64 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
8-9.05.2021

Прва година

1. Нека $S_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$. Покажи дека $S_0=S_1=0$, $S_2=1$ и $S_3=a+b+c$.

Решение. Да забележиме дека мора $a\neq b\neq c\neq a.$ Имаме:

$$S_0=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0 \text{ и}$$

$$S_1=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0.$$

Потоа,

$$S_2=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)}\left[a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)\right].$$

Со разложување добиваме,

$$a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)=ab(a-b)-c\left(a^2+b^2\right)+c^2(a-b)=$$

$$=(a-b)\left(ab-ca-cb+c^2\right)=(a-b)\left[a(b-c)-c(b-c)\right]=(a-b)(a-c)(b-c).$$

Одовде, $S_2=1.$ Слично, за S_3 добиваме

$$S_3=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)}\left[a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)\right]=\frac{ab\left(a^2-b^2\right)-c\left(a^3-b^3\right)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)\left[ab(a+b)-c\left(a^2+ab+b^2\right)+c^3\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)\left[a^2(b-c)+ab(b-c)-c\left(b^2-c^2\right)\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)(b-c)\left[a^2+ab-c(b+c)\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(b-c)\left[(a-c)(a+c)+b(a-c)\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=a+b+c.$$

Ќе дадеме и втор начин за добивање на S_3. За произволно $x,$ имаме $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc.$ Ако во ова равенство последователно замениме $x=a, x=b$ и $x=c,$ добиваме

$$\begin{cases}a^3-(a+b+c)a^2+(ab+ac+bc)a-abc=0\\ b^3-(a+b+c)b^2+(ab+ac+bc)b-abc=0\\ c^3-(a+b+c)c^2+(ab+ac+bc)c-abc=0\end{cases}.$$

Ако првото равенство го поделиме со $(a-b)(a-c)$, второто со $(b-a)(b-c)$ и третото со $(c-a)(c-b)$, а потоа ги собереме трите равенства, ќе добиеме дека $S_3-(a+b+c)S_2+(ab+ac+bc)S_1-abcS_0=0$. Со замена на претходните вредности на S_0,S_1 и S_2, добиваме дека $S_3=a+b+c$.

2. На колку начини може бројот $\frac{2020}{2021}$ да се запише како производ на две дропки од обликот $\frac{n}{n+1}$, каде $n\in\mathbb{N}$. Образложи го одговорот!

Решение. Нека $n,m\in\mathbb{N}$, така што $\frac{2020}{2021}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{m}{m+1}$. Од тука имаме дека $2020(n+1)(m+1)=2021nm$, односно $2020(n+m+1)=nm$. Ако го изразиме n ќе добиеме

$$n=\frac{2020(m+1)}{m-2020}=\frac{2020(m-2020)+2020\cdot 2021}{m-2020}=2020+\frac{2020\cdot 2021}{m-2020}.$$

Бидејќи $n,m\in\mathbb{N}$, тогаш мора $m-2020$ да е позитивен делител на $2020\cdot 2021$ и на секој делител на $2020\cdot 2021$ одговара точно еден пар (n,m). Бидејќи, $2020\cdot 2021=2^2\cdot 5\cdot 43\cdot 47\cdot 101$, бројот на делители на $2020\cdot 2021$ е $3\cdot 2^4=48$. Значи, постојат 48 начини на запишување на бројот $\frac{2020}{2021}$ како производ на две дропки од дадениот облик.

3. Одреди ги сите реални броеви x за кои важи $\{x\}=\frac{x+[x]+(x)}{10}$, каде $[x]$ е најголемиот цел број не поголем од x, $\{x\}=x-[x]$ и $(x)=[x+\frac{1}{2}]$.

Решение. Го заменуваме равенството $x=[x]+\{x\}$ во даденото равенство и добиваме $10\{x\}=[x]+\{x\}+[x]+(x)$, односно $9\{x\}-2[x]-(x)=0$. (1)

Да забележиме дека $\{x\}\in[0,1)$. Сега го запишуваме во поинаква форма бројот $(x)=[x+\frac{1}{2}]=[[x]+\{x\}+\frac{1}{2}]$ и разгледуваме два случаја:

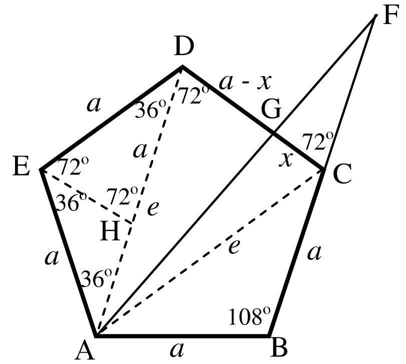
1) Ако $\{x\}\in[0,\frac{1}{2})$, тогаш $(x)=[x]$, па со замена во (1) добиваме $9\{x\}-3[x]=0$, односно $[x]=3\{x\}\in[0,\frac{3}{2})$. Добиваме две решенија $[x]_1=0$ и $[x]_2=1$, соодветно $\{x\}_1=0$ и $\{x\}_2=\frac{1}{3}$, значи двете решенија во овој случај се $x_1=0$ и $x_2=\frac{4}{3}$.

