) = n - 1 - k \in \left\{\left[\frac{k}{\phi}\right], \left[\frac{k}{\phi}\right] + 1\right\}$ добиваме $n \geq k + \left[\frac{k}{\phi}\right] + 1 > k\left(1 + \frac{1}{\phi}\right) = k\phi$. Слично, од $f(k + 1) = (n + 1) - (k + 1) = n - k \in \left\{\left[\frac{k+1}{\phi}\right], \left[\frac{k+1}{\phi}\right] + 1\right\}$ следува $n \leq k + \left[\frac{k}{\phi}\right] + 2 < (k + 1) \cdot \left(1 + \frac{1}{\phi}\right) = (k + 1)\phi$. Заклучуваме дека $\left[\frac{n}{\phi}\right] = k$. Од монотоноста на f следува дека $f(n) \in \{k, k + 1\}$, односно $f(n) \in \left\{\left[\frac{n}{\phi}\right], \left[\frac{n}{\phi}\right] + 1\right\}$, што и сакавме да докажеме.

Според ова $f(2022) \in \left\{\left[\frac{2022}{\phi}\right], \left[\frac{2022}{\phi}\right] + 1\right\}$, т.е. докажавме дека има најмногу две можни вредности. **(3п)** □

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

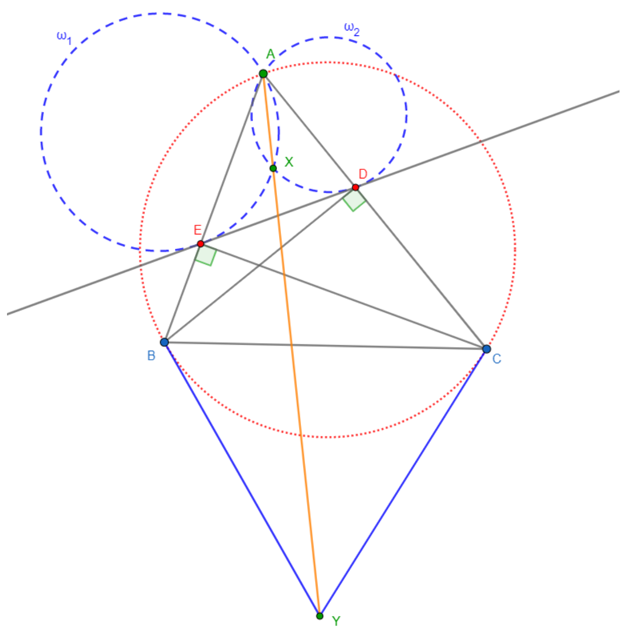
Изборен тест за ИМО 2022

Ден 2: Решенија и распределба на поени

Задача 4. Даден е остроаголен триаголник ABC таков што $AB < AC$. Тангентите на опишаната кружница (ABC) повлечени низ точките B и C се сечат во точка Y. Нека D и E се подножја на висините BD и CE (спуштени кон AC и AB, соодветно). Кружницата ω_1 минува низ точката A и ја допира правата DE во точката E. Слично, кружницата ω_2 минува низ точката A и ја допира правата DE во точката D. Нека X е втората пресечна точка на кружниците ω_1 и ω_2. Докажете дека точките A, X и Y се колинеарни.

Решение. Ќе докажеме дека A, X, Y се колинеарни со помош на инверзија. Прво да приметиме дека $\angle BDC = \angle BEC = 90°$, што значи дека четириаголникот $BCDE$ е тетивен. Од степенот на точка, имаме дека $AB \cdot AE = AC \cdot AD = r^2$ за некој позитивен реален број $r > 0$. Нека Ψ е инверзијата во однос на кружницата $k(A, r)$, со центар во A и радиус $r = \sqrt{AB \cdot AE}$. **(2п)**

Од $AB \cdot AE = AC \cdot AD = r^2$ добиваме $\Psi(E) = B$ и $\Psi(D) = C$. Нека l е правата DE. Тогаш $\Psi(l)$ е кружницата што минува низ центарот на инверзијата (точката A) и низ точките $\Psi(E) = B$ и $\Psi(D) = C$. Тоа значи дека $\Psi(l)$ е опишаната кружница на $\triangle ABC$. **(2п)**



