I година

1. Одреди ги ненултите цифри a,b и c за кои важи $\frac{1}{a+b+c}=\overline{0,abc}$. Најди ги сите решенија!

Решение. Со множењето на даденото равенство со $1000(a+b+c)$ добиваме $1000=\overline{abc}(a+b+c)$. Бидејќи a,b и c се цифри, за нив важи $a+b+c<27$. Од друга страна, имаме дека 1000 како производ на два броја (од кои еден трицифрен) може да се претстави како $500\cdot 2$, $250\cdot 4$, $200\cdot 5$, $125\cdot 8$, $100\cdot 10$. Проверуваме за кој од трицифрените броеви збирот на цифрите го дава вториот множител. Тоа единствено важи за $125\cdot 8$, па $a=1,b=2$ и $c=5$.

2. Дали може 77 кутии со димензии 3x3x1 да ги сместиме во сандак со димензии 7x9x11. Образложи го својот одговор.

Решение. Бидејќи $77\cdot(3\cdot 3\cdot 1)=7\cdot 9\cdot 11$ следува дека волуменот на сите кутии е еднаков на волуменот на сандакот. Затоа мора секоја од страните (ѕидовите) на сандакот да ги содржи, без остаток, страните или комбинација на страните (ѕидовите) на кутиите. Плоштината на ѕидовите на кутиите е или 9 или 3 квадратни единици. Тоа, пак, значи дека плоштината на секој ѕид на сандакот мора да е делива со 3. Но плоштина од 77 квадратни единици на ѕидот со димензии 7x11 не е делив со 3, па затоа кутиите не можеме да ги сместиме во сандакот.

3. Најди го бројот на подредени тројки од природни броеви (a,b,c) такви што $НЗС(a,b)=1000, НЗС(b,c)=2000$ и $НЗС(c,a)=2000$.

Решение. Бидејќи броевите 1000 и 2000 се од облик $2^m 5^n$ за m,n природни броеви, добиваме дека и броевите a,b,c се исто така од облик $2^m 5^n$. Нека $a=2^{m_1}5^{n_1}$, $b=2^{m_2}5^{n_2}$ и $c=2^{m_3}5^{n_3}$ за m_i,n_i ненегативни цели броеви $i=1,2,3$. Од условот на задачата имаме :

$$\max\{m_1,m_2\}=3,\ \max\{m_2,m_3\}=4,\ \max\{m_3,m_1\}=4 \quad (1)$$

$$\max\{n_1,n_2\}=3,\ \max\{n_2,n_3\}=3,\ \max\{n_3,n_1\}=3 \quad (2).$$

Од (1) добиваме дека $m_3=4$, $m_1=3$ или $m_2=3$, ако еден е 3 додека другиот може да биде 0,1,2,3. Постојат такви 7 подредени тројки $(0,3,4),(1,3,4),(2,3,4),(3,0,4),(3,1,4),(3,2,4),(3,3,4)$.

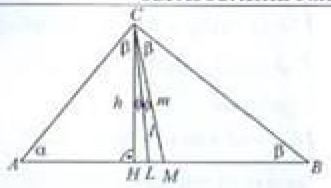
Од (2) добиваме дека два од n_1, n_2, n_3 се 3 додека другиот може да биде 0,1,2,3. Бројот на такви подредени тројки е 10. Тоа се

$(3,3,0),(3,3,1),(3,3,2),(3,0,3),(3,1,3),(3,2,3),(0,3,3),(1,3,3),(2,3,3),(3,3,3)$. Бидејќи изборот на тројките (m_1,m_2,m_3), (n_1,n_2,n_3) е независен, добиваме дека бројот на тројки (a,b,c) се $7\cdot 10=70$.

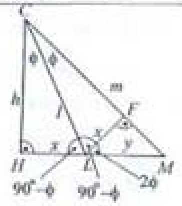
4. Даден е правоаголен триаголник ABC, таков што за катетите AC и BC важи $\overline{AC}<\overline{BC}$. Должината на тежишната линија и висината спуштени кон хипотенузата во тој триаголник се m и h, соодветно. Пресметај ја должината на симетралата на правиот агол.

