



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2017

28.01.2017 година

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

Прва година

1АБ. (Учебник, Целакоски, Бакева, ..., стр. 20, зад. 6 б) Докажи дека за секој природен број n , вредноста на изразот $(n+1)(n-2)+(n+2)(n+3)$ е сложен број.

Решение. Дадениот израз го разложуваме на множители и добиваме

$$(n+1)(n-2)+(n+2)(n+3) \stackrel{(10\text{ п})}{=} n^2 - n - 2 + n^2 + 5n + 6 = 2n^2 + 4n + 4 \stackrel{(10\text{ п})}{=} 2(n^2 + 2n + 2).$$

Според тоа, за секој природен број n дадениот израз е делив со 2 и со $n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1 \geq 5$, што значи дека е сложен број (5 п).

2А. Определи ги сите природни броеви кои се помали од 10000, имаат цифра на единици 1 и можат да се претстават во видот $5^m + 8^n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Решение. Бројот 5^m завршува на цифрата 5, па затоа е потребно бројот 8^n да завршува на цифрата 6 (10 п). Бидејќи

$$8^1 = 8, 8^2 = 64, 8^3 = 512, 8^4 = 4096, 8^5 > 10000$$

следува дека $n = 4$ и $8^4 = 4096$. (5 п) Значи, $5^m < 5904$. Бидејќи

$$5^1 = 5, 5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625, 5^5 = 3125, 5^6 = 15625 > 5964$$

следува дека $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, (5 п) па има 5 такви броеви:

$$5^1 + 8^4 = 5 + 4096 = 4101$$

$$5^2 + 8^4 = 25 + 4096 = 4121$$

$$5^3 + 8^4 = 125 + 4096 = 4221$$

$$5^4 + 8^4 = 625 + 4096 = 4721$$

$$5^5 + 8^4 = 3125 + 4096 = 7221$$

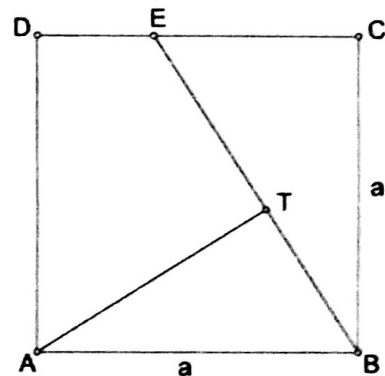
(5 п)

2Б. Ако $xy = 6$, $yz = 9$ и $zx = 24$, колку е вредноста на xyz ?

Решение. Ако ги помножиме сите три равенства ќе добиеме $xyzzx = 6 \cdot 9 \cdot 24$, односно $x^2 y^2 z^2 = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2$. (10 п) Последното равенство е еквивалентно со равенството $(xyz)^2 = 36^2$ (10 п), од каде добиваме дека $xyz = 36$ или $xyz = -36$ (5 п).

3А. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ одбрана е точка T така да $\angle ATB = 90^\circ$, $\overline{BT} = 6\text{ cm}$. Колкава е плоштината на квадратот ако правата BT ја сече страната CD во точката E и важи $\overline{CE} : \overline{ED} = 3 : 2$?

Решение. Од условот на задачата следува дека $\overline{CE} = 3k$, $\overline{ED} = 2k$ и $a = 5k$. Нека $\overline{AT} = x$. (5 п) Триаголниците ABT и BEC се слични бидејќи се правоаголници и $\angle BAT = \angle EBC$ (агли со нормални краци). Според тоа, $\overline{BT} : \overline{EC} = \overline{AT} : \overline{BC}$, односно $6 : 3k = x : 5k$, па затоа $x = 10\text{ cm}$. (10 п) Од Питагоровата теорема применета на триаголникот ABT следува $\overline{AB}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2$, односно $a^2 = 10^2 + 6^2$. (5 п) Според тоа, плоштината на квадратот е $P = a^2 = 136\text{ cm}^2$ (5 п).



3Б. Во триаголникот ABC со страна $\overline{AB} = a$ и висина h , средната линија MN го дели триаголникот на триаголник MNC и трапез $ABMN$. Определи го односот на површините на триаголникот ABC и трапезот $ABMN$.