2) Ако $\{x\}\in[\frac{1}{2},1)$, тогаш $(x)=[x]+1$, па со замена во (1) добиваме $9\{x\}-3[x]-1=0$, односно $[x]=3\{x\}-\frac{1}{3}\in[\frac{7}{6},\frac{8}{3})$. Од тука добиваме трето решение $[x]_3=2$, соодветно $\{x\}_3=\frac{7}{9}$, па третото решение е $x_3=\frac{25}{9}$.

Значи, реалните броеви за кои важи даденото равенство се 0, $\frac{4}{3}$ и $\frac{25}{9}$.

4. Страната $\overline{BC}=a$ на правилниот петаголник $ABCDE$ е продолжена низ темето C до точката F така што $\overline{CF}=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$. Изрази ја должината на отсечката $\overline{AF}$ со помош на должината на страната a.

Решение.



Означуваме со $d=\overline{CF}=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$. Нека пресекот на AF и CD е точката G. Нека $\overline{CG}=x$, тогаш $\overline{GD}=a-x$ и нека $\overline{AD}=e$.

Од сличноста $\Delta DAG\sim\Delta CFG$ важи пропорцијата $e:(a-x)=d:x$, од каде $x=\frac{ad}{e+d}$. (1)

Означуваме точка H на дијагоналата AD така што $\overline{DH}=a$, па тогаш $\overline{AH}=e-a$.

Од сличноста $\Delta ADE\sim\Delta EAH$ имаме $e:a=a:(e-a)$, од каде $e(e-a)=a^2$. (2)

Ќе покажеме дека отсечката AF ја преполовува страната CD, а за ова да е точно, доволно е да покажеме дека $e=d$. Да забележиме дека за $d=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$ имаме

$$d(d-a)=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}\left(\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}-a\right)=\frac{a^2(1+\sqrt{5})^2}{4}-\frac{a^2(1+\sqrt{5})}{2}=$$

$$=\frac{a^2(1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5})}{4}=a^2.$$

Сега, од последното равенство и од (2) имаме $e(e-a)=d(d-a)$, од каде $(d-e)(d+e-a)=0$. Да забележиме дека $d>a$ и $e>a$, па не може $d+e-a=0$, значи останува $d-e=0$, односно $d=e$. Од $d=e$ и сличноста $\Delta DAG\sim\Delta CFG$, следи складноста $\Delta DAG\cong\Delta CFG$. Оттука заклучуваме дека отсечката AF ја преполовува страната CD.

Бидејќи отсечката AF ја преполовува страната CD, важи и $\Delta DGA\cong\Delta CGA$ (од $\overline{DA}=\overline{CA}=e$, $\sphericalangle ADG=\sphericalangle ACG=72°$ и $\overline{DG}=\overline{CG}=\frac{a}{2}$), од каде добиваме дека $AF\perp CD$. Ја применуваме Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник AGD и добиваме

$$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{DG}^2}=\sqrt{\frac{a^2(1+\sqrt{5})^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-1}=\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Од $\Delta DAG\cong\Delta CFG$ имаме дека $\overline{AG}=\overline{GF}$, па бараната должина е $\overline{AF}=2\overline{AG}=a\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Втора година

1. Во една игра се користат три видови на монети, секој вид со различна вредност изразена во денари. Вредноста на монетите е било кој цел позитивен број. Бојан, Аце и Сашо имаат секој по барем една монета од секој вид. Бојан има 4 монети со вкупна вредност 28 денари, Аце има 5 монети со вкупна вредност 21 денар, а Сашо има 3 монети. Која е вкупната вредност на монетите на Сашо?

Решение. Нека a,b и c се вредностите на монетите, па за вредноста на монетите на Бојан важи $2a+b+c=28$.

Тогаш вредноста на монетите на Аце може да биде: $3a+b+c$, $2a+2b+c$, $2a+b+2c$, $a+2b+2c$, $a+3b+c$ или $a+b+3c$.

