XXV Македонска математичка олимпијада
ФОН Универзитет Скопје
21.04.2018, Скопје

1. Определи ги сите природните броеви n такви што $9^n - 7$ може да се претстави како производ од најмалку два последователни природни броеви.

Решение. Производ на три последователни природни броеви е делив со 3, а $9^n - 7 \equiv 2 (\bmod 3)$, заклучуваме дека $9^n - 7$ не може да се запише како производ на три последователни броја. **(2 б)**

Нека $9^n - 7 = m(m+1)$ за некој природен број m. Последната равенка е еквивалентна со равенката $4 \cdot 9^n - 27 = (2m+1)^2$, т.е. со равенката $4 \cdot 9^n - (2m+1)^2 = 27$ **(2 б)**. Бидејќи $\{1,3,9,27\}$ се сите делители на 27 и

$$2 \cdot 3^n + 2m + 1 > 2 \cdot 3^n - 2m - 1$$

можни се два случаја:

1) $\begin{cases} 2 \cdot 3^n + 2m + 1 = 27 \\ 2 \cdot 3^n - 2m - 1 = 1 \end{cases}$ **(1 б)**

2) $\begin{cases} 2 \cdot 3^n + 2m + 1 = 9 \\ 2 \cdot 3^n - 2m - 1 = 3 \end{cases}$. **(1 б)**

Во случајот 1) ако ги собереме равенките добиваме $3^n = 7$, што не е можно. **(1 б)**

Во случајот 2) ако ги собереме равенките добиваме $3^n = 3$, од каде наоѓаме $n = 1$. Со замена во првата равенка добиваме $2 \cdot 3 + 2m + 1 = 9$, т.е. $m = 1$. Притоа, $9^1 - 7 = 1 \cdot (1+1)$. **(1 б)**

2. Нека n е природен број и C е ненегативен реален број. Определи го бројот на низите реални броеви $1, x_2, \ldots, x_n, 1$ такви што апсолутната вредност на разликата на секои два соседни члена на низата е еднаква на C.

Решение. Нека претпоставиме дека низата $1, x_2, \ldots, x_n, 1$ го задоволува условот на задачата. Тогаш

$$|1-x_2|=|x_2-x_3|=\ldots=|x_n-1|=C. \tag{1}$$

Исто така

$$x_n-1=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\ldots+(x_2-1) \tag{2}$$

каде бројот на парови загради од десната страна е $n-1$ **(1 б)**. Разгледуваме два случаи и тоа: n е непарен и n е парен број.

Случај 1. n е непарен, т.е. $n-1$ е парен број.

Тогаш равенството (2) е од облик $\Delta_1 C=\underbrace{\Delta_2 C\Delta_3 C\ldots\Delta_n C}_{n-1}$ каде $\Delta_i\in\{-,+\}, 1\le i\le n$.

Изборот на $\Delta_i\in\{-,+\}, 2\le i\le n$ определува низа $1, x_2, \ldots, x_n, 1$ која го задоволува условот (1). Да забележиме дека сумата на десната страна на равенството $\Delta_1 C=\underbrace{\Delta_2 C\Delta_3 C\ldots\Delta_n C}_{n-1}$ (за еден избор на $\Delta_i\in\{-,+\}, 2\le i\le n$) е парен број пати C, а левата страна е $\pm C$, односно непарен број пати C **(1 б)**. Според тоа, десната страна е еднаква на $\pm 2kC$, за некој $k\in\mathbb{N}$, а левата е еднаква $\pm C$. Последното е можно само ако $C=0$ и тогаш ја добиваме низата $1=x_2=\ldots=x_n$, т.е. постои само една низа со саканото својство. **(1 б)**

Случај 2. n е парен, т.е. $n-1$ е непарен број.