Решение. Нека $\overline{AB} = a$, $\overline{CE} = h$, $\overline{CD} = h_1$ и $\overline{MN} = m$. (5 п) Бидејќи $\triangle ABC$

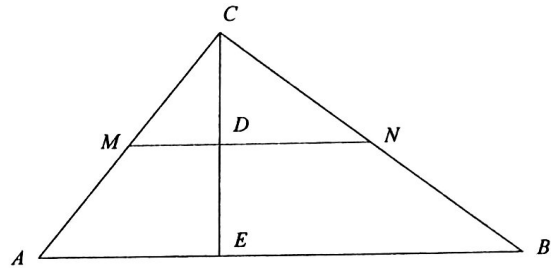
е сличен на $\triangle MNC$ со коефициент на сличност 2, имаме дека $\overline{CD} = h_1 = \frac{h}{2}$

и $\overline{MN} = m = \frac{a}{2}$. (5 п) Според тоа,

$$P_{MNC} = \frac{ah}{8} \text{ и } P_{ABMN} = P_{ABC} - P_{MNC} = \frac{ah}{2} - \frac{ah}{8} = \frac{3ah}{8}, \text{ (10 п)}$$

па затоа

$$\frac{P_{ABMN}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{3ah}{8}}{\frac{ah}{2}} = \frac{6ah}{8ah} = \frac{3}{4}. \text{ (5 п)}$$



4АБ. 1382. (СИГМА 106) Определи ги сите четирицифрени броеви \overline{abcd} такви што $\overline{cda} - \overline{abc} = 297$ и $a + b + c = 23$.

Решение. Равенката $\overline{cda} - \overline{abc} = 297$ можеме да ја запишеме во облик $99(c-a) + 10(d-b) = 3 \cdot 99$. (10 п)

Сега, според теоремите за деливост во множеството природни броеви $99 \mid 10(d-b)$. Бидејќи $d-b$ или $b-d$ е цифра, тоа е можно ако и само ако $10(d-b) = 0$, т.е. $d = b$. (5 п) Но тогаш $99(c-a) = 3 \cdot 99$, од каде добиваме $c-a = 3$, т.е. $c = a+3$. Ако пак сега замениме во $a+b+c = 23$ добиваме $a+b+a+3 = 23$, т.е. $b+2a = 20$, па затоа $b = 2(10-a)$. (5 п) Бидејќи b е цифра, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, па според тоа $10-a \leq 4$, т.е. $a \geq 6$. Бидејќи и c е цифра од равенството $c = a+3$, добиваме дека $a = 6$. Сега е јасно дека $c = 9$ и $b = 8$.

Значи, единствен број кој го задоволува условот од задачата е бројот $\overline{abcd} = 6898$. (5 п)

II година

1АБ. (Збирка задачи по математика за II година, автори И. Јанев, А. Самарциски, Глава 1, зад. 66)

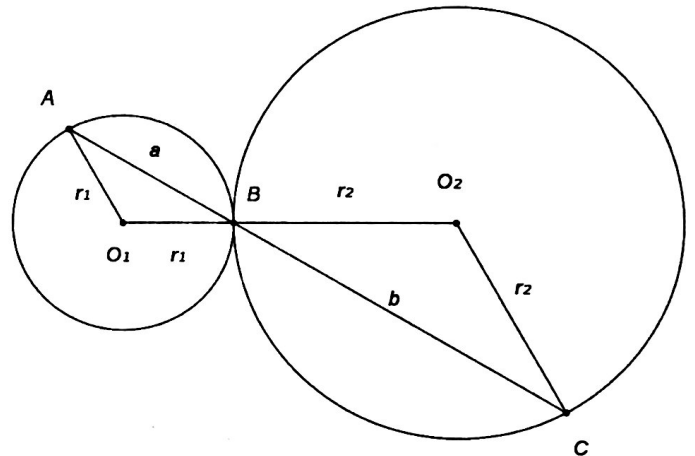
Две кружници се допираат еднадвор. Низ допирната точка е повлечена права, која на кружниците отсекува тетиви чии должини се однесуваат како 5:7. Најди ги радиусите на кружниците, ако растојанието меѓу нивните центри е 24.

Решение. Нека a е тетивата од кружницата $k_1(O_1, r_1)$, b е тетивата од кружницата $k_2(O_2, r_2)$ што ги отсекува правата (5 п.).