Од тоа што
$3a+b+c=2a+b+c+a=28+a>28$, $2a+2b+c=2a+b+c+b=28+b>28$ и $2a+b+2c=2a+b+c+c=28+c>28$, следува дека можни случаи се следниве: $a+2b+2c=21$, $a+3b+c=21$ или $a+b+3c=21$.

- За $a+2b+2c=21$, ако се соберат $a+2b+2c=21$ и $2a+b+c=28$ добиваме $3(a+b+c)=49$, што не е можно затоа што 49 не е делив со 3.
- За $a+3b+c=21$, ако од $2a+b+c=28$ одземеме $a+3b+c=21$ добиваме $a-2b=7$ и оттука $a=2b+7$, значи a е непарен број и тоа најмалку 9.

Сега, за $a=9$, добиваме $b=1$ и $c=9$, ама a,b и c се различни, па a е најмалку 11. Од тоа што $b+c\geq 3$, имаме $28=2a+b+c\geq 2a+3$ и оттука $2a\leq 25$, т.е. $a\leq 12$.
Значи, $a=11$, $b=2$ и $c=4$, па $a+b+c=17$.
Слично, ако $a+b+3c=21$ се добива дека $a=11$, $b=4$ и $c=2$, па $a+b+c=17$.
Значи, вкупната вредност на монетите на Сашо е 17 денари.

2. Реши го системот: $\begin{cases} 11x-yz=18 \\ 11y-zx=18 \\ 11z-xy=18 \end{cases}$.

Решение. Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка добиваме $11x-11y-yz+zx=0$, $11(x-y)+z(x-y)=0$, $(x-y)(11+z)=0$. Разгледуваме две различни можности:

1. Нека $x=y$. Тогаш, ако од $11x-xz=18$ ја одземеме третата равенка $11z-x^2=18$ добиваме $(x-z)(11+x)=0$. Имаме два случаи:

- $x=z$, тогаш $x=y=z$ па $x^2-11x+18=0$ и добиваме $x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{2}=\frac{11\pm 7}{2}$, т.е. $x_1=9$ или $x_2=2$. Решенија на системот се $(2,2,2)$ и $(9,9,9)$.
- $x=-11$, тогаш $y=-11$ и имаме $z=\frac{x^2+18}{11}=\frac{121+18}{11}=\frac{139}{11}$, па решение на системот е $(-11,-11,\frac{139}{11})$.

2. Нека $z=-11$. Тогаш, од третата равенка следува $xy=-121-18=-139$, а од првата $11x+11y=18$, т.е. $x+y=\frac{18}{11}$. Јасно, сега x и y се решенија на квадратната равенка $u^2-\frac{18}{11}u-139=0$, од каде добиваме:

$$u_{1,2}=\frac{\frac{18}{11}\pm\sqrt{\frac{324}{121}+556}}{2}=\frac{18\pm\sqrt{324+556\cdot 121}}{2\cdot 11}=\frac{18\pm 260}{2\cdot 11}=\frac{9\pm 130}{11},$$

односно $x=\frac{139}{11}, y=-11$ или $x=-11, y=\frac{139}{11}$. Решенија на системот се $(\frac{139}{11},-11,-11)$ и $(-11,\frac{139}{11},-11)$.

Конечно, сите решенија на системот се: $(2,2,2)$, $(9,9,9)$, $(-11,-11,\frac{139}{11})$, $(\frac{139}{11},-11,-11)$ и $(-11,\frac{139}{11},-11)$.

3. Дали е можно да се најдат четири различни реални броеви такви што кубот на секој од тие броеви е еднаков на збирот на квадратите на останатите три броеви? Образложи го и докажи го твојот одговор.

Решение. Од тоа што w,x,y,z се различни реални броеви и равенките се симетрични, без губење на општоста може да претпоставиме дека $w>x>y>z$. Според условот на задачата го добиваме следниот систем

$$\begin{cases} x^3=y^2+z^2+w^2 \\ y^3=z^2+w^2+x^2 \\ z^3=w^2+x^2+y^2 \\ w^3=x^2+y^2+z^2 \end{cases}.$$

Од тоа што $z^3=w^2+x^2+y^2$ и $w^2+x^2+y^2\geq 0$ следува $z\geq 0$.

Ако $z=0$, тогаш од $w^2+x^2+y^2=0$ следува $w=x=y=0$. Ова е во контрадикција со условот броевите да се различни, па затоа мора $z>0$, уште повеќе $w>x>y>z>0$.

