LIX ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ
19.III-2016

I година

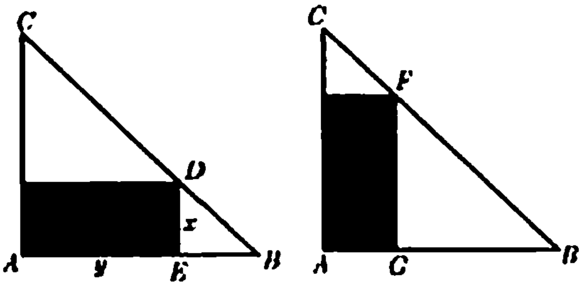
1. **Нека $n=\overline{abcabc}$ и $a \neq 0$. Докажи дека n не е квадрат на природен број.**

Решение. Јасно е дека $n=1001\cdot\overline{abc}=7\cdot11\cdot13\cdot\overline{abc}$. Ако n е квадрат на природен број, тогаш $7|\overline{abc}$, $11|\overline{abc}$ и $13|\overline{abc}$.

Бидејќи 7,11,13 се прости броеви, добиваме дека $1001|\overline{abc}$, што не е можно.

2. **На цртежот е прикажан правоаголник, кој не е квадрат и кој може да се впише во правоаголниот триаголник на два различни начини. Едната катета на триаголникот има должина a. Докажи дека периметарот на правоаголникот е еднаков на $2a$.**

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со катета $\overline{AB}=a$ и нека x и y се должините на страните на правоаголникот кој на два начина е вишан во триаголникот (види цртеж). Тогаш, триаголниците EBD и GBF се слични. Според тоа, $\frac{x}{a-y}=\frac{y}{a-x}$, од каде што добиваме



$$x(a-x)=y(a-y)$$
$$a(x-y)=x^2-y^2$$
$$a(x-y)=(x+y)(x-y)$$

Сега бидејќи $x\neq y$, добиваме $a=x+y$. Периметарот на правоаголникот е $L=2x+2y=2(x+y)=2a$.

3. **Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,z) такви што**
$$2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2-x^4-y^4-z^4=576.$$

Решение. Имаме
$$\begin{aligned}4x^2y^2-(x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2)&=4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2\\&=(2xy-x^2-y^2+z^2)(2xy+x^2+y^2-z^2)\\&=(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)\\&=(z-x+y)(z+x-y)(x+y-z)(x+y+z)=576.\end{aligned}$$

Понатаму, збирот на кои било два од броевите $z-x+y, z+x-y, x+y-z, x+y+z$ е парен број, па затоа тие се со иста парност и како нивниот производ е парен број, тие се парни броеви. Нека
$$z-x+y=2a, z+x-y=2b, x+y-z=2c, x+y+z=2d.$$

Тогаш $16abcd=576$, т.е. $abcd=36$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\geq y\geq z$, од каде следува $d>c\geq b\geq a$. Понатаму, бројот 36 како производ на четири множители од кои едниот е поголем од останатите три можеме да го преставиме на следниве начини $36=6\cdot3\cdot2\cdot1=12\cdot3\cdot1\cdot1=18\cdot2\cdot1\cdot1=36\cdot1\cdot1\cdot1$. Сега, од $36=6\cdot3\cdot2\cdot1$ добиваме $a=1, b=2, c=3, d=6$, од каде следува дека $x=b+c=5$, $y=a+c=4$ и $z=a+b=3$. Лесно се гледа дека останатите претставувања на бројот 36 доведуваат до противречност. Конечно,
$$(x,y,z)\in\{(3,4,5),(5,3,4),(4,5,3),(5,4,3),(3,5,4),(4,3,5)\}$$

4. Од 43 монети наредени во еден ред, 8 монети се свртени со „писмо" нагоре, а 35 со „глава" нагоре. Во еден чекор се превртуваат било кои 20 монети. Дали е можно после конечен број на чекори сите монети да бидат свртени со „глава" нагоре? Во колку најмалку чекори тоа е можно? Одговорот да се образложи!