Од условот на задачата и од сличноста на триаголниците

ABO_1 и CBO_2 го добиваме системот $\begin{cases} r_1 : r_2 = 5 : 7 \\ r_1 + r_2 = 24 \end{cases}$ (10 п.), од

каде следува дека $r_1 = 10, r_2 = 14$ (10 п.).



2АБ. (Сигма 103, Рубрика задачи, зад. 1354). За реалните броеви x и y броевите $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ и $x^4 + y^4$ се рационални броеви. Дали бројот $x + y$ е рационален?

Решение. Доволно е да се разгледаат два случаи, кога едниот од броевите е нула и кога двата броеви се различни од нула, т.е. треба да се разгледуваат случаите $xy = 0$ и $xy \neq 0$. (3 п.).

Случај 1. Нека $xy = 0$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $y = 0$ (случајот кога и двата броја се еднакви на нула е тривијален) (1 п.). Во тој случај

$$x^2 + y^2 = x^2 + 0^2 = x^2 \text{ и } x^3 + y^3 = x^3 + 0^3 = x^3 \text{ (3 п.).}$$

Но, $x^2, x^3 \in \mathbb{Q}$ па од својствата на рационалните броеви добиваме $x = \frac{x^3}{x^2} \in \mathbb{Q}$ (3 п.). Сега е јасно дека $x + y = x + 0 = x \in \mathbb{Q}$ (2 п.).

Случај 2. Нека $xy \neq 0$. Од равенството $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$ и од својствата на рационалните броеви, добиваме дека $(xy)^2 \in \mathbb{Q}$ (3 п.). Но, тогаш од равенството $x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$, добиваме дека $x^6 + y^6 \in \mathbb{Q}$ (3 п.). Од

$x^6 + y^6 \in \mathbb{Q}$, својствата на рационалните броеви и равенството $(x^3 + y^3)^2 = x^6 + y^6 + 2(xy)^3$, следува дека $(xy)^3 \in \mathbb{Q}$ (3 п.).

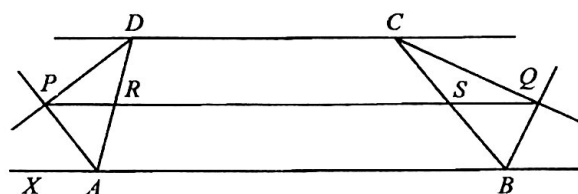
Сега, како и во случајот 1 имаме $xy = \frac{(xy)^3}{(xy)^2} \in \mathbb{Q}$ (2 п.). Од друга страна, $x + y = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} \in \mathbb{Q}$, што требаше да се докаже (2 п.).

3А. Решенијата на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$, каде $p + q = 2017$, се цели броеви. Определи ги тие решенија.

Решение. Според Виетовите формули за решенијата x_1 и x_2 важи $p + q = -(x_1 + x_2) + x_1x_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1$. Но $p + q = 2017$, па затоа $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2018$ (10 п.). Делители на 2018 се $\pm 1, \pm 2, \pm 1009$ и ± 2018 (3 п.). Ако земеме $|x_1| \leq |x_2|$, тогаш $x_1 - 1 = -1$ и $x_2 - 1 = -2018$, $x_1 - 1 = 1$ и $x_2 - 1 = 2018$, $x_1 - 1 = -2$ и $x_2 - 1 = -1009$ и $x_1 - 1 = 2$ и $x_2 - 1 = 1009$, од каде добиваме дека решенијата на равенката се: $x_1 = 0$ и $x_2 = -2017$; $x_1 = 2$ и $x_2 = 2019$; $x_1 = -1$ и $x_2 = -1008$; и $x_1 = 3$ и $x_2 = 1010$ (12 п.).

4А. Даден е трапез $ABCD$ со поголема основа AB . Симетралите на надворешните агли во темињата A и D се сечат во точката P , а во темињата B и C во точката Q (види цртеж). Докажи, дека должината на отсечката PQ е еднаква на полупериметарот на трапезот.

Решение. Надворешните агли во A и D се суплементни, па затоа симетралите на надворешните агли во A и D се заемно нормални. Слично, симетралите на надворешните агли во B и C се заемно нормални (6 п.). Нека PR е тежишна линија во правоаголниот триаголник ADP , тогаш $\overline{PR} = \frac{\overline{AD}}{2}$. Од друга страна $\overline{PR} = \overline{AR}$, од каде



следува $\angle RPA = \angle RAP$ и $\angle RAP = \angle RAX$ (X е точка од правата AB , лево од A), па зато $PR \parallel AX$ т.е. $PR \parallel AB$ (10 п.).

