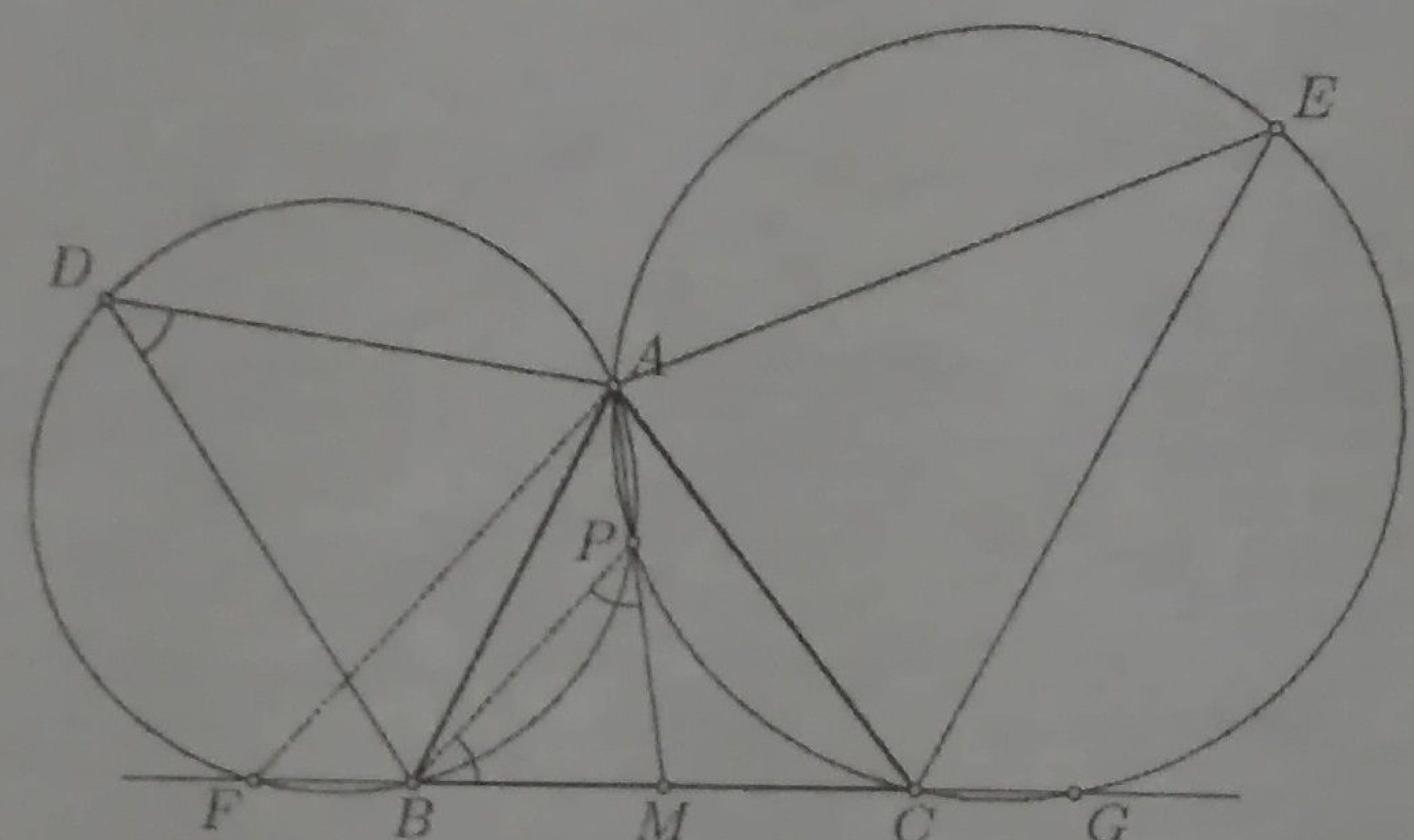
XXVI Македонска математичка олимпијада
ФОН Универзитет, Скопје, Република Македонија
14.04.2019, Скопје

1. Во остроаголниот триаголник ABC, точката M е средина на страната BC и центрите на припишаните кружници во однос на M на триаголниците AMB и AMC се D и E, соодветно. Опишаната кружница околу триаголникот ABD ја сече правата BC во точките B и F. Опишаната кружница околу триаголникот ACE ја сече правата BC во точките C и G. Докажи дека $BF = CG$.

Решение. Имаме дека $\measuredangle ADB = 90° - \frac{1}{2}\measuredangle AMB$ и $\measuredangle AEC = 90° - \frac{1}{2}\measuredangle AMC$.