Од $w^3=x^2+y^2+z^2$ и $w>x>y>z$ следува $w^3=x^2+y^2+z^2<3w^2$, а оттука $w^3-3w^2<0$ односно $w^2(w-3)<0$. Бидејќи $w^2\geq 0$, добиваме $w-3<0$ т.е. $0<w<3$, а оттука следува $0<z<y<x<w<3$.

Ако ги собереме сите равенки во системот добиваме:

$$w^3+x^3+y^3+z^3=3x^2+3y^2+3z^2+3w^2,$$
$$(w^3-3w^2)+(x^3-3x^2)+(y^3-3y^2)+(z^3-3z^2)=0$$

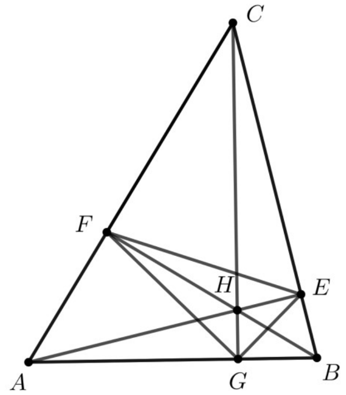
За било кој број $0<a<3$ важи $a^2(a-3)<0$ т.е. $a^3-3a^2<0$, што значи сите собироци во заградите во последното равенство се негативни, а нивниот збир е 0, што е контрадикција. Јасно, не може да се најдат четири различни реални броеви со горенаведеното својство.

4. Во остроаголниот триаголникот ABC, точките E, F и G се подножјата на висините повлечени од темињата A, B и C, соодветно, а H е ортоцентарот на триаголникот. Ако $\overline{AB}=\overline{CH}$, докажи дека $P_{AGF}\cdot\overline{BC}^2+P_{BEG}\cdot\overline{AC}^2=P_{CFE}\cdot\overline{AB}^2$, каде што P_{AGF}, P_{BEG} и P_{CFE} се плоштините на триаголниците AGF, BEG и CFE, соодветно.

Решение. Триаголниците ABF и HCF се складни (правоаголни се, имаат еднакви хипотенузи $\overline{AB}=\overline{CH}$ и $\angle ABF=\angle HCF=90°-\alpha$). Затоа $\overline{BF}=\overline{CF}$ и од правоаголниот триаголник CFB следува дека $\gamma=45°$ и $\angle CBF=45°$. Од тетивниот четириаголник $FGBC$ следува $\angle FGC=\angle FBC=45°$, а од тетивниот четириаголник $HGBE$ следува $\angle HGE=\angle HBE=45°$. Оттука $\angle FGE=90°$.

(Може веднаш да се искористи и фактот дека $\angle FGE=180°-2\gamma$ и $\angle FGH=90°-\gamma=\angle EGH$).

Од правоаголниот триаголник FGE следува $\overline{FG}^2+\overline{GE}^2=\overline{EF}^2$.



Од друга страна, $\angle AFG=90°-\angle GFB=90°-\angle GCB=\beta$ и $\angle GAF=\angle CAB=\alpha$, па ΔAGF е сличен со ΔACB. Слично, слични се ΔBEG и ΔBAC, како и ΔCFE и ΔCBA. Затоа важат следните односи на плоштините: $\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{GF}^2}{\overline{CB}^2}$, $\frac{P_{BEG}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{EG}^2}{\overline{AC}^2}$ и $\frac{P_{CFE}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{FE}^2}{\overline{BA}^2}$, или ако изразиме $\overline{GF}^2=\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}}\overline{CB}^2$, $\overline{EG}^2=\frac{P_{BEG}}{P_{ABC}}\overline{AC}^2$ и $\overline{FE}^2=\frac{P_{CFE}}{P_{ABC}}\overline{BA}^2$.

Ги заменуваме во равенството $\overline{FG}^2+\overline{GE}^2=\overline{EF}^2$ и добиваме $\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}}\overline{CB}^2+\frac{P_{BEG}}{P_{ABC}}\overline{AC}^2=\frac{P_{CFE}}{P_{ABC}}\overline{BA}^2$.

Оттука директно следува $P_{AGF}\cdot\overline{BC}^2+P_{BEG}\cdot\overline{AC}^2=P_{CFE}\cdot\overline{AB}^2$.