решение: Бидејќи $\triangle ABC$ е правоаголен, следува дека $\overline{CM}=m=\overline{BM}$ т.е. $\triangle BMC$ е рамнокрак (цртеж 1), па $\angle BCM=\beta=\angle ABC$. Очигледно и $\angle ACH=\beta$ (од правоаголниот триаголник AHC). Бидејќи $\beta<45°$ (затоа што $\overline{AC}<\overline{BC}$) следува дека симетралата CL на $\angle HCM$ е истовремено симетрала на аголот ACB па тогаш е јасно дека

$$\angle HCL=\angle MCL=\phi=45°-\beta.$$



цртеж 1



цртеж 2

Нека $x=\overline{HL}$ и $y=\overline{LM}$ и нека F е подножјето на нормалата спуштена од L на CM (цртеж 2). Заради $\Delta CHL\cong\Delta CFL$ добиваме $\overline{LF}=x$. Притоа, $\Delta HMC\sim\Delta FML$, па имаме:

$$m:h=y:x,\ \text{т.е. } y=\frac{mx}{h}.$$

Понатаму, од правоаголниот $\triangle HCM$ наоѓаме:

$$h^2+(x+y)^2=m^2;\ h^2+\left(x+\frac{mx}{h}\right)^2=m^2 \text{ т.е. } x^2=h^2\cdot\frac{m-h}{m+h}.$$

Конечно, од правоаголниот $\triangle HLC$ добиваме:

$$l^2=h^2+x^2=h^2+h^2\frac{m-h}{m+h}=h^2\frac{2m}{m+h} \text{ т.е. } l=h\sqrt{\frac{2m}{m+h}}.$$

2 година

1. Дадена е квадратната равенка $3a^2x^2+10a\sqrt{b}x+3b=0$, $b>0, a\neq 0$. Докажи дека ако корените на равенката, x_1 и x_2, го задоволуваат условот $3(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1)$, тогаш тие не зависат од a и b.

Решение. Од $3(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1)$ имаме $3(-\frac{10a\sqrt{b}}{3a^2})=5(\frac{3b}{3a^2}+1)$, $-\frac{2a\sqrt{b}}{a^2}=\frac{b}{a^2}+1$, односно $-2a\sqrt{b}=b+a^2$ и оттука $(\sqrt{b}+a)^2=0$. Значи, $\sqrt{b}+a=0$, т.е. $a=-\sqrt{b}$. Тогаш, ја добиваме равенката $3bx^2-10bx+3b=0$, $3x^2-10x+3=0$, чиишто решенија се $\frac{1}{3}$ и 3, па корените не зависат од a и b.

2. Докажи дека за комплексен број z, ако $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогаш $|z^2+1|\geq 1$.

Решение. Да претпоставиме дека постои комплексен број z таков што $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $|z^2+1|<1$.

Нека $z=a+bi$. Тогаш $z+1=a+1+bi$ и $z^2+1=a^2-b^2+1+2abi$.

Од $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ добиваме

$$(a+1)^2+b^2<\frac{1}{2}\Leftrightarrow a^2+2a+1+b^2<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2a^2+4a+2+2b^2<1\Leftrightarrow 2b^2<-2a^2-4a-1. \ (1)$$

Од $|z^2+1|<1$ добиваме

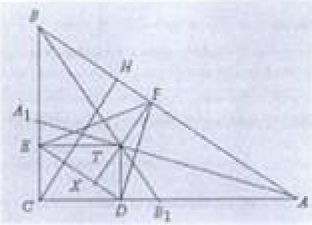
$$\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2<1\Leftrightarrow a^4+b^4+1-2a^2b^2+2a^2-2b^2+4a^2b^2<1\Leftrightarrow$$

$$a^4+b^4+1+2a^2b^2+2a^2-2b^2<1\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)^2<2b^2-2a^2. \ (2)$$

Ако оценката на $2b^2$ од (1) ја замениме во (2) добиваме

$$\left(a^2+b^2\right)^2<-2a^2-4a-1-2a^2\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)^2+4a^2+4a+1<0\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)^2+(2a+1)^2<0.$$

Последното неравенство не е можно. Следува за секој комплексен број z, ако $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогаш $|z^2+1|\geq 1$.



3. Даден е правоаголен триаголник ABC со плоштина P. Изрази ја преку P, плоштината на триаголникот чии темиња се ортогоналните проекции на тежиштето врз страните на триаголникот.