Нека опишаните кружници околу ΔADB и ΔAEC ја сечат повторно правата AM во точките P и P', соодветно, Да забележиме дека M лежи надвор од круговите околу ΔADB и ΔAEC, бидејќи $\measuredangle ADB + \measuredangle AMB < 180°$ и $\measuredangle AEC + \measuredangle AMC < 180°$, па P и P' лежат на полуправата MA. Уште, $\measuredangle BPM = \measuredangle BDA = 90° - \frac{1}{2}\measuredangle PMB$, од каде добиваме дека триаголникот BPM е рамнокрак, односно $MP = MB$. Сосема слично, $MP' = MC = MB$, па $P' \equiv P$.

Сега, од степен на точката M, имаме $MB \cdot MF = MP \cdot MA = MC \cdot MG$, од каде $MF = MG = MA$, па имаме $BF = CG$.

XXVI Македонска математичка олимпијада
ФОН Универзитет, Скопје, Република Македонија
14.04.2019, Скопје

2. Нека n е природен број. Ако $r \equiv n \pmod 2$ и $r \in \{0,1\}$, тогаш најди го бројот на целобројни решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=r \\ |x|+|y|+|z|=n \end{cases}.$$

Решение. Нека n е парен природен број, односно $r=0$. Тогаш проблемот се сведува на наоѓање на бројот на целобројни решенија на системот

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ |x|+|y|+|z|=n \end{cases} \quad .....(1)$$

Лема. 1) Барем еден од броевите x,y,z има апсолутна вредност $\frac{n}{2}$.

2) Секој од броевите x,y,z има апсолутна вредност $\leq \frac{n}{2}$.

Доказ. Очигледно е дека еден од броевите x,y,z мора да биде позитивен, затоа што во спротивно добиваме контрадикција со првата равенка од системот (1). Без губење од општоста, нека $x>0$.

Навистина, ако $x>\frac{n}{2}$, од $x=-(y+z)$ и од $|y|+|z|\geq|y+z|>\frac{n}{2}$ добиваме контрадикција со втората равенка од системот (1).

Ако $0<x<\frac{n}{2}$, тогаш барем еден од броевите y,z е помал од 0. Разгледуваме два случаи: Случај 1. $y<0, z<0$ и Случај 2. $yz<0$.

Во Случај 1. $|y+z|=|y|+|z|$ и $y+z=-x$ од каде $|x|+|y|+|z|<\frac{n}{2}+\frac{n}{2}$, што е контрадикција. Во Случај 2. Нека $y<0<z$. Но тогаш $x+z=-y$, односно $|y|=|x+z|=|x|+|z|$ од каде $2|y|=|y|+|x+z|=|x|+|y|+|z|=n$ или $|y|=\frac{n}{2}$.

Аналогно се третира случајот $x<0$. Со тоа лемата е докажана.

Продолжение на решението на задачата. Нека само еден од броевите x, y, z е позитивен. Без губење на општост нека $x > 0$, тогаш $x = \frac{n}{2}$ и $y + z = -\frac{n}{2}$. Заради лемата, добиваме дека секоја од следниве тројки е решение на системот (1):

$$\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, 0\right), \left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1, -1\right), \left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+2, -2\right), \dots, \left(\frac{n}{2}, 0, -\frac{n}{2}\right)$$

што се вкупно $\frac{n}{2}+1$ на број. Со менувањето на позицијата на $\frac{n}{2}$ (на втора, трета координата и истата дискусија) добиваме вкупно $3\left(\frac{n}{2}+1\right)$тројки од решенија на системот (1). Ако два од x, y, z се позитивни, без губење општост $x > 0, y > 0$, тогаш $z = -\frac{n}{2}$ и $x + y = \frac{n}{2}$. Заради лемата, добиваме дека секоја од следниве тројки е решение на системот (1):

$$\left(1, \frac{n}{2}-1, -\frac{n}{2}\right), \left(2, \frac{n}{2}-2, -\frac{n}{2}\right), \left(3, \frac{n}{2}-3, -\frac{n}{2}\right), \dots, \left(\frac{n}{2}-1, 1, -\frac{n}{2}\right)$$

што се вкупно $\frac{n}{2}-1$ тројки кои се решенија на системот (1). Со менувањето на позицијата на $-\frac{n}{2}$ (на прва, втора координата и истата дискусија) добиваме вкупно $3\left(\frac{n}{2}-1\right)$тројки од решенијана системот (1). Конечно добиваме за вкупниот број на решенија на системот (1) е