Слично, $QS \parallel AB$, од каде следува дека $RS \parallel AB$ (3 п.). Значи точките P, R, S и Q се колинеарни, од каде добиваме дека

$$\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RS} + \overline{SQ} = \frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}}{2},$$

што требаше да се докаже (6 п.).

3Б. Ако за коефициентите a, b, c на равенката $ax^2 + bx + c = 0$ важи $a > 0$ и $b > a + c$, докажи дека таа има две различни реални решенија.

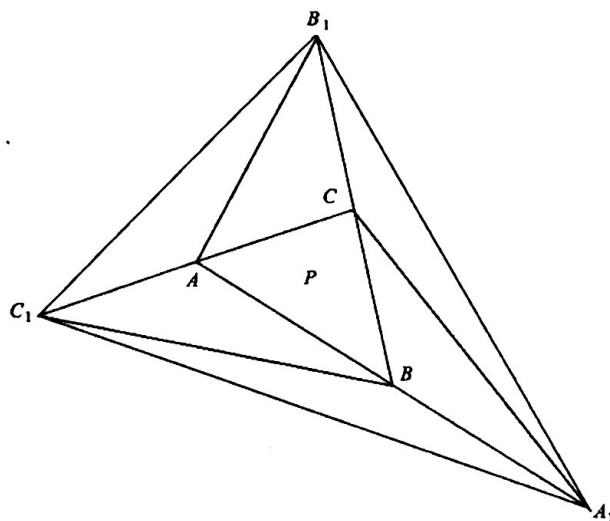
Решение. Ако $c \geq 0$ (3 п.), тогаш $b > a + c > 0$ (3 п.), па затоа $D = b^2 - 4ac > (a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2 \geq 0$ (8 п.), т.е. $D > 0$ и равенката има две различни реални решенија (2 п.). Ако $c < 0$ (1 п.), тогаш $D = b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$ и равенката има две различни реални решенија (8 п.).

4Б. Даден е триаголникот ABC чија плоштина е 2017 cm^2 .

Страните AB, BC и CA се продолжени преку темињата B, C и A за својата должина, така што $\overline{AB} = \overline{BA_1}$, $\overline{BC} = \overline{CB_1}$ и $\overline{CA} = \overline{AC_1}$.

Пресметај ја плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$.

Решение. Ги повлекуваме отсечките CA_1, AB_1 и BC_1 (5 п.). Ги разгледуваме триаголниците ABC и BA_1C . Тие имаат еднакви страни, $\overline{AB} = \overline{BA_1}$, и заедничка висина спуштена од темето C . Значи, тие се еднаквоплошни (10 п.). Слично, еднаквоплошни се и BA_1C и CA_1B_1 , ABC и ACB_1 , ACB_1 и C_1AB_1 , ABC и AC_1B и AC_1B и BC_1A_1 (5 п.). Затоа бараната плоштина е $7 \cdot 2017 = 14119 \text{ cm}^2$ (5 п.).



III година

1A. Определи ја вредноста на параметарот a така што едниот корен на равенката $x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$ да е еднаков на квадратот на другиот нејзин корен.

Решение. Нека x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$ и нека важи $x_2 = x_1^2$. (5 п) Од Виетовите формули следува

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \\ x_1 x_2 = a \end{cases}, \text{ (5 п) и како } x_2 = x_1^2 \text{ добиваме } \begin{cases} x_1 + x_1^2 = \frac{15}{4} \\ x_1^3 = a \end{cases}. \text{ Од првата равенка во последниот систем имаме}$$

$$x_1 + x_1^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow 4x_1^2 + 4x_1 - 15 = 0 \Leftrightarrow (x_1)_1 = -\frac{5}{2} \vee (x_1)_2 = \frac{3}{2}. \text{ (10 п)}$$

Сега, од втората равенка на системот добиваме дека $a = -\frac{125}{8}$ или $a = \frac{27}{8}$. (5 п)

1B. Нека x_1 и x_2 се различните корени на равенката $2x^2 - 3x + 4 = 0$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$.