Ако $C=0$, тогаш $1=x_2=\ldots=x_n$ **(1 б)**. Нека $C>0$. Тогаш повторно од равенството (2) добиваме $\Delta_1 C=\underbrace{\Delta_2 C\Delta_3 C\ldots\Delta_n C}_{n-1}$. Значи, задачата се сведува на бројот на избори на $\Delta_i\in\{-,+\}, 2\le i\le n$ така што важи $\Delta_1 C=\underbrace{\Delta_2 C\Delta_3 C\ldots\Delta_n C}_{n-1}$. Ако на левата страна на равенството имаме $+C$, тогаш од десната страна на равенството мора разликата меѓу бројот на позитивните и бројот на негативните константи да е точно 1, односно $+C$ треба да се јаува $\frac{n-2}{2}+1=\frac{n}{2}$ пати, а $-C$ точно $\frac{n-2}{2}$ пати **(1 б)**. Ваквиот избор може да се направи на $\binom{n-1}{n/2}=\binom{n-1}{(n-2)/2}$ начини (од низа со должина $n-1$ избираме $n/2$ позиции на кои ќе стојат $+C$, а на останатите позиции ќе се јавува $-C$). На исто толку начини може да се запише и сумата од десната страна ако од лево е $-C$. Значи вкупниот број на вакви записи е $2\binom{n-1}{n/2}$ **(2 б)**.

Конечно, ако со $r=r(n,C)$ го означиме бројот на низите кои го задоволуаат условот на задачата тогаш

$$r = \begin{cases} 1, & C = 0 \\ 0, & n \text{ е непарен и } C > 0\,. \\ 2\binom{n-1}{n/2}, & n \text{ е парен и } C > 0. \end{cases}$$ **(1 б)**

3. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(\max\{x,y\}+\min\{f(x),f(y)\})=x+y \qquad (1)$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека функцијата f е таква што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ е исполнето равенството (1).

Ако во (1) ставиме $y=x$ добиваме
$$f(x+f(x))=2x\text{, за секој } x\in\mathbb{R}\text{. } \mathbf{(1\ б)} \qquad (2)$$
Понатаму, за $x=0$ од (2) следува $f(f(0))=0$, а за $x=y=\frac{f(0)}{2}$ од (1) добиваме $f(f(0))=f(0)$. Сега, од последните две равенства следува $f(0)=0$ **(1 б)**.

Сега, ако во (1) ставиме $y=0$ и искористиме дека $f(0)=0$, добиваме
$$f(\max\{x,0\}+\min\{f(x),0\})=x\text{, за секој } x\in\mathbb{R}\text{. } \mathbf{(1\ б)} \qquad (3)$$
Ќе разликуваме два случаи, и тоа:

Случај 1°. $x>0$. Тогаш од (3) следува
$$f(x+\min\{f(x),0\})=x.$$
Сега од последното равенство следува дека или $f(x+f(x))=x$ или $f(x)=x$ **(1 б)**. Ако $f(x+f(x))=x$, тогаш од (2) следува $2x=x$, што не е можно кога $x>0$. Значи, $f(x)=x$. **(1 б)**

Случај 2° $x<0$. Тогаш од (3) следува
$$f(\min\{f(x),0\})=x.$$
Сега, од последното равенство добиваме или $f(0)=x$ или $f(f(x))=x$. **(1 б)** Ако $f(0)=x$, тогаш $0>x=f(0)=0$, што е противречност. Значи, $f(f(x))=x$. Сега, ако во (2) наместо x ставиме $f(x)$ и ако прво искористиме дека $f(f(x))=x$, а потоа го земеме предвид равенството (2) добиваме
$$2f(x)=f(f(x)+f(f(x)))=f(f(x)+x)=2x,$$
од каде следува дека $f(x)=x$, за $x<0$. **(1 б)**

Конечно, од 1° и 2° следува дека $f(x)=x$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Не е тешко да се провери дека оваа функција е решение на задачата. **(1 б)**

4. Нека $t_k = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k$, каде $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се позитивни реални броеви и $k \in \mathbb{N}$. Докажи дека

$$\frac{t_5^2 t_1^6}{15} - \frac{t_4^4 t_2^2 t_1^2}{6} + \frac{t_2^3 t_4^5}{10} \geq 0 .$$

