Регионален натпревар по математика, 14.II-2015 година

I година

1АБ (Збирка задачи од И. Јанев) Ако $xyz = 1$, докажи дека

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=4.$$

Решение.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=$$

$$=\left(x+yz\right)^2+\left(y+xz\right)^2+\left(z+xy\right)^2-\left(x+yz\right)\left(y+xz\right)\left(z+xy\right)= \text{(10 поени)}$$

$$=x^2+2xyz+y^2z^2+y^2+2xyz+x^2z^2+z^2+2xyz+x^2y^2-$$

$$-\left(xyz+x^2y^2+x^2z^2+x^3yz+y^2z^2+xy^3z+z^2+xyz\right)=\text{(10 поени)}$$

$$=6+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2-\left(2+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2\right)=$$

$= 4$ (5 поени)

2АБ (Сигма 104, стр. 32, зад. 265)

Нека a и b се природни броеви такви што бројот 24 е делител на бројот $ab+1$. Докажи дека $a+b$ е делив со 24.

Решение. Броевите 3 и 8 се заемно прости. Доволно е да се докаже дека $a+b$ е делив со 3 и 8. **(5 поени)**

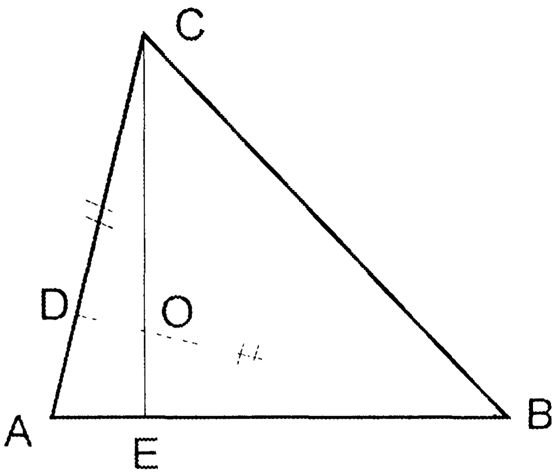
Од условот на задачата бројот ab при делење со 3 има остаток 2. Тоа е можно ако бројот a при делење со 3 има остаток 2 а бројот b при делење со 3 има остаток 1 или обратно. Во секој случај добиваме дека $3 \mid a+b$. **(5 поени)**

Исто така, од условот на задачата бројот ab при делење со 8 има остаток 7. Тоа е можно во два случаи.

Случај 1. Бројот a при делење со 8 има остаток 1 а бројот b при делење со 8 има остаток 7 или обратно. Во двете можности $8 \mid a+b$. **(5 поени)**

Случај 2. Бројот a при делење со 8 има остаток 3 а бројот b при делење со 8 има остаток 5 или обратно. Во двете можности $8 \mid a+b$. **(5 поени)**

Од добиените релации $3 \mid a+b$ и $8 \mid a+b$, како што веќе кажавме, $(3,8)=1$ добиваме $24 \mid a+b$, што требаше да се докаже. **(5 поени)**



3А. Висините на остроаголниот триаголник ABC се сечат во точката O, при што $\overline{OC}=\overline{AB}$. Колкав е аголот ACB ?

Решение: Нека подножјето на висината од B ја означиме со D, а на онаа од C со E. Тогаш триаголникот ABD е складен со триаголникот OCD (правоаголни, $\overline{OC}=\overline{AB}$ од условот на задачата, и $\measuredangle ABD=\measuredangle ACE$ како агли со нормални краци). **(10 поени)** Од овде $\overline{BD}=\overline{CD}$, па триаголникот BCD е рамнокрак правоаголен. **(10 поени)** Така, $\measuredangle DCB=\measuredangle CBD=45°$ па бараниот агол е 45. **(5 поени)**

3Б. Бојан му вели на Павел: "Јас имам 2 пати повеќе години отколку што имаше ти кога јас имав толку години колку што имаш ти сега. Кога ти ќе имаш толку години колку јас сега, тогаш збирот на нашите години ќе е 63." Колку години има секој од нив?