Решение. Од Виетовите врски имаме дека важи $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$; $x_1 x_2 = 2$. (5 п) Тогаш

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^3} = -\frac{45}{64}. \text{ (20 п)}$$

2AB. (Збирка И. Јанев, Ј. Илиевски, Просветно дело, стр.17, зад. 59 б)) Реши ја равенката $5^{x-2} \cdot 8^{\frac{4x-12}{3}} = 20^{6-x}$.

Решение. Последователно, со еквивалентни трансформации добиваме:

$$\begin{aligned} 5^{x-2} \cdot 8^{\frac{4x-12}{3}} = 20^{6-x} & \stackrel{(5 \text{ п})}{\Leftrightarrow} 5^{x-2} \cdot (2^3)^{\frac{4x-12}{3}} = (2^2 \cdot 5)^{6-x} \stackrel{(5 \text{ п})}{\Leftrightarrow} 5^{x-2} \cdot 2^{4x-12} = 2^{2(6-x)} \cdot 5^{6-x} \\ \stackrel{(5 \text{ п})}{\Leftrightarrow} \frac{5^{x-2} \cdot 2^{4x-12}}{5^{6-x} \cdot 2^{12-2x}} = 1 & \stackrel{(5 \text{ п})}{\Leftrightarrow} 5^{2x-8} \cdot 2^{6x-24} = 1 \stackrel{(5 \text{ п})}{\Leftrightarrow} (5^2 \cdot 2^6)^{x-4} = 1 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4. \end{aligned}$$

3AB. (Сигма 104 задача 1375) Пресметај ја вредноста на изразот $\text{tg } 5^\circ \cdot \text{tg } 20^\circ + \text{tg } 20^\circ \cdot \text{tg } 65^\circ + \text{tg } 65^\circ \cdot \text{tg } 5^\circ$.

Решение. Со помош на тригонометриски идентитети добиваме

$$\begin{aligned} \text{tg } 5^\circ \text{tg } 20^\circ + \text{tg } 20^\circ \text{tg } 65^\circ + \text{tg } 65^\circ \text{tg } 5^\circ & \stackrel{(5 \text{ п})}{=} \text{tg } 5^\circ \text{tg } 20^\circ + \text{tg } 20^\circ \text{tg}(90^\circ - 25^\circ) + \text{tg}(90^\circ - 25^\circ) \text{tg } 5^\circ \\ & \stackrel{(5 \text{ п})}{=} \text{tg } 5^\circ \text{tg } 20^\circ + \text{ctg } 25^\circ (\text{tg } 20^\circ + \text{tg } 5^\circ) = \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} \left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ} \right) \\ & \stackrel{(5 \text{ п})}{=} \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} \cdot \frac{\sin 20^\circ \cos 5^\circ + \sin 5^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} = \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} \\ & \stackrel{(5 \text{ п})}{=} \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} = \frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ - \cos 25^\circ) + \cos 25^\circ}{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + \cos 25^\circ)} \\ & \stackrel{(5 \text{ п})}{=} \frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + \cos 25^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + \cos 25^\circ)} = 1. \end{aligned}$$

4A. Во Декартов правоаголен координатен систем даден е графикот на параболата $y = ax^2 + bx + c$ на кој е означена точка $A(1, -10)$. Потоа координатните оски и скоро

целата парабола се избришани (цртеж 1). Докажи дека $b^2 + bc > a^2 + ac$.

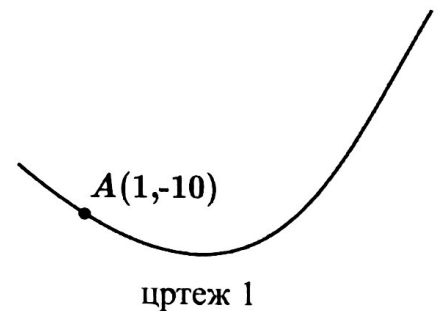
Решение. Од цртежот е јасно дека параболата е отворена нагоре, па затоа $a > 0$. Точката A лежи на параболата, па затоа важи

$$0 > -10 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c. \text{ (5 п)}$$

Од цртеж 1 заклучуваме дека темето на параболата има апсциса $-\frac{b}{2a} > 1 > 0$, па од $a > 0$ следува дека важи $b < 0$. (10 п) Според тоа, $b < 0 < a$ и ако во последните неравенства помножиме со $a + b + c < 0$ го добиваме неравенството

$$(a + b + c)b > (a + b + c)a \text{ (5 п)}$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. (5 п)



4Б. Реши ја неравенката $\frac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5} < 1$.