Решение. Неравенството кое треба да се докаже е еквивалентно со неравенството

$$2t_5^2 t_1^6 - 5t_4^4 t_2^2 t_1^2 + 3t_2^3 t_4^5 \geq 0 ,$$

односно со неравенството

$$2t_5^2 t_1^6 + 3t_2^3 t_4^5 \geq 5t_4^4 t_2^2 t_1^2 \ . \textbf{ (1 б)}$$

Користејќи го неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$2t_5^2 t_1^6 + 3t_2^3 t_4^5 \geq 5(t_5^4 t_1^{12} t_2^9 t_4^{15})^{\frac{1}{5}} . \textbf{ (1 б)}$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$t_5^4 t_1^{12} t_2^9 t_4^{15} \geq t_4^{20} t_2^{10} t_1^{10} ,$$

т.е. дека

$$t_5^4 t_1^2 \geq t_4^5 t_2 . \textbf{ (1 б)}$$

Да забележиме дека $t_5 t_3 \geq t_4^2$, бидејќи $\sum_{i=1}^{n} a_i^8$ се појавува на двете страни од неравенството и уште важи

$$a_i^5 a_j^3 + a_i^3 a_j^5 = a_i^3 a_j^3 (a_i^2 + a_j^2) \geq a_i^3 a_j^3 (2a_i a_j) = 2a_i^4 a_j^4 \text{, за сите } i < j . \textbf{ (1 б)}$$

Важи и неравенството $t_5 t_1 \geq t_3^2$. Навистина, $\sum_{i=1}^{n} a_i^6$ се појавува на двете страни од неравенството и уште

$$a_i^5 a_j + a_i a_j^5 = a_i a_j (a_i^4 + a_j^4) \geq 2a_i a_j (a_i^2 a_j^2) = 2a_i^3 a_j^3 \text{, за сите } i < j . \textbf{ (1 б)}$$

Точно е неравенството $t_5 t_1 \geq t_4 t_2$, бидејќи

$$(a_i^5 a_j + a_i a_j^5) - (a_i^4 a_j^2 + a_i^2 a_j^4) = a_i a_j (a_i - a_j)^2 (a_i^2 + a_i a_j + a_j^2) \geq 0 . \textbf{ (2 б)}$$

Конечно,

$$t_5^4 t_3^2 t_1^2 \geq t_5^2 t_4^4 t_1^2 \geq t_5 t_4^4 t_3^2 t_1 \geq t_4^5 t_3^2 t_2 ,$$