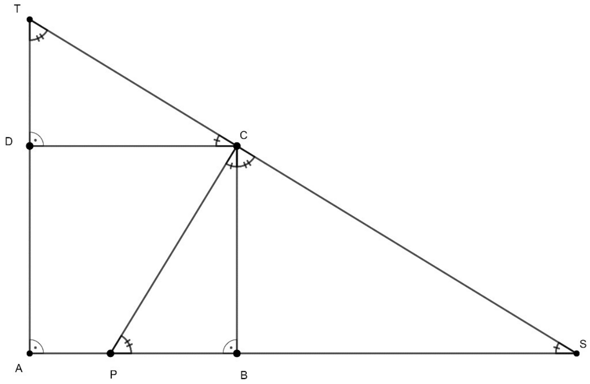
Трета година

1. Даден е квадратот $ABCD$ со должина на страна 1. На страната AB избрана е произволна точка P. Правата која минува низ темето C и е нормална на отсечката CP, ги сече продолженијата на страните AB и AD во точките S и T соодветно. Ако $\overline{AS}=x$ и $\overline{AT}=y$, докажи дека важи $\log(x+y)=\log x+\log y$.

Прво решение. Нека $\overline{AP}=t$. Тогаш $\overline{BP}=1-t$. Ќе ги претставиме x и y со помош на t.
Од условите на задачата важи $\Delta BCP\cong\Delta DCT$ (види цртеж), и затоа $\overline{DT}=\overline{BP}=1-t$. Јасно, сега $y=2-t$. Од сличноста на триаголниците ΔDTC и ΔATS следува $\overline{DT}:\overline{AT}=\overline{DC}:\overline{AS}$ од каде пак добиваме $x=\overline{AS}=\frac{\overline{AT}\cdot\overline{DC}}{\overline{DT}}=\frac{2-t}{1-t}$.

Тогаш $\log(x+y)=\log\left(\frac{2-t}{1-t}+2-t\right)=\log\frac{(2-t)^2}{1-t}=\log\frac{2-t}{1-t}+\log(2-t)=\log x+\log y.$

Второ решение. Може да ги искористиме и плоштините на триаголниците и тоа $P_{\Delta BSC}=\frac{\overline{BS}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{(x-1)1}{2}$, $P_{\Delta DCT}=\frac{\overline{DC}\cdot\overline{DT}}{2}=\frac{(y-1)1}{2}$.

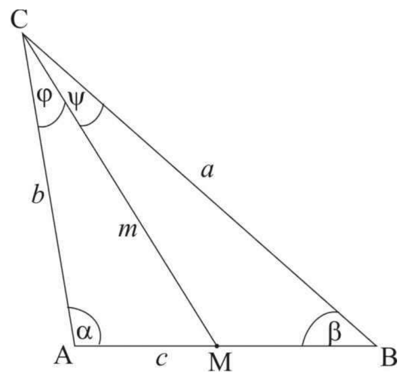


Притоа, да забележиме дека $P_{\Delta AST}=P_{ABCD}+P_{\Delta BSC}+P_{\Delta DCT}$. Добиваме $\frac{xy}{2}=1+\frac{(x-1)1}{2}+\frac{(y-1)1}{2}$ односно $\frac{xy}{2}=1+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1$. Ова го средуваме до $xy=x+y$ и директно следува дека $\log(xy)=\log(x+y)$ односно $\log x+\log y=\log(x+y)$.

2. Даден е триаголник ABC, за кој $\overline{AC}\neq\overline{BC}$. Нека M е средината на страната AB и нека $\alpha=\measuredangle BAC,\beta=\measuredangle ABC,\varphi=\measuredangle ACM,\psi=\measuredangle BCM$. Докажи дека важи

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Решение. Да ја означиме должината $\overline{CM}=m$. Со примена на косинусната теорема на триаголниците ACM и BCM имаме



$$b^2+m^2-2bm\cos\varphi=\left(\frac{c}{2}\right)^2=a^2+m^2-2am\cos\psi,$$

$$b^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-bc\cos\alpha=m^2=a^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-ac\cos\beta.$$

Средувајќи ги изразите добиваме равенства
$2m(a\cos\psi-b\cos\varphi)=a^2-b^2$ и
$c(a\cos\beta-b\cos\alpha)=a^2-b^2$.

Изедначувајќи ги левите страни сега имаме $a\cos\psi - b\cos\varphi = \frac{c}{2m}(a\cos\beta - b\cos\alpha)$.

Со примена на синусната теорема на триаголникот ACM имаме $\frac{c}{2m} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$.