Решение. Нека во првиот чекор x „писма" се свртат во „глави". Тогаш $20-x$ „глави" ќе се свртат во „писма". После овој чекор, бројот на „писма" и „глави" е:

$$\text{„писма"}: (8-x)+(20-x)=28-2x, \qquad \text{„глави"}: x+(35-(20-x))=2x+15$$

На ваков начин, при првиот чекор ќе имаме парен број на „писма", а непарен број на „глави". Ако во вториот чекор y „писма" се свртат во „глави", тогаш бројот на „писмата" и „главите" после овој чекор ќе биде

$$\text{„писма"}: 28-2x-y+(20-y)=48-2x-2y \qquad \text{„глави"}: y+2x+15-(20-y)=2x+2y-5$$

што значи дека парноста на бројот на „писмата" и бројот на „главите" не се менува. Јасно, за да се постигне саканата цел во еден чекор треба да свртиме 20 „писма". Тоа не е можно во првиот чекор, но ако во првиот чекор свртиме 4 „писма" и 16 „глави" ќе добиеме $28-2\cdot4=20$ „писма" и $2\cdot4+15=23$ „глави". Сега, во вториот чекор сите 20 „писма" ќе ги свртиме во „глава", што значи дека сите монети може да се свртат во „глава" после 2 чекори.

II година

1. **Во множеството природни броеви реши го системот равенки**
$$\begin{cases}ab+c=13,\\a+bc=23.\end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме равенките, добиваме:

$$(ab+c)+(a+bc)=36$$
$$(a+c)(b+1)=36$$

Ако пак, од втората ја одземеме првата равенка, добиваме:

$$(a+bc)-(ab+c)=10$$
$$(c-a)(b-1)=10$$

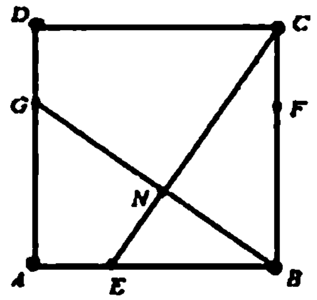
Според тоа, $(b+1)|36$ и $(b-1)|10$. Но, $36=2\cdot18=3\cdot12=4\cdot9=6\cdot6$ и $10=1\cdot10=2\cdot5$. Со непосредна проверка се добива дека единствени можни вредности за b се 2, 3 и 11.

За $b=2$, се добива системот $\begin{cases}2a+c=13\\ a+2c=23\end{cases}$ чие решение е $a=1$, $c=11$.

За $b=3$, се добива системот $\begin{cases}3a+c=13\\ a+3c=23\end{cases}$ чие решение е $a=2$, $c=7$.

За $b=11$, се добива системот $\begin{cases}11a+c=13\\ a+11c=23\end{cases}$ чие решение е $a=1$, $c=2$.

2. На страните AB и BC на квадратот $ABCD$ дадени се точки E и F, соодветно, такви што $\overline{BE}=\overline{BF}$. Нека BN е висината во триаголникот BCE. Докажи дека триаголникот DNF е правоаголен.



Решение. Нека G е пресечната точка на AD и BN. Тогаш правоаголните триаголници ABG и BCE се складни ($\overline{AB}=\overline{BC}$ и $\angle ABG=90^\circ-\angle NBC=\angle BCN=\angle BCE$). Според тоа, $\overline{AG}=\overline{BE}=\overline{BF}$, па затоа $\overline{GD}=\overline{FC}$. Од $\angle GDC=\angle GNC=90^\circ$ следува дека четириаголникот $GNCD$ е тетивен, а од $\overline{GD}=\overline{FC}$, следува дека $GFCD$ е правоаголник. Значи, $\angle GFC=90^\circ$ и како $\angle GNC=90^\circ$ добиваме дека петаголникот $GNFCD$ е вписан во кружница со дијаметри GC и DF. Затоа, $\angle DNF=90^\circ$, т.е. триаголникот DNF е правоаголен.

3. Ако равенките $x^2+px+q=0$ и $x^2+px-q=0$ имаат целобројни решенија, тогаш постојат цели броеви a и b, такви што $p^2=a^2+b^2$. Докажи!