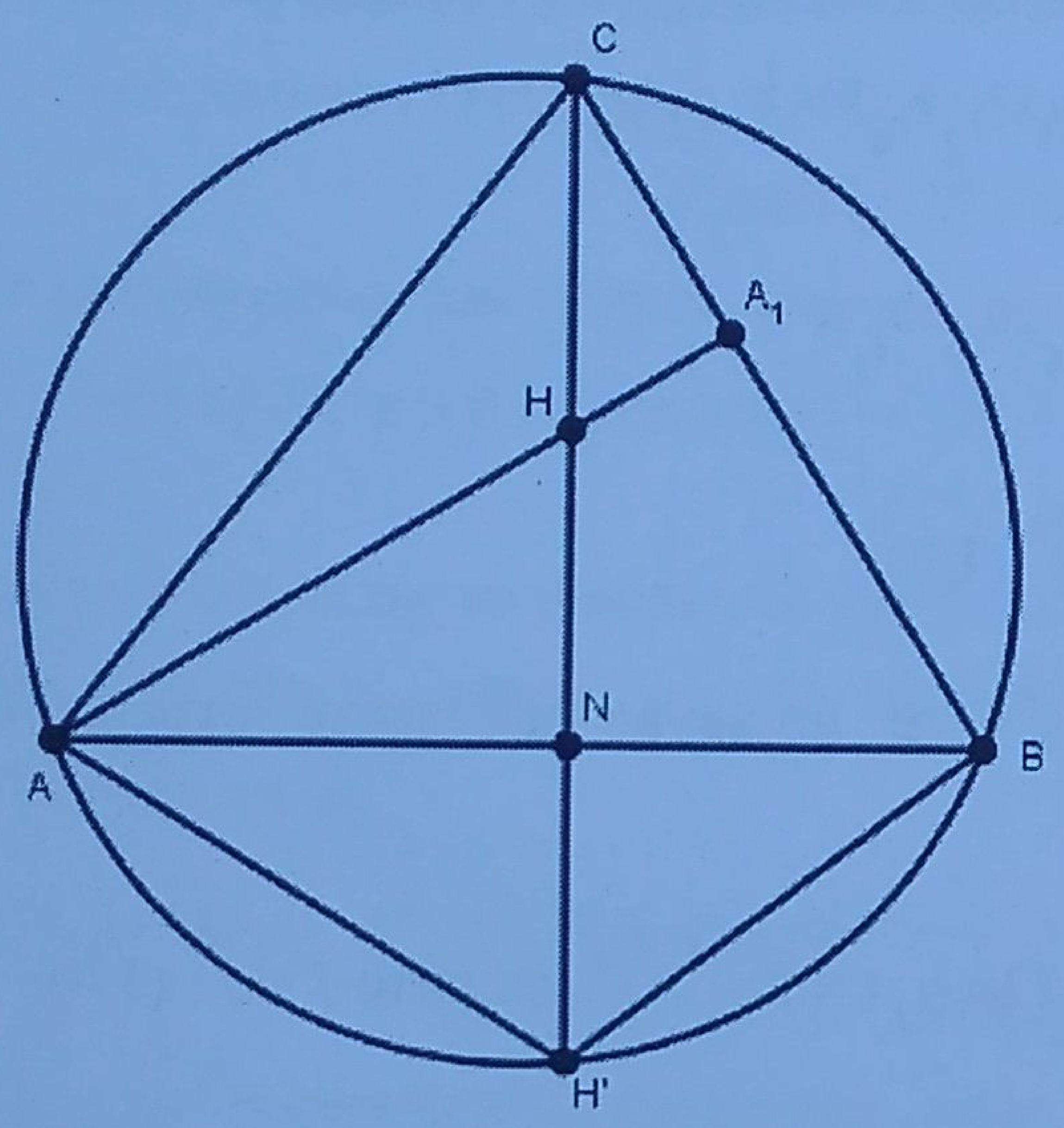
од каде следува дека

$$t_5^4 t_1^2 \geq t_4^5 t_2 . \textbf{ (1 б)}$$

5. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Точката H' е симетрична на H во однос на страната AB. Нека N е пресечната точка на HH' со AB. Кружницата низ точките A, N и H' по втор пат ја сече правата AC во точка M, а кружницата низ точките B, N и H' по втор пат ја сече правата BC во точка P. Докажи дека точките M, N и P се колинеарни.

Решение. *Прв начин.* Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека H е ортоцентар во $\triangle ABC$, а H' е симетрична точка на H во однос на страната AB. Тогаш H' припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