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned} \frac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5} < 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5} - 1 < 0 \stackrel{(5\text{ п})}{\Leftrightarrow} \frac{x^2+3x-5-(x^2+3x+5)}{x^2+3x+5} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-10}{x^2+3x+5} < 0 \stackrel{(10\text{ п})}{\Leftrightarrow} x^2+3x+5 > 0 \\ &\stackrel{(5\text{ п})}{\Leftrightarrow} \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2} > 0. \end{aligned}$$

Последното неравенство е исполнето за секој реален број x , од каде што следува дека множеството решенија на неравенката е множеството реални броеви (5 п).

IV година

1АБ. (збирка Илија Јанев, стр. 41, зад. 175) Првиот член на една геометриска прогресија со позитивни членови е 9. Збирот од логаритмите (со основа 10) на првите шест членови е еднаков на една четвртина од збирот на логаритмите на следните девет членови. Определи го количникот на прогресијата.

Решение. Нека q е количникот на прогресијата. Бидејќи таа е со позитивни членови, следува $q > 0$ (5 п). Имаме

$$\lg a_1 + \lg a_2 + \dots + \lg a_6 = \frac{1}{4}(\lg a_7 + \lg a_8 + \dots + \lg a_{15}) \quad (5\text{ п})$$

т.е.

$$\lg(a_1 a_2 \dots a_6) = \frac{1}{4} \lg(a_7 a_8 \dots a_{15}), \text{ или } a_1 a_2 \dots a_6 = \sqrt[4]{a_7 a_8 \dots a_{15}}. \quad (5\text{ п})$$

Сега, имаме

$$a_1 a_1 q a_1 q^2 \dots a_1 q^5 = \sqrt[4]{a_1 q^6 a_1 q^7 \dots a_1 q^{14}}, \text{ т.е. } a_1^6 q^{\frac{5 \cdot 6}{2}} = \sqrt[4]{a_1^9 q^{\frac{14 \cdot 15}{2} - \frac{5 \cdot 6}{2}}}. \quad (5\text{ п})$$

Оттука $a_1^6 q^{15} = \sqrt[4]{a_1^9 q^{90}}$, т.е. $a_1^{\frac{15}{4}} = q^{\frac{15}{2}}$, па затоа $q = (a_1^{\frac{15}{4}})^{\frac{2}{15}} = \sqrt{a_1}$. Бидејќи $a_1 = 9$ и $q > 0$ добиваме $q = 3$. (5 п)

2АБ. (Сигма 103, задача 1340.) Ако $x^2 - 3x + 1 = 0$, колку е $x^9 + x^7 + x^{-9} + x^{-7}$?

Решение. Според Виетовите формули имаме $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, па затоа корени на равенката се x и $\frac{1}{x}$, што значи $x + \frac{1}{x} = 3$, т.е.

$1 + x^2 = 3x$. (5 п) Понатаму,

$$x^9 + x^7 + x^{-9} + x^{-7} = x^7(x^2 + 1) + x^{-9}(1 + x^2) = (1 + x^2)(x^7 + x^{-9}) = 3x(x^7 + x^{-9}) = 3(x^8 + x^{-8}). \quad (10\text{ п})$$

Од $x + x^{-1} = 3$ следува $(x + x^{-1})^2 = 9$, односно $x^2 + x^{-2} = 7$.

Од $x^2 + x^{-2} = 7$ следува $(x^2 + x^{-2})^2 = 49$, односно $x^4 + x^{-4} = 47$.

Од $x^4 + x^{-4} = 47$ следува $(x^4 + x^{-4})^2 = 47^2 = 2209$, односно $x^8 + x^{-8} = 2207$. (10 п)

Конечно, $x^9 + x^7 + x^{-9} + x^{-7} = 3(x^8 + x^{-8}) = 3 \cdot 2207 = 6621$.