Решение. Ќе покажеме дека p, q, $D_1=\sqrt{p^2-4q}$ и $D_2=\sqrt{p^2+4q}$ се цели броеви. Решенијата на квадратната равенка $x^2+px+q=0$ се $x_{1,2}=\frac{-p\pm D_1}{2}$ и тие по услов се цели броеви. Затоа, нивниот збир $\frac{-p+D_1}{2}+\frac{-p-D_1}{2}=-p$ е цел број, т.е p е цел број и нивната разлика $\frac{-p+D_1}{2}-\frac{-p-D_1}{2}=D_1$ е цел број. Од Виетовите формули имаме $x_1x_2=q\in\mathbb{Z}$, како производ на цели броеви. Слично, од втората равенка добиваме дека $D_2\in\mathbb{Z}$. Понатаму, од $p^2-4q=D_1^2$ и $p^2+4q=D_2^2$ следува дека D_1 и D_2 имаат иста парност со p. Со собирање на последните равенства добиваме $2p^2=D_1^2+D_2^2$ или $p^2=\frac{D_1^2+D_2^2}{2}$. Тогаш $p^2=\frac{D_1^2+D_2^2}{2}=(\frac{D_1+D_2}{2})^2+(\frac{D_1-D_2}{2})^2=a^2+b^2$, каде $a=\frac{D_1+D_2}{2}$ и $b=\frac{D_1-D_2}{2}$ се цели броеви, бидејќи D_1 и D_2 се со иста парност.

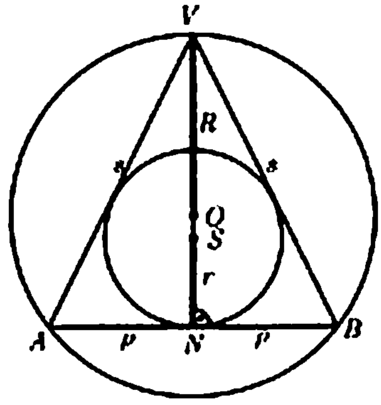
4. Даден е правилен шестаголник со страна 1. Во внатрешноста на шестаголникот земени се m точки такви што никои три точки меѓу темињата и овие m точки не се колинеарни. Шестаголникот е разделен на триаголници, при што секоја од дадените m точки и секое од темињата на шестаголникот е теме на делбен триаголник. Два делбени триаголници немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

Решение. Ќе го определиме вкупниот број на делбени триаголници на кои е поделен дадениот шестаголник. Нека A е произволна точка од внатрешните m точки. Збирот од сите агли во точката A е 360° (збир од сите агли во A на сите триаголници кои таа точка ја имаат за свое теме). Од друга страна, збирот од сите агли во теме на шестаголникот е 120°. Бидејќи збирот на аглите во секој триаголник е 180°, бројот на делбени триаголници е: $\frac{m\cdot360^\circ+6\cdot120^\circ}{180^\circ}=2m+4$.

Нека претпоставиме дека плоштината на секој од дадените делбени триаголници е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$. Тогаш збирот на плоштините на сите делбени триаголници е поголем од $(2m+4)\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, што не е можно бидејќи плоштината на дадениот шестаголник е $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Конечно, од добиената противречност следува дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

III година

1. **Висината на прав конус е два пати подолга од радиусот на основата. Најди го односот на волуменот на топката опишана околу конусот и топката впишана во него.**



Решение. Нека $R=\overline{OV}$ е радиус и O е центарот на опишаната топка околу конусот, точката N е средина на основата на конусот, точката V е врвот на конусот, $r=\overline{SN}$ е радиус и S е центарот на впишаната топка во конусот, $v=\overline{VN}$ е висината на конусот, ρ е радиусот на основата, s е должина на бочната страна. Тогаш,

$$s=\sqrt{4\rho^2+\rho^2}=\rho\sqrt{5}\,,\ P_{\Delta ABV}=2\rho^2\,.$$

$$R=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BV}\cdot\overline{VA}}{4P_{\Delta ABV}}=\frac{2\rho\cdot\rho\sqrt{5}\cdot\rho\sqrt{5}}{8\rho^2}=\frac{5\rho}{4}\,,\ r=\frac{2P_{\Delta ABV}}{L}=\frac{4\rho^2}{2\rho+2\sqrt{5}\rho}=\frac{2\rho}{1+\sqrt{5}}\,.$$

Затоа, бараниот однос е

$$\frac{V_R}{V_r}=\frac{\frac{4}{3}R^3\pi}{\frac{4}{3}r^3\pi}=\left(\frac{R}{r}\right)^3=\left(\frac{\frac{5\rho}{4}}{\frac{2\rho}{1+\sqrt{5}}}\right)^3=\left(\frac{5(1+\sqrt{5})}{8}\right)^3=\frac{125(2+\sqrt{5})}{64}\,.$$