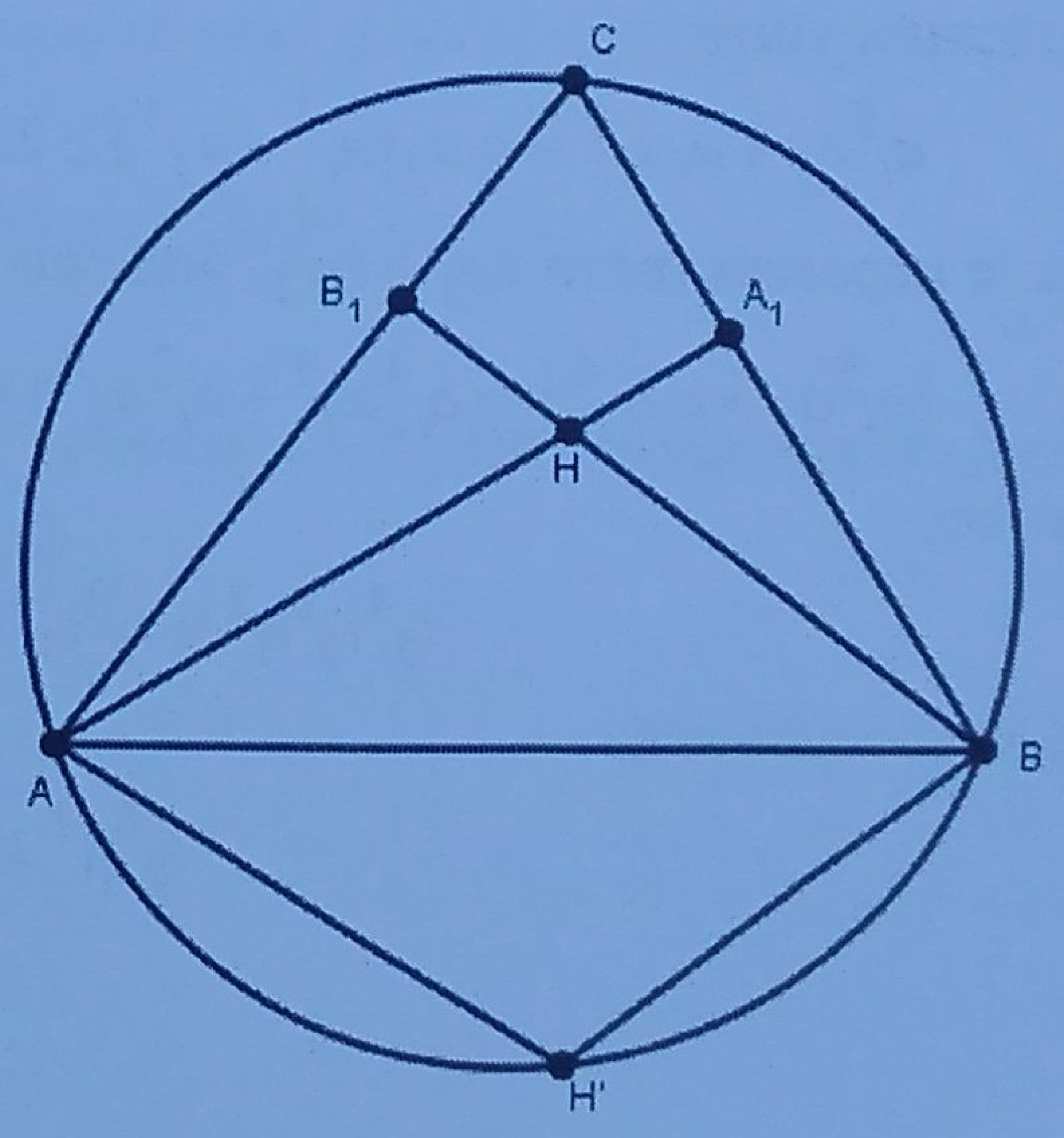


Доказ. I начин. Нека N е пресечната точка на HH' со AB, а A_1 е подножјето на висината спуштена од A кон BC. Тогаш $\triangle ANH \cong \triangle ANH'$, бидејќи AN е заедничка страна, $\overline{HN} = \overline{NH'}$ и $\measuredangle ANH = \measuredangle ANH' = 90^\circ$). Од

$$\measuredangle H'AB = \measuredangle H'AN = \measuredangle NAH = \measuredangle BAA_1$$
$$= 90^\circ - \measuredangle ABC = \measuredangle NCB = \measuredangle H'CB$$

следува дека четириаголникот $AH'BC$ е тетивен, т.е. H' лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. **(2 б)**

II начин. Нека A_1 е подножјето на висината спуштена од A кон BC, а B_1 е подножјето на висината спуштена од B кон AC. Од $\measuredangle HB_1C = \measuredangle HA_1C = 90^\circ$ следува дека четириаголникот B_1HA_1C е тетивен. Тогаш $\measuredangle A_1HB_1 = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta$ т.е. $\measuredangle AHB = \measuredangle A_1HB_1 = \alpha + \beta$ (накрсни агли). Од $\triangle ANH \cong \triangle ANH'$ и $\triangle BNH \cong \triangle BNH'$ следува дека $\measuredangle AH'B = \measuredangle AHB = \alpha + \beta$. Тогаш од



$$\measuredangle AH'B + \measuredangle ACB = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

следува дека четириаголникот $AH'BC$ е тетивен, т.е. H' лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. ■

Од $\measuredangle ANH^{'} = 90^{\circ}$ следува дека $AH^{'}$ е дијаметар на опишаната кружница околу $\triangle ANH^{'}$. Тогаш $\measuredangle H^{'}MA = 90^{\circ}$ т.е.

