22-та Македонска математичка олимпијада

23-та Македонска математичка олимпијада
Факултет за електротехника и информациски технологии-Скопје
09.04.2016 година

1. Во множеството природни броеви решени ја равенката $1+x^2+y^2=Н.З.С.\left(x^2,y^2\right)$.

2. Магичен квадрат со димензии 3×3 е квадрат со страна 3, составен од 9 единечни квадрати, така што реалните броеви запишани во единечните квадрати (по еден број во секој единечен квадрат) го задоволуваат својството: збирот на броевите од единечните квадрати во било која редица е еднаков на збирот на броевите од единечните квадрати во било која колона и е еднаков на збирот на броевите во единечните квадрати во двете дијагонали.

Даден е правоаголник со димензии $m\times n, m\geq3, n\geq3$, составен од mn единечни квадрати. Ако во секој единечен квадрат од правоаголникот е запишан по еден број така што секој квадрат со димензии 3×3 е магичен, тогаш колку најмногу различни броеви можат да се употребат за пополнување на правоаголникот?

3. Во множеството природни броеви реши ја равенката $xyz+yzt+xzt+xyt=xyzt+3$.

4. Дадена е отсечка AB и нејзината средна точка K. На нормалата на AB повлечена низ K избрана е произволна точка C, различна од K. Нека N е пресечната точка на AC со правата што минува низ B и средината на отсечката CK. Нека U е пресечната точка на AB со правата што минува низ C и средината L на отсечката BN. Докажи дека односот на плоштините на триаголниците CNL и BUL не зависи од изборот на точката C.

5. Нека $n\geq3$ и $a_1,a_2,\ldots,a_n$ се позитивни реални броеви за кои што важи $\frac{1}{1+a_1^4}+\frac{1}{1+a_2^4}+\ldots+\frac{1}{1+a_n^4}=1$. Докажи го неравенството $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n\geq(n-1)^{n/4}$.

Време за работа 4 часа и 30 минути

За секоја точно решена задача се добиваат 8 поени