Кружницата ω_1 минува низ A и E и ја допира правата l. Следствено, $\Psi(\omega_1)$ е правата што минува низ $\Psi(E) = B$ и ја допира $\Psi(l)$ (опишаната кружница на ABC). Оттука, оваа инверзија ја пресликува ω_1 во тангентата на опишаната кружница (ABC) низ точката B. Слично, $\Psi(\omega_2)$ е тангентата на опишаната кружница (ABC) низ точката C. Тоа значи дека втората пресечна точка, X, на ω_1 и ω_2 се пресликува во пресечната точка на $\Psi(\omega_1)$ и $\Psi(\omega_2)$, што е токму пресечната точка на споменатите тангенти, т.е. точката Y. **(3п)** $\square$

Задача 5. За дадени позитивни цели броеви a и d, дефинирана е аритметичката прогресија $a_1 = a$ и $a_{n+1} = a_n + d$. За секој позитивен цел број x, нека $\omega(x)$ е бројот на различни (позитивни) прости делители на x. Докажете дека постојат бесконечно многу вредности k за кои бројот $\omega(a_k)$ е парен и бројот $\omega(a_{k+1})$ е непарен.

Решение. Ќе докажеме дека за секој индекс k постои индекс l, $l > k$, таков што $\omega(a_k)$ и $\omega(a_l)$ имаат различна парност. Имено, ќе ја докажеме и употребиме следната лема:

Лема. За секој позитивен цел број N, постои позитивен цел број t таков што $\omega(Nt + 1)$ е непарен.

Доказ. Случаевите $N = 1, 2, 3, 4$ се едноставни. Да претпоставиме дека за некое $N > 4$ важи спротивно на тврденото, т.е. дека $Nt + 1$ има парен број на (позитивни) прости делители за секое $t \geq 1$. Да забележиме дека

$$(Nt - 1)^2 = N^2t^2 - 2Nt + 1 = N(Nt^2 - 2t) + 1.$$

Заради $Nt^2 - 2t > 4t^2 - 2t > 1$, од појдовната претпоставка следува дека бројот $(Nt - 1)^2 = N(Nt^2 - 2t) + 1$ има парен број на прости делители. Следствено, и $Nt - 1$ има парен број на прости делители за секое $t \geq 1$. Освен тоа, за сите $a, b \geq 1$, бројот $(Na \pm 1)(Nb \pm 1)$ има парен број на прости делители затоа што

$$(Na + 1)(Nb + 1) = N(Nab + a + b) + 1$$

$$(Na - 1)(Nb + 1) = N(Nab + a - b) - 1$$

$$(Na + 1)(Nb - 1) = N(Nab - a + b) - 1$$

$$(Na - 1)(Nb - 1) = N(Nab - a - b) + 1.$$

Да претпоставиме дека $\omega(Na \pm 1) = r$, $\omega(Nb \pm 1) = s$ и $\omega((Na \pm 1)(Nb \pm 1)) = u$ (за соодветен избор на знаците). Тогаш броевите r, s и u се парни. Бројот на *различни* заеднички прости делители на $Na \pm 1$ и $Nb \pm 1$ изнесува $r + s - u$, што исто така е парен број (бидејќи секој од заедничките фактори се брои два пати).

Да избереме прост делител p на $N - 1 > 3$. Заради појдовната претпоставка, броевите $N - 1$ и $(p - 1)N + 1$ имаат парен број на заеднички прости делители. Да забележиме дека $p|N - 1$ и $p|(p-1)N+1 = pN-(N-1)$, па p е нивен заеднички прост делител. Ако $q|N-1$, $q|(p-1)N+1$ е друг заеднички прост делител, тогаш $q|pN$, што не е возможно за $q \neq p$. Навистина, тоа би значело дека $q|N$ и $q|N-1$, што би повлекувало $q|1$, противречност. Значи $N-1$ и $(p-1)N+1$ имаат само еден заеднички прост делител, p, што не е возможно како што веќе докажавме. Со ова е комплетиран доказот на лемата. **(4п)**

Нека k е фиксиран индекс. Дефинираме $N = a_kd$. Применувајќи ја лемата за N добиваме дека постои $t \geq 1$ таков што $\omega(a_kdt + 1)$ е непарен. Броевите $a_kdt + 1$ и a_k се заемно прости, па $\omega(a_k + a_k^2dt) = \omega(a_k \cdot (1 + a_kdt)) = \omega(a_k) + \omega(1 + a_kdt)$ што има различна парност од $\omega(a_k)$, бидејќи $\omega(1 + a_kdt)$ е непарен. Можеме да избереме $a_l = a_k + a_k^2t \cdot d$, каде што $l > k$ и тогаш $\omega(a_k)$ и $\omega(a_l)$ имаат различна парност. **(1п)**