$H^{'}M \perp AC$ **(1 б)** (1)

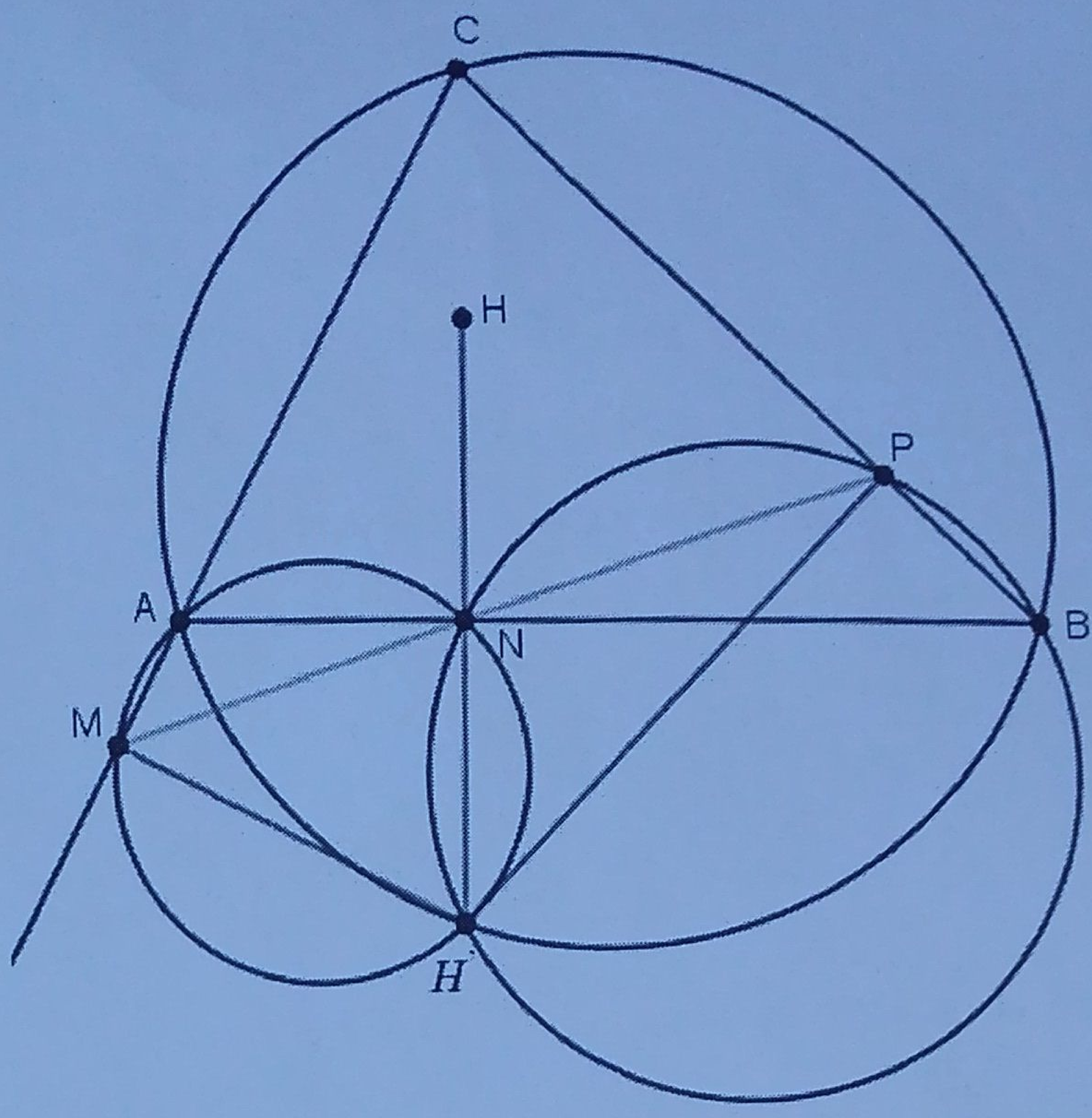
Аналогно се покажува дека

$H^{'}P \perp BC$ **(1 б)** (2)