3А. Даден полиномот

$$P(x) = (x-2)^{2016}(x+2016) + (x-2)^{2015}(x+2015) + \dots + (x-2)(x+1).$$

Определи го збирот на коефициентите на полиномот $P(x)$.

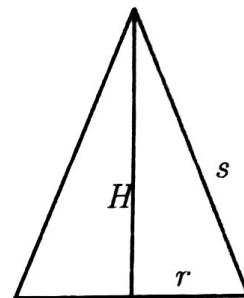
Решение. Збирот на коефициентите на било кој полином е еднаков на $P(1)$. (5 п) Според тоа, збирот на коефициентите на полиномот $P(x)$ е еднаков на

$$\begin{aligned} P(1) &= (-1)^{2016}(1+2016) + (-1)^{2015}(1+2015) + \dots + (-1)(1+1) \quad (10\text{ п}) \\ &= 2017 - 2016 + 2015 - 2014 + \dots + 3 - 2. \end{aligned}$$

Во последниот збир имаме 1008 парови чиј збир е 1 (10 п), па затоа збирот на коефициентите на полиномот $P(x)$ е 1008.

3Б. Радиусот, висината и изводницата на прав кружен конус се последователни членови на една аритметичка прогресија. Одреди го волуменот на конусот ако плоштината на оскиниот пресек на конусот изнесува 300.

Решение. Имаме $r, H = r + x$ и $s = r + 2x$. (5 п) Плоштината на оскиниот пресек е $P = \frac{2rH}{2} = rH = 300$, па затоа $x = \frac{300}{r} - r$. (5 п) Понатаму, $s^2 = H^2 + r^2$, па затоа $(r + 2x)^2 = (r + x)^2 + r^2$. (5 п) Од последново и од $x = \frac{300}{r} - r$ добиваме дека $r = 15$. (5 п) Следува $x = 5$ и $H = 20$. Значи, $V = \frac{r^2 \pi H}{3} = 1500\pi$. (5 п)



4. А. Докажи дека $\underbrace{666\dots666}_n^2 = \underbrace{444\dots444}_{n-1} \underbrace{3555\dots555}_{n-1} 6$, за секој природен број n .

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. (5 п) Очигледно е дека $6^2 = 36$ и $66^2 = 4356$. (5 п) Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n = k$, т.е.

$$\underbrace{666\dots666}_k^2 = \underbrace{444\dots444}_{k-1} \underbrace{3555\dots555}_{k-1} 6 \quad (5 \text{ п})$$

За $n = k + 1$, имаме

$$\begin{aligned} \underbrace{666\dots666}_{k+1}^2 &= (6\underbrace{000\dots000}_k + \underbrace{666\dots666}_k)^2 \\ &\stackrel{(10 \text{ п})}{=} 36\underbrace{000\dots000}_{2k} + 7999\dots999 \underbrace{2000\dots000}_k + \underbrace{444\dots444}_{k-1} \underbrace{3555\dots555}_{k-1} 6 \quad (5 \text{ п}) \\ &= 36\underbrace{000\dots000}_{2k} + 8\underbrace{444\dots444}_{k-2} \underbrace{3555\dots555}_k 6 \\ &= \underbrace{444\dots444}_{(k+1)-1} \underbrace{3555\dots555}_{(k+1)-1} 6 \quad (5 \text{ п}) \end{aligned}$$

што значи дека тврдењето важи и за $n = k + 1$, па согласно принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој природен број n .

4Б. Најди го збирот на броевите $5, 55, 555, 5555, \dots, \underbrace{555\dots5}_{5555 \text{ цифри}}$.

Решение. Последователно имаме

$$\begin{aligned} 5 + 55 + 555 + 5555 + \dots + \underbrace{555\dots5}_{5555 \text{ цифри}} &\stackrel{(5 \text{ п})}{=} 5(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{5555 \text{ цифри}}) \\ &\stackrel{(10 \text{ п})}{=} 5\left(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \dots + \frac{10^{5555}-1}{9}\right) \\ &\stackrel{(5 \text{ п})}{=} \frac{5}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{5555} - \frac{1}{9} \cdot 5555) \\ &\stackrel{(5 \text{ п})}{=} \frac{5}{9}(10 \frac{10^{5555}-1}{9} - \frac{1}{9} \cdot 5555) \\ &= \frac{5}{81}(10^{5556} - 5565) \end{aligned}$$