Решение. Ако со x ги означиме годините на Бојан, а со y годините на Павел, тогаш од условите на задачата го составуваме следниов систем линеарни равенки:

$$\begin{cases} x = 2\left(y - (x-y)\right) & \text{(5 поени)} \\ x + \left(x + (x-y)\right) = 63 & \text{(5 поени)} \end{cases}$$

или $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3x - y = 63 \end{cases}$ **(5 поени)**. Ако го решиме овој систем **(5 поени)**, добиваме дека Бојан има 28 години, а Павел 21 година. **(5 поени)**

4А. Најди го најголемиот природен број којшто е помал од збирот на квадратите на своите цифри.

Решение. Нека $\overline{a_n ... a_1 a_0}$ е бараниот број, односно $a_n \cdot 10^n + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 < a_n^2 + ... + a_1^2 + a_0^2$. Тогаш $a_n(10^n - a_n) + ... + a_1(10 - a_1) + a_0(1 - a_0) < 0$ **(5 поени).** Сите собироци освен последниот на левата страна се позитивни, а $a_0(1-a_0) \geq -72$ **(5 поени).** Ако барем една цифра a_k за $k \geq 2$ е различна од нула(бројот е барем трицифрен), тогаш $a_k(10^k - a_k) > 10^k - 9 > 90$, а тоа значи дека сумата од левата страна е позитивна **(10 поени).** Според тоа, тој број мора да е помал од 100. Бидејќи $99 < 9^2 + 9^2$ тој број (99) е бараното решение **(5 поени).**

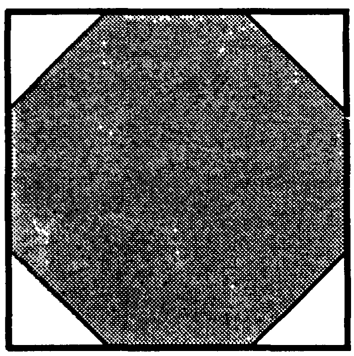
4Б Плоштината на основата на една права триаголна призма е 4cm^2, а плоштините на бочните површини се 9, 10 и 17 cm^2. Определи го волуменот на призмата.

Решение: Нека a, b, c се должините на страните на основата на призмата, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ е полупериметарот на основата а h е нејзината висина. Од условот имаме $a = \dfrac{9}{h}$, $b = \dfrac{10}{h}$, $c = \dfrac{17}{h}$ и $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 4$. **(10 поени)** Ако вредностите за a,b,c ги замениме во последното равенство имаме $\sqrt{\dfrac{18}{h} \cdot \dfrac{9}{h} \cdot \dfrac{8}{h} \cdot \dfrac{1}{h}} = 4 \quad \Rightarrow \quad 16h^2 = 18 \cdot 9 \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 9^2 \quad \Rightarrow \quad h = 9.$ **(10 поени)**

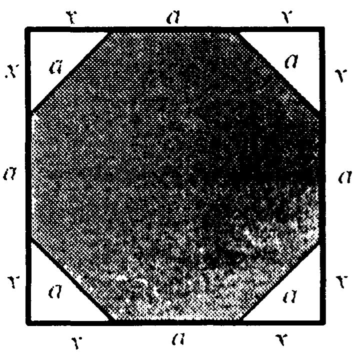
Добиваме $V = Bh = 4 \cdot 9 = 36sm^2$. **(5 поени)**

II Година

1 АБ. (Сигма 103, зад. 1352) Правилен осумаголник со должина на страна a е впишан во квадрат сострана 1, како што е прикажано на цртежот. Докажи дека $a^2 + 2a = 1$.



Решение. Квадратот е составен од осумаголник и четири рамнокраки правоаголни триаголници, со хипотенуза a и



катети $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ **(5 поени)**. Според тоа, од страната на квадратот имаме $a + 2\dfrac{a}{\sqrt{2}} = 1$,

$a\left(\sqrt{2}+1\right) = 1$, т.е. $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}-1$ **(10 поени)**. Сега,

$a^2 + 2a = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}-1\right) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} - 2 = 1$, што требаше да се докаже **(10 поени)**.

2 А. Кога секој корен на равенката $x^2 + px + q = 0$ ќе се зголеми за 1, се добиваат корените на равенката $x^2 - p^2x + pq = 0$. Определи ги p и q.