Со замена во претходното равенство добиваме $\frac{\sin\varphi}{a\cos\psi - b\cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{a\cos\beta - b\cos\alpha}$,

односно $\frac{\sin\varphi}{\frac{a}{b}\cos\psi - \cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\frac{a}{b}\cos\beta - \cos\alpha}$.

Сега од $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$, равенство кое е добиено од синусната теорема за триаголниците ABC, ACM, BCM, имаме $\frac{\sin\varphi}{\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cos\psi - \cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta - \cos\alpha}$.

Го средуваме последното и го добиваме бараното равенство

$$\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

3. Одреди ги сите вредности на реалниот параметар a, така да секое x од интервалот $[-1,1]$ го задоволува неравенството $ax^2 + 2(a+1)x + a - 4 \le 0$.

Решение. Дадената неравенка може да ја трансформираме во квадратен трином по $x+1$, имено во облик $a(x+1)^2 + 2(x+1) - 6 \le 0$, односно со смена $x+1=t$, во облик $at^2 + 2t - 6 \le 0$. Последново неравенство е задоволено за секое $t \in [0,2]$.

За $t=0$, неравенството преминува во $-6 \le 0$ што е точно за секое a, a реален број.

За $t \in (0,2]$, $a \le \frac{6-2t}{t^2} = 2\left(\frac{3}{t^2} - \frac{1}{t}\right) = 2\left(3u^2 - u\right)$, за $u = \frac{1}{t}, u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Неравенството $a \le 2\left(3u^2 - u\right)$ треба да е задоволено за секое $u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, од каде е доволно параметарот a да е од горе ограничен со минимумот на квадратната функција $2\left(3u^2 - u\right)$, на дадениот интервал, односно $a \le \min\limits_{u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)} \{2(3u^2 - u)\}$. Квадратната функција $f(u) = 2(3u^2 - u)$ има минимум во темето $u = \frac{1}{6}$, и расте за $u > \frac{1}{6}$. Тогаш за $u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, локално, минимум се постигнува во $u = \frac{1}{2}$. Значи $a \le 2(3\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, па бараните вредности на параметарот се сите $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

4. Нека $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{2021}\in(0,1)$ и $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. За изразот $A=\frac{2021\cdot\sin(\alpha_1 x)\sin(\alpha_2 x)\cdot\ldots\cdot\sin(\alpha_{2021}x)}{\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+\ldots+\cos(\alpha_{2021}x)}$ докажи дека е точно неравенството

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)}A+\log_{\cos(\alpha_2 x)}A+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}A\ge 2020\cdot 2021.$$

Решение. Од тоа што $\alpha_i x\in(0,\frac{\pi}{4})$ за сите $i\in\{1,2,\cdots,2021\}$, јасно е дека $\cos(\alpha_i x)>0$ и важи неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

$$\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+\cdots+\cos(\alpha_{2021}x)\ge 2021\sqrt[2021]{\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdots\cos(\alpha_{2021}x)}\ .$$

Од друга страна сигурно важи $\sin(\theta)\le\cos(\theta)$ за $\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$. Сега следува дека

$$A=\frac{2021\cdot\sin(\alpha_1 x)\sin(\alpha_2 x)\cdot\ldots\cdot\sin(\alpha_{2021}x)}{\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+\cdots+\cos(\alpha_{2021}x)}\le\frac{2021\cdot\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdots\cos(\alpha_{2021}x)}{\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+\cdots+\cos(\alpha_{2021}x)}\le$$

$$\le\frac{\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdot\ldots\cdot\cos(\alpha_{2021}x)}{\sqrt[2021]{\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdot\ldots\cdot\cos(\alpha_{2021}x)}}=(\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdot\ldots\cdot\cos(\alpha_{2021}x))^{1-\frac{1}{2021}}.$$

Јасно, $\cos(\alpha_i x)\in(0,1)$ за $i\in\{1,2,\cdots,2021\}$ па логаритмирајќи го неравенството

$$A\le(\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdots\cos(\alpha_{2021}x))^{\frac{2020}{2021}}$$

добиваме

$$\log_{\cos(\alpha_i x)}A\ge\frac{2020}{2021}\log_{\cos(\alpha_i x)}(\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdots\cos(\alpha_{2021}x)).$$

Ги собираме ваквите логаритми за секое $i\in\{1,2,\cdots,2021\}$ и добиваме:

Алтернатива 1. $\log_{\cos(\alpha_1 x)}A+\log_{\cos(\alpha_2 x)}A+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}A\ge$

$$\ge\frac{2020}{2021}\Big[\log_{\cos(\alpha_1 x)}(\cos(\alpha_1 x)\cdot\ldots\cdot\cos(\alpha_{2021}x))+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}(\cos(\alpha_1 x)\cdot\ldots\cdot\cos(\alpha_{2021}x))\Big]=$$

$$=\frac{2020}{2021}\cdot\Big(\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_1 x)+\cdots+\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_{2021}x)\Big)+\cdots+$$

$$+\Big(\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}\cos(\alpha_1 x)+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}\cos(\alpha_{2021}x)\Big)=$$

$$= \frac{2020}{2021}[2021 + \left(\log_{\cos(\alpha_1 x)} \cos(\alpha_2 x) + \log_{\cos(\alpha_2 x)} \cos(\alpha_1 x)\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\log_{\cos(\alpha_1 x)} \cos(\alpha_{2021} x) + \log_{\cos(\alpha_{2021} x)} \cos(\alpha_1 x)\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\log_{\cos(\alpha_{2021} x)} \cos(\alpha_{2020} x) + \log_{\cos(\alpha_{2020} x)} \cos(\alpha_{2021} x)\right)].$$

Бидејќи $0 < \cos(\alpha_i x), \cos(\alpha_j x) < 1$ важи $\log_{\cos(\alpha_i x)} \cos(\alpha_j x) > 0$ и повторно користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\log_{\cos(\alpha_i x)} \cos(\alpha_j x) + \log_{\cos(\alpha_j x)} \cos(\alpha_i x) \geq 2.$$

Конечно,

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)} A + \log_{\cos(\alpha_2 x)} A + \cdots + \log_{\cos(\alpha_{2021} x)} A \geq \frac{2020}{2021}\left[2021 + 2\frac{2021 \cdot 2020}{2}\right] = 2021 \cdot 2020.$$

Алтернатива 2. Јасно, $0 < \cos(\alpha_1 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x) < 1$ и $0 < A < 1$ па следува

$$\log_{\left(\cos(\alpha_1 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)\right)} A \geq \log_{\left(\cos(\alpha_1 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)\right)} \left(\cos(\alpha_1 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)\right)^{\frac{2020}{2021}}.$$

Користејќи го неравенството меѓу хармониската и аритметичката средина имаме

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)} A + \log_{\cos(\alpha_2 x)} A + \cdots + \log_{\cos(\alpha_{2021} x)} A = \frac{1}{\log_A \cos(\alpha_1 x)} + \cdots + \frac{1}{\log_A \cos(\alpha_{2021} x)} \geq$$

$$\geq \frac{2021^2}{\log_A \cos(\alpha_1 x) + \cdots + \log_A \cos(\alpha_{2021} x)} = \frac{2021^2}{\log_A \left(\cos(\alpha_1 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)\right)} =$$

$$= 2021^2 \cdot \log_{\left(\cos(\alpha_1 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)\right)} A \geq 2021^2 \cdot \log_{\left(\cos(\alpha_1 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)\right)} \left(\cos(\alpha_1 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)\right)^{\frac{2020}{2021}} =$$

$$= 2021^2 \cdot \frac{2020}{2021} \log_{\left(\cos(\alpha_1 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)\right)} \left(\cos(\alpha_1 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)\right) = 2021 \cdot 2020.$$

Четврта година

1. По исфрлање на три последователни броја, од низата на природни броеви од 1 до 2021, утврдено е дека аритметичката средина на преостанатите броеви е цел број. Одреди ги броевите кои биле исфрлени.

Решение. Збирот на сите природни броеви од 1 до 2021 изнесува $S=\frac{2021\cdot 2022}{2}=2021\cdot 1011$. Нека *x*-1, *x* и *x*+1 се исфрлените броеви. Тогаш аритметичката средина на преостанатите броеви во низата ќе биде:

$$N=\frac{2021\cdot 1011-(x-1+x+x+1)}{2021-3}=\frac{2021\cdot 1011-3x}{2018}\ .$$

Да воведеме замена $x=1011+y$, каде $-1009\le y\le 1009$. Во последниот израз добиваме

$$N=\frac{2021\cdot 1011-3(1011+y)}{2018}=\frac{2018\cdot 1011-3y}{2018}=1011-\frac{3y}{2018}.$$

Според условот од задачата, ова треба да е цел број. Но од ограничувањето за у имаме дополнително дека $-\frac{3}{2}\le\frac{3y}{2018}\le\frac{3}{2}$.

Цели броеви во овој интервал се -1, 0 и 1, од каде следи дека $y=0$ е единствената можна вредност за *y*. Значи, исфрлените броеви се 1010, 1011 и 1012.

