Општински натпревар по математика за учениците од средното образование 23.I-2016

I година **А група**

$\boxed{1.}$ Ако $ab=5$, пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{(a+b)^3-a^3-b^3}{a+b}.$$

$\boxed{2.}$ Докажи дека бројот $2^{10}+5^{12}$ е сложен.

$\boxed{3.}$ Голема коцка е составена од 64 мали единечни коцки. Откако единечните коцки се залепени во големата коцка, таа е обоена во боја. На колку од единечните коцки им биле обоени само една страна, на колку две страни, на колку три страни и на колку ниту една страна. Образложи го одговорот.

$\boxed{4.}$ Зададен е паралелограм $ABCD$. Над страните AB, BC, CD, DA се конструирани квадрати кои лежат во надворешноста на паралелограмот. Центарот (пресекот на дијагоналите) на паралелограмот, средината на било која негова страна и центарот на квадратот конструиран на таа страна се темиња на триаголник.

а) Докажи дека четирите такви триаголници се складни,

б) Докажи дека четириаголникот чии темиња се центрите на конструираните квадрати се темиња на квадрат.

Секоја точно решена задача се вреднува со 25 бода.
Време за работа 150 минути.

Општински натпревар по математика
за учениците од средното образование
23.I-2016

II година **А група**

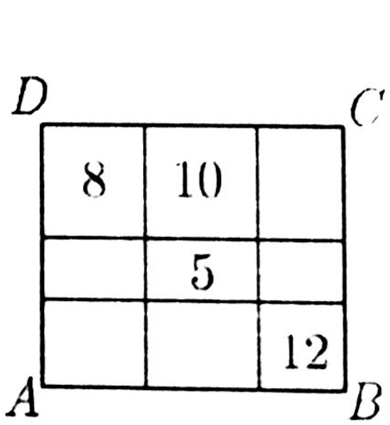
1. Пресметај $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2}{b^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b^3}{a^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{b^4}{a^3}}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^{10}}{b^{14}}}$ ако $a=\sqrt{10}, b=2$.

2. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 - y = z^2 \\ y^2 - z = x^2 \\ z^2 - x = y^2 \end{cases}.$$

3. Ако точката M е средина на кракот AD на трапезот $ABCD$, докажи дека плоштината на триаголникот MBC е половина од плоштината на трапезот $ABCD$.

4. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на 9 помали правоаголници, така што плоштините на четири од нив се 8,10,5,12, како што е прикажано на цртежот.



Определи ја најмалата можна вредност на плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Секоја точно решена задача се вреднува со 25 бода.
Време за работа 150 минути.

Општински натпревар по математика
за учениците од средното образование
23.I-2016

III година **А група**

1. Докажи го идентитетот: $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

2. Нека $x,y\in\left(0,1\right)$, такви што за $a>0, a\neq 1$, важи равенството $\log_x a+\log_y a=4\log_{xy} a$. Докажи дека $x=y$.

3. Определи ја вредноста на параметарот a, така што неравенката $\left|\frac{\left(a+2\right)x}{x^2-x+1}\right|<1$, да е исполнета за сите вредности на променливата x.

4. Страната BC на триаголникот ABC има должина a а радиусот на впишаната кружница r. Определи ја плоштината на триаголникот, ако впишаната кружница ја допира кружницата со дијаметар BC.

Секоја точно решена задача се вреднува со 25 бода.
Време за работа 150 минути.

Општински натпревар по математика
за учениците од средното образование
23.I-2016

IV година **Б група**

1. Производот од третиот и четвртиот член во развојот на биномот $\left(x+x^{\lg x}\right)^5$ е еднаков на 10000000. Најди го x.

2. Ако вториот, третиот и шестиот член од една аритметичка прогресија формираат геометриска прогресија, кој е количникот на таа (геометриската) прогресија?

3. Најди ги вредностите на параметарот $p \neq 0$ за кои равенката $x^4-(3p+2)x^2+p^2=0$ има четири реални решенија кои формираат аритметичка прогресија (т.е. се последователни членови на иста аритметичка прогресија).

4. Најди ја најмалата вредност на изразот
$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}$$
ако x, y, z се ненегативни реални броеви такви што
$$x+y+z=2013.$$

Секоја точно решена задача се вреднува со 25 бода.
Време за работа 150 минути.