2. **За острите агли α,β и γ важи $\cos\alpha=\operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta=\operatorname{tg}\gamma$ и $\cos\gamma=\operatorname{tg}\alpha$. Докажи дека $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.**

Решение. Од условот на задачата следува

$$\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{1}{\cos^2\beta}-1=\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}-1=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\gamma}-1}-1=\frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}-1$$

Воведуваме смена $\cos^2\alpha=t$ и ја добиваме равенката $t^2+t-1=0$. Следува дека $t_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Бидејќи $\cos^2\alpha\geq 0$, добиваме дека $\cos^2\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Според тоа, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$. Бидејќи α е остар агол, добиваме дека $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Аналогно се докажува дека $\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. **Нека $a,b,c>1$ се реални броеви. Докажи дека**

$$\log_a\left(\frac{b^2}{ac}-b+ac\right)\cdot\log_b\left(\frac{c^2}{ab}-c+ab\right)\cdot\log_c\left(\frac{a^2}{bc}-a+bc\right)\geq 1.$$

Решение. Со примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $\frac{a^2}{bc}+bc\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}\cdot bc}=2a$.

Значи, $\frac{a^2}{bc}-a+bc\geq a>1$ и како $c>1$, добиваме дека $\log_c\left(\frac{a^2}{bc}-a+bc\right)\geq\log_c a>0$.

Аналогно, се докажува дека $\log_a\left(\frac{b^2}{ac}-b+ac\right)\geq\log_a b>0$ и $\log_b\log_c\left(\frac{c^2}{ab}-c+ab\right)\geq\log_b c>0$. Конечно,

$$\log_a\left(\frac{b^2}{ac}-b+ac\right)\cdot\log_b\left(\frac{c^2}{ab}-c+ab\right)\cdot\log_c\left(\frac{a^2}{bc}-a+bc\right)\geq\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\frac{\lg b\cdot\lg c\cdot\lg a}{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}=1.$$

4. **Од сите триаголници ABC со фиксна големина α на аголот $\angle BAC$ и фиксна должина a на страната BC, најголем периметар има рамнокракиот триаголник со основа BC. Докажи!**

Решение. Нека R е радиусот на опишаната кружница околу триаголник кој ги задоволува условите на задачата. Од синусна теорема следува дека $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$, што значи дека должината на радиусот на опишаната кружница околу било кој триаголник кој што ги исполнува условите на задачата е константна. Периметарот на триаголникот ќе биде најголем кога збирот $\overline{AB}+\overline{AC}$ е најголем. Сега, прво од синусна теорема, а потоа од адиционите формули следува

$$\overline{AB}+\overline{AC}=2R(\sin\gamma+\sin\beta)=4R\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=4R\sin(90^\circ-\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Но, R и α се константни, па затоа збирот $\overline{AB}+\overline{AC}$ ќе биде најголем кога $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ ќе биде најголем, што значи кога $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=1$. Според тоа, збирот $\overline{AB}+\overline{AC}$, т.е. периметарот има најголема вредност кога $\beta=\gamma$, односно кога ABC е рамнокрак триаголник со основа BC.

IV година

1. **Докажи дека $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n\in\mathbb{Z}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.**

Решение. Нека $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Треба да докажеме дека $a^n+\frac{1}{a^n}\in\mathbb{Z}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

За $n=1$ и $n=2$ тврдењето важи бидејќи $a+\frac{1}{a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{2(3-\sqrt{5})}{4}=3\in\mathbb{Z}$ и $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})(a+\frac{1}{a})-2=9\in\mathbb{Z}$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за секој $n\leq k$. Тогаш, за $n=k+1$ важи

$$a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}=(a^k+\frac{1}{a^k})(a+\frac{1}{a})-(a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}})$$

и како $a+\frac{1}{a}, a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}, a^k+\frac{1}{a^k}\in\mathbb{Z}$ следува дека $a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}\in\mathbb{Z}$, т.е. тврдењето важи $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $n\in\mathbb{N}$

2. **Определи ја геометриската прогресија од реални броеви кај која збирот на нејзините први четири членови е 15, а збирот на нивните квадрати е 85.**

