M M 2017 O

24_та ММО

24-та Македонска математичка олимпијада
ФОН Универзитет, Скопје
08.04.2017 година

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секој природен број $n>1$ и за секои $x,y\in\mathbb{N}$ важи

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k}\ .$$

2. Определи ги сите природни броеви n такви што $(n^3+39n-2)n!+17\cdot 21^n+5$ е точен квадрат.

3. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека

$$(x^4+\frac{z^2}{y^2})(y^4+\frac{x^2}{z^2})(z^4+\frac{y^2}{x^2})\geq(\frac{x^2}{y}+1)(\frac{y^2}{z}+1)(\frac{z^2}{x}+1)\quad .$$

4. Нека O е центар на опишаната кружница околу остроаголниот триаголник ABC ($\overline{AB}<\overline{AC}$) . Нека A_1 и P се подножјата на нормалите повлечени од A и O кон страната BC, соодветно. Правите BO и CO се сечат со правата AA_1 во точките D и E, соодветно. Втората пресечна точка на опишаните кружници околу триаголниците ABD и ACE е точката F. Докажи дека симетралата на $\measuredangle FAP$ минува низ центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC.

5. Нека $n>1$ е природен број и $a_1,a_2,...,a_n$ е низа од n природни броеви. Нека

$$b_1=[\frac{a_2+...+a_n}{n-1}],\ b_i=[\frac{a_1+a_2+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_n}{n-1}],1<i<n,\ b_n=[\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}].$$

Дефинираме преликување f со $f(a_1,a_2,...,a_n)=(b_1,b_2,...,b_n)$.

а) Нека функцијата $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е дефинирана со $g(1)$ е бројот на различни елементи во низата $f(a_1,a_2,...,a_n)$ и $g(m)$ е бројот на различни елементи во низата $f^m(a_1,a_2,...,a_n)=f(f^{m-1}(a_1,a_2,...,a_n)),m>1$. Докажи дека постои природен број k_0 таков што за $m\geq k_0$ функцијата $g(m)$ е периодична.

б) Докажи дека $\sum_{m=1}^{k}\frac{g(m)}{m(m+1)}<C$ за било кој природен број k, каде константата C не зависи од k .