(**Забелешка**. По утврдување на изразот за *N*, вредноста на *x* може да се одреди и со директна оценка на *N* и користење на условот за цел број).

2. Помеѓу група од n луѓе постојат 2021 взаемни пријателства (пријателството е симетрична релација). Познато е дека не постои личност со повеќе од 45 пријатели, како и дека постои личност која има точно 45 пријатели. Ако со x_k го означиме бројот на пријатели кои ги има k -тата личност, докажи дека важи:

$$x_1^2+x_2^2+....+x_n^2\le 2024n+2018.$$

Решение. Бидејќи постои личност која има 45 пријатели, јасно е дека $n\ge 46$.
Од условите на задачата заклучуваме $x_k\le 45$ и $x_1+...+x_n=2\cdot 2021=4042$. Оттука добиваме:

$$x_k^2-x_k=x_k(x_k-1)\le 45\cdot(45-1)=1980 \text{ за } k=1,...,n. \quad (1)$$

Од $x_1+...+x_n=4042$ и (1) следува дека

$$x_1^2+x_2^2+....+x_n^2\le 1980n+(x_1+...+x_n)=1980n+4042.$$

Останува да докажеме дека $1980n+4042\le 2024n+2018$, што е еквивалентно со $n\ge 46$.

3. Најди го центарот на кружница со радиус r, која ја сече секоја кружница што минува низ точките $(-1,0)$ и $(1,0)$ под агол од 90°. Две кружници се сечат под агол α, доколку аголот кој го формираат тангентите повлечени во пресечната точка на кружниците е α.

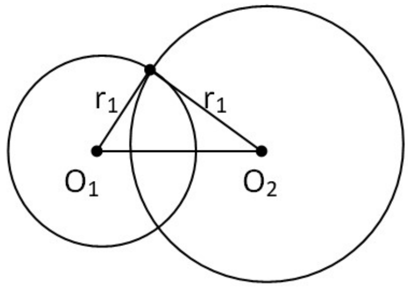
Решение. Ако дадена кружница минува низ точките $(-1,0)$ и $(1,0)$, нејзиниот центар лежи на *y*-оската. Да го означиме овој центар со $O(0,q)$. Тогаш равенката на произволна кружница K која минува низ $(-1,0)$ и $(1,0)$ гласи

$$K: x^2+(y-q)^2=q^2+1,\quad K\left((0,q);\sqrt{q^2+1}\right). \qquad (1)$$

Сега, да забележиме дека две кружници $K_1\left(O_1;r_1\right)$ и $K_2(O_2;r_2)$ се сечат под прав агол, ако и само ако важи:

$r_1^2+r_2^2=\overline{O_1O_2}^2$, каде $\overline{O_1O_2}$ е растојанието меѓу нивните центри. (2)

Нека центарот на кружницата со радиус $r>0$, која ја сече произволна кружница од облик (1) под агол од 90°, се наоѓа во точката (a,b). Од равенката (2) имаме:



$$r^2+q^2+1=a^2+(b-q)^2, \text{ односно}$$
$$r^2+1=a^2+b^2-2bq.$$

Последното равенство треба да важи за произволно q, па со изедначување на полиномите од двете страни го добиваме системот: $\begin{cases}2b=0\\ r^2+1=a^2+b^2\end{cases}$.

Неговото решение е $b=0, a=\pm\sqrt{r^2+1}$.

Значи, центарот на бараната кружница е во точката $(\sqrt{r^2+1},0)$ или $(-\sqrt{r^2+1},0)$.

4. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа дефинирана на следниот начин:

$$a_1=2, a_2=5 \text{ и } a_{n+2}=(5-n^3)a_{n+1}+(5+n^3)a_n \text{ за } n\geq 1.$$

Дали постојат природни броеви m,n и t за кои важи $a_m\cdot a_n=a_t$?

Решение. Првите неколку членови на дадената низа се $2,5,32,-31,1706,\ldots$

Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека $a_n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$, за $n\geq 1$. Јасно $a_1,a_2\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$. Да претпоставиме дека $a_n,a_{n+1}\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$. Тогаш $a_{n+2}\equiv(5-n^3)2+(5+n^3)2=20\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$. Оттука $a_n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$, за $n\geq 1$.

Бидејќи $a_m\cdot a_n\equiv 2\cdot 2\equiv 4\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)$ и $a_t\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$, добиваме дека не постојат природни броеви m,n и t за кои важи $a_m\cdot a_n=a_t$.