Од условот на задачата имаме

$H^{'}N \perp AB$ **(1 б)** (3)

Од лемата следува дека четириаголникот $AH^{'}BC$ е тетивен **(1 б)**. Од (1), (2) и (3) и теорема на Симсон за $\triangle ABC$ и точка $H^{'}$ која лежи на опишаната кружница околу ΔABC следува тврдењето на задачата. **(2 б)**



Забелешка. Лемата со или без доказ се бодува 2 бода, бидејќи тврдењето го има во бројна литература како такво, па може како готово да се користи.

Втор начин. Од степенот на точка во однос на кружница имаме

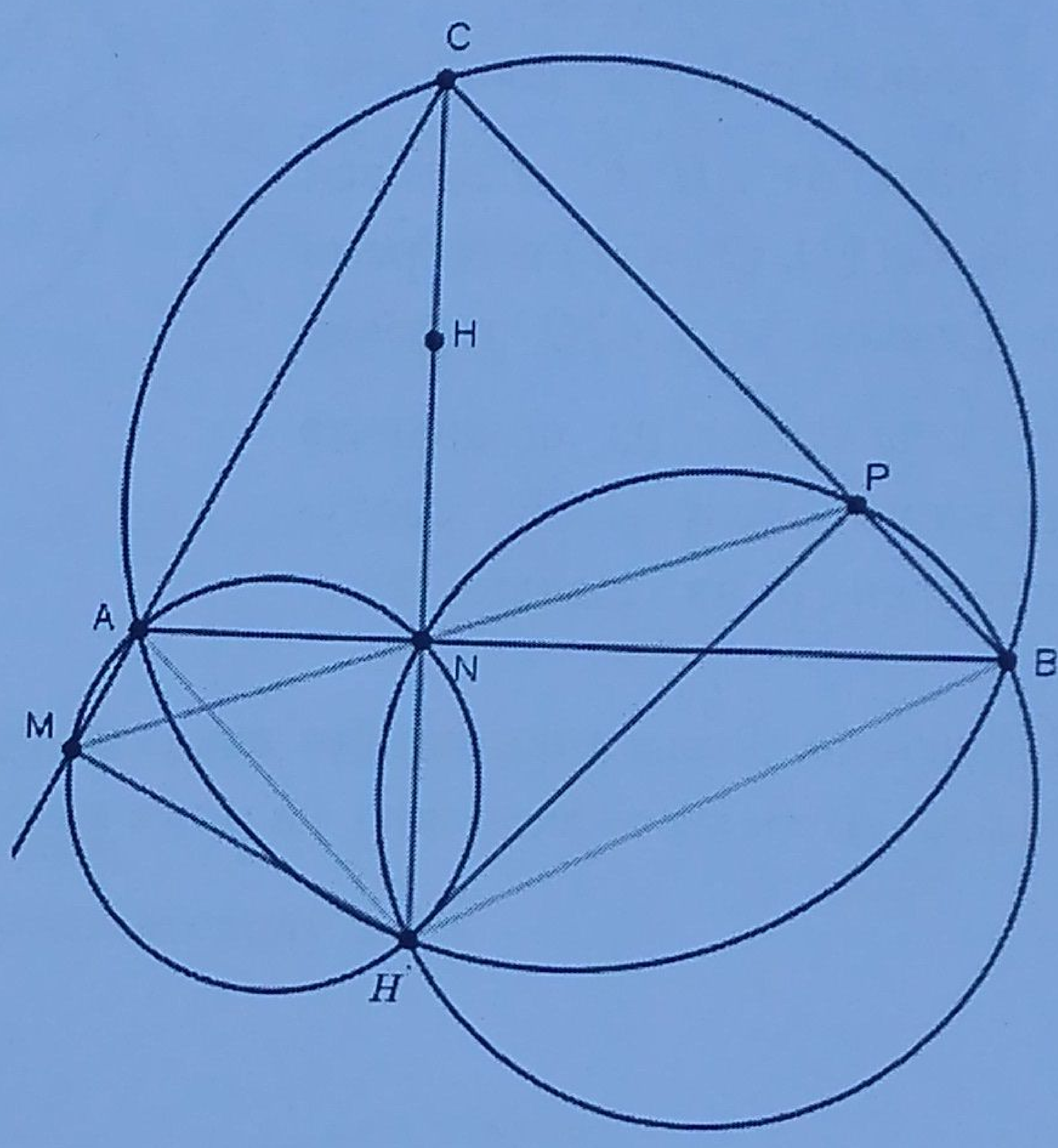
$$\overline{CA}\cdot\overline{CM}=\overline{CN}\cdot\overline{CH'}=\overline{CP}\cdot\overline{CB}\text{, т.е. }\overline{CA}\cdot\overline{CM}=\overline{CP}\cdot\overline{CB}$$