$$3\left(\frac{n}{2}+1\right) + 3\left(\frac{n}{2}-1\right) = 3n .$$

Нека n е непарен природен број, односно $r = 1$. Тогаш системот (1) е од облик

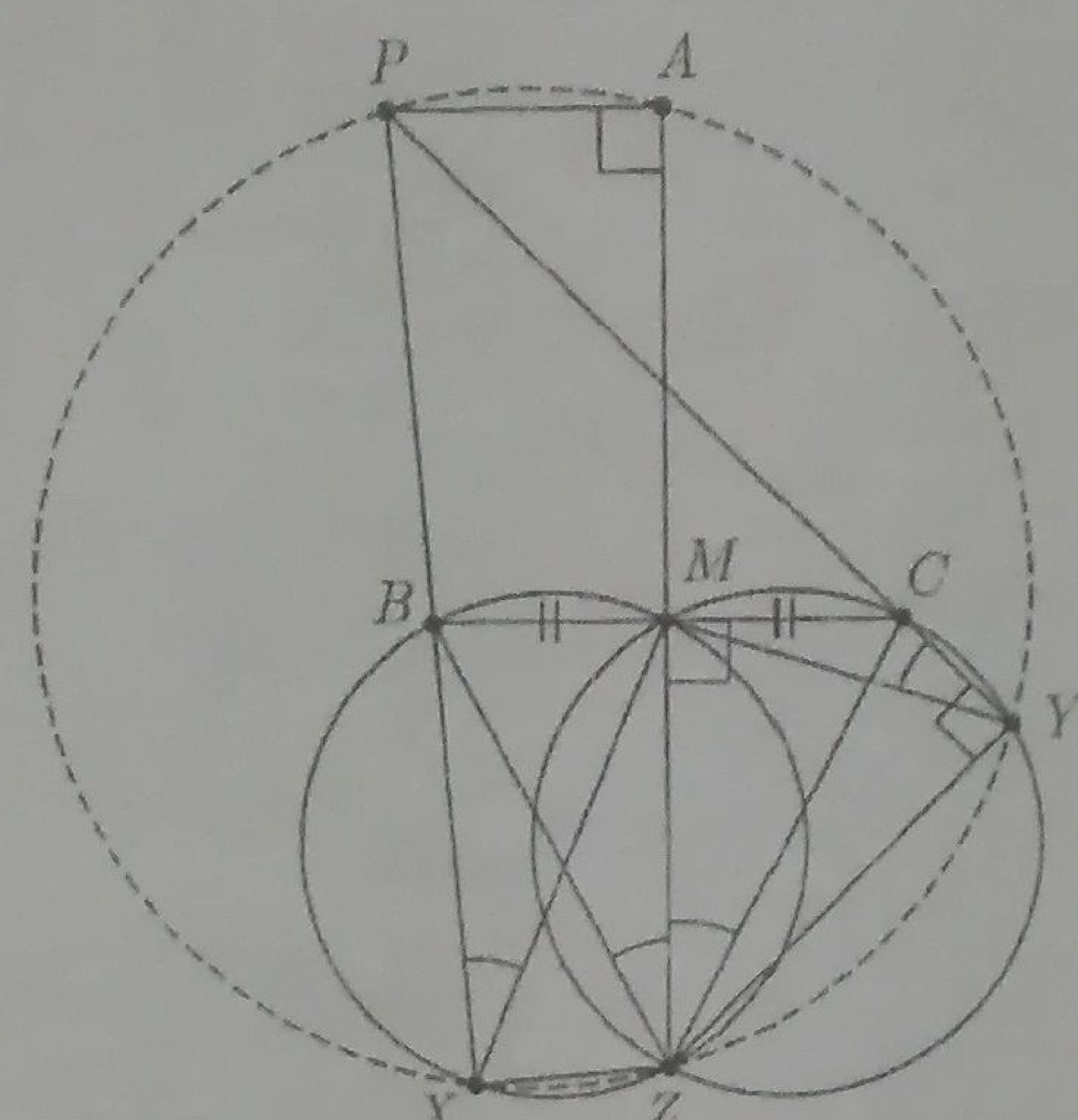
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ |x| + |y| + |z| = n \end{cases}.$$

Аналогно на случајот n парен број (соодветната лема е истата добиена со замена на $\frac{n}{2}$ со $\frac{n+1}{2}$) , добиваме вкупен број на решенија на системот

$$3\left(\frac{n-1}{2}+1\right) + 3\left(\frac{n-1}{2}\right) = 3n.$$

3. Нека ABC е рамнокрак триаголник, $AB = AC$ и точката M е средина на BC. Точката P е избрана така што $PB < PC$ и PA е паралелна на BC. Нека X и Y се точки од правите PB и PC, соодветно, така што B лежи на отсечката PX, C лежи на отсечката PY и $\measuredangle PXM = \measuredangle PYM$. Докажи дека четириаголникот $APXY$ е тетивен.

Решение. Бидејќи $AB = AC$, AM е симетрала на отсечката BC, па $\measuredangle PAM = \measuredangle AMC = 90°$.