Решение. Од условите на задачата следува $a(1+q+q^2+q^3)=15$ и $a^2(1+q^2+q^4+q^6)=85$. Оттука следува

$$\frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{45}{17}, \text{ т.е. } \frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^4+1}=\frac{45}{17}.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката $14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0$. Но, $q\neq 0$, па затоа последната равенка можеме да ја поделиме со $q^2\neq 0$, после што ја добиваме равенката $14(q^2+\frac{1}{q^2})-17(q+\frac{1}{q})-17=0$, која е еквивалентна со равенката $14(q+\frac{1}{q})^2-17(q+\frac{1}{q})-45=0$. Воведуваме смена $t=q+\frac{1}{q}$ и ја добиваме равенката $14t^2-17t-45=0$, чии решенија се $t_1=\frac{5}{2}$ и $t_2=-\frac{9}{7}$. За $t_1=\frac{5}{2}$ ја добиваме равенката $q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2}$ чии решенија се $q_1=2, q_2=\frac{1}{2}$, а додека за $t_2=-\frac{9}{7}$ равенката $q+\frac{1}{q}=-\frac{9}{7}$ нема реални решенија. Конечно, за $q_1=2$ наоѓаме $a_1=1$, т.е. ја добиваме прогресијата $1,2,4,8,16,\dots$, а $q_2=\frac{1}{2}$ наоѓаме $a_2=8$, т.е. ја добиваме прогресијата $8,4,2,1,\frac{1}{2},\dots$.

3. **Нека $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ е функција која ги задоволува условите:**

а) f строго монотоно расте;

б) $f(x)>-\frac{1}{x}$, за $x>0$;

в) $f(x)f(f(x)+\frac{1}{x})=1$, за $x>0$.

Пресметај $f(1)$.

Решение. Нека $x>0$ и $k=f(x)+\frac{1}{x}$ Тогаш од условот б) следува $k>0$, па од условот в) следува $f(k)f(f(k)+\frac{1}{k})=1$. Но, бидејќи $x>0$ од условот в) добиваме $f(x)f(k)=.f(x)f(f(x)+\frac{1}{x})=1$. Од последните две равенства следува $f(x)=f(f(k)+\frac{1}{k})=f(\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{x}})$. Понатаму, функцијата f строго монотоно расте, па затоа таа е инјекција и од последното равенство следува дека $x=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{x}}$. Последната равенка ја решаваме по $f(x)$ и добиваме $f(x)=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2x}$. Лесно се проверува дека само функцијата $f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2x}$ ги задоволува условите на задачата. Значи, $f(1)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

4. **Во множеството $\mathbb{N}\cup\{0\}$ реши ја равенката $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$.**

Решение. Очигледно е дека $(0,0)$ е едно решение на равенката. Почетната равенка ја трансформираме во обликот $x(x+1)=(y^2+1)(y^2+y)$. За $y=1$ ја добиваме равенката $x(x+1)=4$ која нема решение во множеството $\mathbb{N}\cup\{0\}$. За $y=2$ ја добиваме равенката $x(x+1)=5\cdot 6$ и парот $(5,2)$ е единствено нејзино решение во множеството $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Нека $y\geq 3$. Тогаш

$$(y^2+1)(y^2+y)=y^4+y^3+y^2+y<y^4+y^3+\frac{5y^2}{4}+\frac{y}{2}=(y^2+\frac{y}{2})(y^2+\frac{y}{2}+1) \text{ и}$$

$$(y^2+1)(y^2+y)=y^4+y^3+y^2+y>y^4+y^3+\frac{y^2}{4}-\frac{1}{4}=(y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2})(y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}).$$

Според тоа,

$$(y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2})(y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{2})<x(x+1)<(y^2+\frac{y}{2})(y^2+\frac{y}{2}+1) \qquad (1)$$

и како $x,y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ од последните неравенства следуваат неравенствата

$$y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}<x<y^2+\frac{y}{2} \qquad (2)$$

(во спротивно лесно се покажува дека не се исполнети неравенствата (1)). Сега, ако $y=2k$, тогаш од (2) следува дека $4k^2+2k-\frac{1}{2}<x<4k^2+2k$, што не е можно за ниту еден $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Понатаму, ако $y=2k+1$, тогаш од (2) следува дека $(2k+1)^2+k<x<(2k+1)^2+k+\frac{1}{2}$, што не е можно за ниту еден $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Според тоа, равенката нема решение за кое $y\geq 3$

Значи, единствени решенија на равенката се $(0,0)$ и $(5,2)$.