односно

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}\quad \textbf{(1 б)} \tag{1}$$

Од лемата следува дека четириаголникот $AH'BC$ е тетивен **(2 б)**. Од $\measuredangle NAC=\alpha$ и $\measuredangle ANC=90^\circ$ следува $\measuredangle ACN=90^\circ-\alpha$. Од $\measuredangle ANH'=90^\circ$ следува дека AH' е дијаметар на кружницата околу четириаголникот $AMH'N$. Тогаш $\measuredangle AMH'=\measuredangle ANH'=90^\circ$ (агли над иста тетива). Од последното и од $\measuredangle MCH'=\measuredangle ACN=90^\circ-\alpha$ следува дека $\triangle ANC\sim\triangle H'MC$. Тогаш $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{H'M}}{\overline{H'C}}$, т.е.

$$\overline{AN}=\frac{\overline{H'M}\cdot\overline{AC}}{\overline{H'C}} \tag{*}$$



Слично се покажува дека $\triangle BNC\sim\triangle H'PC$, т.е. $\frac{\overline{BN}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{H'P}}{\overline{H'C}}$ односно

$$\overline{BN}=\frac{\overline{H'P}\cdot\overline{BC}}{\overline{H'C}}\quad \textbf{(1 б)} \tag{**}$$

Од (*) и (**) имаме

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}=\frac{\frac{\overline{H'M}\cdot\overline{AC}}{\overline{H'C}}}{\frac{\overline{H'P}\cdot\overline{BC}}{\overline{H'C}}}=\frac{\overline{H'M}\cdot\overline{AC}}{\overline{H'P}\cdot\overline{BC}}\quad \textbf{(1 б)} \tag{2}$$

Четириаголникот $AH'BC$ е тетивен па затоа

$$\measuredangle AH'C=\measuredangle ABC=\beta \text{ и } \measuredangle BH'C=\measuredangle BAC=\alpha.$$

Тогаш $\measuredangle H'BN=\measuredangle H'BA=\measuredangle H'CA=90^\circ-\alpha$. Следува

$$\measuredangle H'BP=\measuredangle H'BN+\measuredangle NBP=90^\circ-\alpha+\beta=90^\circ-(\alpha-\beta)\text{ т.е. }\measuredangle PH'B=\alpha-\beta.$$

Од $\measuredangle MH'C=\alpha$ следува

$$\measuredangle MH'A=\measuredangle MH'N-\measuredangle AH'N=\measuredangle MH'N-\measuredangle AH'C=\alpha-\beta\text{ т.е. }\measuredangle MAH'=90^\circ-(\alpha-\beta).$$

Следува $\triangle H'MA\sim\triangle H'PB$, т.е. $\frac{\overline{H'M}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{H'P}}{\overline{PB}}$ односно

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{H'P}}{\overline{H'M}}\quad \textbf{(1 б)} \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) и теорема на Менелај за точките M, N и P и $\triangle ABC$ имаме

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}\cdot\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{MA}}\overset{(1),(2)}{\underset{(3)}{=}}\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}\cdot\frac{\overline{H'M}\cdot\overline{AC}}{\overline{H'P}\cdot\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{H'P}}{\overline{H'M}}=1,$$

т.е. M, N и P се колинеарни точки. **(2 б)**