Набљудувајќи ја низата $(\omega(a_n))_{n=1}^{\infty}$ по модул 2, заклучуваме дека добиената низа на остатоци има бесконечно многу нули и бесконечно многу единици. Ова следи од претходното, бидејќи ако $\omega(a_k) = 0 \pmod 2$, тогаш $\omega(a_l) = 1 \pmod 2$ за некое $l > k$ и обратно. **(1п)**

Ако ги групираме членовите на оваа група во блокови од нули и единици, тогаш имаме бесконечно многу премини од блок нули во блок единици. Оттука следи заклучокот на задачата. **(1п)** □

Задача 6. На табла се запишани броевите $1, 2$ и 3. Двајца другари ја играат следната игра. Наизменично, секој од играчите на таблата допишува еден број што не го надминува 2022 и не е претходно запишан на таблата, така што новиот број е збир или производ на два броја што веќе се појавуваат на таблата. Во играта победува оној кој ќе го запише бројот 2022. Кој од играчите има победничка стратегија и зошто?

Решение. Најпрво забележуваме дека сите позитивни делители на 2022 се броевите: 1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011 и 2022.

Бидејќи во само еден чекор, секој од играчите може да обезбеди бројот 6 да се појавува на таблата, во секој подоцнежен чекор броевите 337, 674 и 1011 треба да се избегнуваат. Имено, ако некој играч запише еден од овие три броеви, тогаш другиот може со множење да го добие 2022 во следниот чекор.

Ги разгледуваме паровите $\{1, 2021\}$, $\{2, 2020\}$,...,$\{1010, 1012\}$. Доколку двата броја од ист пар се веќе запишани на таблата, играчот кој е на ред може да го запише 2022 (нивниот збир), со што победува. Според ова најмногу 1010 броеви се запишани на таблата пред „победничкиот чекор“. Бидејќи 1010 броеви можат да бидат запишани со 1007 чекори, во ваков случај вториот играч победува.

Останува да докажеме дека вториот играч има стратегија со која запишува број од нов пар, доколку првиот го направи тоа во претходниот чекор. Бројот m го нарекуваме *дозволен* ако m, $2022 - m$ не се веќе запишани на таблата и $m \notin \{337, 674, 1011\}$, а парот $\{m, 2022 - m\}$ го нарекуваме *употребен* ако m или $2022 - m$ е веќе запишан на таблата и $m \notin \{337, 664\}$.

Тврдиме дека една победничка стратегија за вториот играч е следната:

Вториот играч ќе го запише бројот 6 *во првиот негов чекор, доколку првиот играч не го сторил тоа претходно. Со исклучок на ова, вториот играч во секој свој чекор го запишува моментно најмалиот дозволен број.* **(1п)**

Доказот дека ова е навистина победничка стратегија го даваме со помош на две леми.

Лема 1. Со наведената стратегија, пред секој чекор на вториот играч за секој природен број r, $1010 \geq r \geq 6$, кај сите употребени парови $\{1, 2021\}, \ldots, \{r, 2022 - r\}$ помалиот број од пар е запишан во најмалку четири наврати повеќе отколку поголемиот број од пар.

Доказ. На самиот почеток, на таблата се појавуваат броевите 1, 2, 3, и во првиот свој потег првиот играч го запишува 4, 5 или 6. Според ова, кај сите 4 употребени парови (до тој момент) е запишан помалиот број, односно на таблата има за 4 повеќе помали броеви од пар одошто поголеми броеви.

Ако најмалиот дозволен број пред конкретен чекор на вториот играч е $n > 1011$, тогаш сите парови се веќе употребени (останат е уште еден од броевите $4 \cdot 337$ и $5 \cdot 337$). Следува дека тврдењето на лемата е веќе исполнето за секое r и разликата #(помал број од употребен пар) $-$ #(поголем број од употребен пар) не може дополнително да се менува.

Ако пак најмалиот дозволен број пред конкретен чекор на вториот играч е $n < 1011$, тогаш тој играч согласно стратегијата го запишува n (што е помал број во пар), а првиот играч во следниот негов чекор би можел да запише најмногу еден поголем број n'. Со оглед на тоа дека n е моментно најмалиот дозволен број, ако $2022 - n' \notin \{337, 664\}$ тогаш $2022 - n' > n$. Сега за $r < n$ нема промена на бројот на запишани помали и поголеми броеви од пар, додека за $r \geq n$ бројот на запишани помали броеви од пар е зголемен за еден а бројот на запишани поголеми броеви од пар е зголемен за најмногу еден.