Нека Z е пресечна точка на правата AM и нормалата на PC која минува низ Y (да забележиме дека Z лежи на полуправата AM после M). Имаме, $\measuredangle PAZ = \measuredangle PYZ = 90°$. Следува дека точките P, A, Y и Z лежат на иста кружница.

Бидејќи $\measuredangle CMZ = \measuredangle CYZ = 90°$, четириаголникот $CYZM$ е тетивен, па следува $\measuredangle CZM = \measuredangle CYM$. Од условот, $\measuredangle CYM = \measuredangle BXM$, и бидејќи ZM е симетрала на аголот $\measuredangle BZC$, имаме $\measuredangle CZM = \measuredangle BZM$. Значи, $\measuredangle BXM = \measuredangle BZM$. Оттука, имаме дека точките B, X, Z и M лежат на иста кружница, па $\measuredangle BXZ = 180° - \measuredangle BMZ = 90°$.

Конечно, имаме $\measuredangle PXZ = \measuredangle PYZ = \measuredangle PAZ = 90°$, следува точките P, A, X, Y, Z лежат на иста кружница, односно четириаголникот $APXY$ е тетивен, што и требаше да се докаже.

Забелешка. Конструкцијата на точката Z, може да биде воведена и на друг начин. Еден начин е точката Z да биде воведена како втор пресек на кружницата CMY и правата AM. Друг начин да биде воведена точката Z како втора пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците CMY и BMX.

XXVI Македонска математичка олимпијада
ФОН Универзитет, Скопје, Република Македонија
14.04.2019, Скопје

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$n!+f(m)! \mid f(n)!+f(m!)$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. За $m=n=1$ од (*) добиваме $1+f(1)! \mid f(1)!+f(1)$ и затоа $1+f(1)! \mid f(1)-1$. Но, $|f(1)-1|<f(1)!+1$, па затоа од $1+f(1)! \mid f(1)-1$ следува $f(1)-1=0$, т.е. $f(1)=1$.
Ако во (*) ставиме $m=1$ добиваме $n!+1 \mid f(n)!+1$, па затоа $n!\le f(n)!$, односно $n\le f(n)$. Од друга страна, ставаме $(m,n)=(1,p-1)$, каде p е произволен прост број и користејќи ја теоремата на Вилсон добиваме дека $p \mid (p-1)!+1 \mid f(p-1)!+1$, па затоа $f(p-1)<p$. Но, $f(p-1)\ge p-1$ и како $f(p-1)<p$ заклучуваме дека

$$f(p-1)=p-1.$$

Понатаму, нека фиксираме природен број m. За секој прост број p ставаме $n=p-1$ и од (*) добиваме $(p-1)!+f(m)! \mid (p-1)!+f(m!)$, што значи дека

$$(p-1)!+f(m)! \mid f(m!)-f(m)!,$$

за секој прост број p. Последното значи дека $f(m!)=f(m)!$, за секој $m\in\mathbb{N}$. Според тоа, (*) може да се запише како $n!+f(m)! \mid f(n)!+f(m)!$. Последното значи дека

$$n!+f(m)! \mid f(n)!-n!,$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}$. Сега, ако го фиксираме $n\in\mathbb{N}$ и земеме доволно голем m, заклучуваме дека $f(n)!=n!$, т.е. $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

5. Нека n е даден природен број. Сизиф изведува низа од потези на табла која се состои од $n+1$ квадрати во редица, нумерирани од 0 до n, од лево кон десно. На почетокот, n камчиња се ставени во квадратот 0, а другите квадрати се празни. Во секој потег, Сизиф го избира било кој непразен квадрат со k камчиња, зема едно од тие камчиња и го поместува на десно за најмногу k квадрати (камчето мора да остане во некој од квадратите од таблата). Целта на Сизиф е да ги помести сите n камчиња во квадратот n.

Докажи дека Сизиф тоа не може да го направи во помалку од $\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + \ldots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$ потези. Ознаката $\lceil x \rceil$ го означува најмалиот цел број не помал од x.

Решение. Да забележиме дека сите камчиња се исти и сите камчиња на почетокот и на крајот имаат иста позиција. Па, во секој потег, ќе дадеме постапка, кое камче од избраниот квадрат треба да се поместува. Нека ги означиме камчињата од 1 до n. Во секој потег, по изборот на квадрат, Сизиф, го поместува камчето со најголем број од тој квадрат.

На овој начин, кога камчето k е поместено од некој квадрат, тој квадрат содржи не повеќе од k камчиња (бидејќи сите останати камчиња се со броеви помали од k). Според тоа, камчето k е поместено за најмногу k квадрати во секој потег. Бидејќи вкупното поместување на камчето е точно n, најмалку $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ поместувања на камчето k треба да бидат направени, за секој $k=1,2,\ldots,n$.

Со сумирање за сите $k=1,2,\ldots,n$, го добиваме тврдењето на задачата.