Решение. Нека D, E и F се ортогонални проекции на тежиштето T врз страните AC, BC и AB, соодветно. Четириаголникот $CDTE$ е правоаголник и оттука добиваме $\overline{CD}:\overline{CA}=\overline{A_1T}:\overline{A_1A}=1:3$ и $\overline{CE}:\overline{CB}=\overline{B_1T}:\overline{B_1B}=1:3$. Оттука следува дека DE и AB се паралелни и $\overline{DE}=\frac{\overline{AB}}{3}$. Ако FX е нормала на DE, т.е. на AF, тогаш FX и CH се паралелни и $\overline{FX}=\frac{2}{3}\overline{CH}$. Затоа, плоштината на триаголникот EDF е $\frac{\overline{ED}\cdot\overline{FX}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot 2\overline{CH}}{2\cdot 3\cdot 3}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{3\cdot 3}=\frac{2}{9}P$.

4. Во множеството на реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}.$$

Решение. Треба: $5x^2+14x+9=5(x+1)\left(x+\frac{9}{5}\right)\geq 0$, $x^2-x-20=(x-5)(x+4)\geq 0$ и $x+1\geq 0$, па добиваме дека дефиниционата област е $x\geq 5$.

$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$, $\sqrt{(5x+9)(x+1)}=\sqrt{(x-5)(x+4)}+5\sqrt{x+1}$,

$2x^2-5x+2=5\sqrt{(x-5)(x+4)(x+1)}$,

$2(x^2-4x-5)+3x+12=5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)}$,

$2(x-5)(x+1)+3(x+4)=5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)}$,

$\frac{2(x-5)(x+1)+3(x+4)}{x+4}=\frac{5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)}}{x+4}$,

$\frac{2(x-5)(x+1)}{x+4}+3=5\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}$.

Ако $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=y$, тогаш $2y^2-5y+3=0$ и добиваме $y_1=\frac{3}{2}, y_2=1$. Од $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=\frac{3}{2}$, добиваме $\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}=\frac{9}{4}$, $4(x-5)(x+1)=9(x+4)$, $4x^2-25x-56=0$ и оттука

$x_{1/2}\frac{25\pm\sqrt{625+896}}{8}$, т.е. $x_1=8$, $x_2=-\frac{7}{4}$. Од $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=1$, $\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}=1$, $(x-5)(x+1)=x+4$, $x^2-5x-9=0$ и оттука $x_{3/4}\frac{5\pm\sqrt{25+36}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$. Значи, решенија на равенката се 8 и $\frac{5+\sqrt{61}}{2}$.

3 година

1. Реши ја неравенката $\frac{9^x-5\cdot 15^x+4\cdot 25^x}{-9^x+8\cdot 15^x-15\cdot 25^x}<0$.

Решение. Неравенката ќе ја запишеме во облик $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x+4}{-\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}+8\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-15}<0$, а со смената $\left(\frac{3}{5}\right)^x=t$ во поедноставен облик $\frac{t^2-5t+4}{-t^2+8t-15}<0$. По разложувањето на квадратните триноми последната неравенка е еквивалентна со $\frac{(t-1)(t-4)}{-(t-3)(t-5)}<0$. Решенијата на последната неравенка $\frac{(t-1)(t-4)}{(t-3)(t-5)}>0$ се зададени со $t\in(0,1)\cup(3,4)\cup(5,\infty)$ односно по x со

$$x\in(-\infty,\log_{\frac{3}{5}}5)\cup(\log_{\frac{3}{5}}4,\log_{\frac{3}{5}}3)\cup(0,\infty).$$

2. Докажи дека во секој правоаголен триаголник важи неравенството $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\frac{2ab}{c^2}$, каде α и β се острите агли, a и b се должините на катетите, додека c е должината на хипотенузата.

Решение. Од неравенството кое важи помеѓу аритметичката и геометриската средина за позитивните броеви $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ (аглите се остри по услов, па $\sin\alpha,\sin\beta>0$) имаме $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\geq\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$, а од тука следува дека $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$. Бидејќи $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ и $\sin\beta=\frac{b}{c}$, од последното неравенство следи и $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$, односно $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\frac{2ab}{c^2}$.

3. На страната BC на триаголникот ABC редоследно лежат точките N, L, M, при што N е најблиску до B и AN е висина, AL симетрала на $\angle CAB$ и AM е тежишната линија. Ако се знае дека $\angle NAB=\angle LAN=\angle MAL=\angle CAM$, најди ги аглите на триаголникот.