Според ова разликата #(помал број од употребен пар) $-$ #(поголем број од употребен пар) не може да се намали, што ја докажува лемата. **(2п)**

Лема 2. Нека $n > 6$ е природен број и $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е множество со $k > \frac{n}{2}$ различни елементи што се помали од n, меѓу кои не е $\frac{n}{2}$. Постојат два различни броеви a_i и a_j, такви што $a_i + a_j = n$.

Доказ. Доколку $n = 2t + 1$ е непарен, ги разгледуваме паровите $\{1, n-1\}, \ldots, \{t-1, t\}$. Бидејќи има најмалку $k \geq t$ броеви во S, во $t-1$ пар, од принципот на Дирихле следува дека од барем еден пар двата броеви се во S. Изборот овие броеви да бидат a_i и a_j ни го дава бараниот збир.

Ако пак $n = 2t$ е парен, ги разгледуваме паровите $\{1, n-1\}, \ldots, \{t-1, t+1\}$. Бидејќи има најмалку $k \geq t$ броеви во S, во $t-1$ пар, од принципот на Дирихле следува дека од барем еден пар двата броеви се во S. Изборот овие броеви да се a_i и a_j ни го дава бараниот збир. **(2п)**

Да разгледаме произволен момент од играта кога на потег е вториот играч и докажуваме дека тој може да ја реализира стратегијата, т.е. е во можност да го запише моментно најмалиот дозволен број. Нека најмалиот дозволен број е n. Ако $n < 1011$, тогаш се употребени сите парови со помал број $m < n$. Според Лема 1 за $r = n-1$ од најмалку четири повеќе од употребените парови е запишан помалиот број. Бидејќи има најмалку $n-2$ вакви употребени парови (ако $n > 664$ за броевите 337 и 664 нема употребен пар), добиваме дека има најмалку $\frac{n-2}{2} + 2 = \frac{n}{2} + 1$ запишани броеви помали од n. Сега според Лема 2 вториот играч може да го запише бројот n.

Ако $n > 1011$, сите парови се употребени и останува уште еден дозволен број: имено $4 \cdot 337$ или $5 \cdot 337$. За $n = 4 \cdot 337$, според Лема 1 за $r = 664$, бидејќи 337 не се брои, имаме дека најмалку $\frac{663-1}{2} + 2 = 338$ од броевите помали од 664 се запишани. Од броевите меѓу 665 и $4 \cdot 337 - 1$ има 336 употребени парови, па се запишани 336 броеви. Според ова има најмалку $2 \cdot 337$ запишани броеви помали од $n = 4 \cdot 337$, меѓу кои не е бројот $2 \cdot 337$. Сега од Лема 2 следува дека вториот играч може да го запише бројот $n = 4 \cdot 337$. За $n = 5 \cdot 337$, според Лема 1 за $r = 337$, имаме дека најмалку $\frac{336}{2} + 2 = 170$ од броевите помали од 337 се запишани. Од броевите меѓу 338 и $5 \cdot 338 - 1$ има $2 \cdot 336$ употребени парови, а запишан е и бројот $4 \cdot 337$, што значи дека се запишани 663 броеви. Според ова има најмалку $2 \cdot 337 + 169 > \frac{5 \cdot 337}{2}$ запишани броеви помали од $n = 5 \cdot 337$. Од Лема 2, вториот играч може да го запише бројот $n = 5 \cdot 337$.

Со ова докажавме дека првиот играч најдоцна во неговиот 504-ти чекор мора да запише број кој не е дозволен, па вториот играч победува во следниот потег. **(2п)** $\square$

Забелешка. Во врска со распределбата на поени, го напоменуваме следното:

- 1 поен се доделува за дадена победничка стратегија, но не само за тврдењето дека вториот играч има победничка стратегија;
- 2 поени се доделуваат за Лема 1 или слична (точна) лема во која се тврди дека разликата е поголема од $s > 2$. За слична лема во која тврдењето не е за општ број r не се доделуваат поени;
- 2 поени се доделуваат за Лема 2. За слична лема во која се бара поголема вредност за k се доделува 1 поен освен во случајот кога Лема 1 е докажана за соодветен број;
- Последните два поени можат да се добијат само ако се наведени (може и без доказ) претходните леми или слични на нив.