Решение. Од Виетовите формули за првата равенка имаме $\alpha + \beta = -p$ и $\alpha\beta = q$ **(3 поени)**, а за втората, согласно условот на задачата, $\alpha + \beta + 2 = p^2$ и $(\alpha+1)(\beta+1) = pq$ **(5 поени).** Тогаш, $p^2 + p - 2 = 0$ и

$q+p^2-1=pq$ **(5 поени)**. Од првата равенка добиваме $p_1=1, p_2=-2$ **(3 поени)**, а втората е еквивалентна со $(p-1)q=p^2-1$ **(3 поени)**. Ако $p=1$, тогаш q е произволен реален број **(3 поени)**. Ако $p=-2$ тогаш $q=-1$ **(3 поени)**.

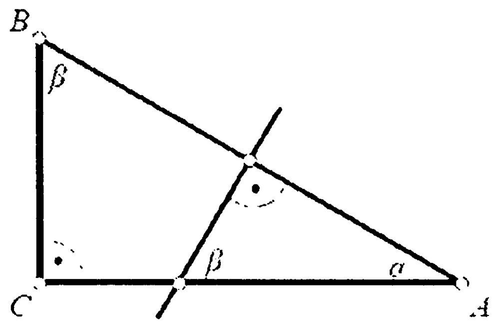
2 Б. Кога секој корен на $x^2+3x-7=0$ ќе се зголеми со реципрочната вредност на другиот корен, се добиваат корените на равенката $2x^2+ax+b=0$. Определи ги a и b.

Решение. Нека α и β се корените на $x^2+3x-7=0$. Тогаш за нив важи $\alpha+\beta=-3$ и $\alpha\beta=-7$ **(5 поени)**. Според условот, корени на $2x^2+ax+b=0$ се $\alpha+\frac{1}{\beta}$ и $\beta+\frac{1}{\alpha}$ **(5 поени)**. Тогаш:

$$a=-2\left(\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(-(-3)-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=2\left(3-\frac{-3}{-7}\right)=\frac{36}{7}$$ и

$$b=2\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2\right)=2\left(-7-\frac{1}{7}+2\right)=-\frac{72}{7}$$ **(15 поени)**.

3 АБ. (Сигма 102, зад. 1325) Во правоаголниот триаголник ABC на катетата AC е избрана точка M така што $\overline{AM}=2\overline{MC}$. Определи го најмалиот агол на триаголникот ABC, ако M лежи на симетралата на хипотенузата AB.



Решение. Со O ќе ја означиме средината на хипотенузата AB. Од условот на задачата правата OM е симетрала на AB. Јасно е дека триаголникот OMA е сличен со триаголникот BCA (имаат исти агли) **(5 поени)**. Ќе воведеме стандардни ознаки $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$. Тогаш, повторно од условот на задачата, $\overline{OA}=\frac{1}{2}c$ и $\overline{AM}=\frac{2}{3}b$, заради погорната сличност имаме

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}b}{c}=\frac{\frac{1}{2}c}{b} \Rightarrow \frac{1}{2}c^2=\frac{2}{3}b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{c^2}=\frac{3}{4}$$ **(10 поени)**. Бидејќи триаголникот ABC е правоаголен, имаме $\cos^2\alpha=\frac{b^2}{c^2} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha=30$ **(8 поени)** Според тоа, агли е во триаголникот се 30, 60, 90, а најмалиот меѓу нив има 30 **(2 поени)**

4 А. Реши го системот $\begin{cases} xyz=x+y+z \\ yzt=y+z+t \\ ztu=z+t+u \\ tux=t+u+x \end{cases}$ во множеството реални броеви

Решение. Ако од првата равенка ја одземеме втората, добиваме $yz(x-t)=x-t$, односно $(yz-1)(x-t)=0$ **(3 поени)**. Можни случаи се $yz-1=0$ или $x-t=0$ **(2 поени)**. Ако $yz-1=0$, со замена во првата равенка добиваме $0=y+z$. Тогаш, од $yz-1=0$ и $y+z=0$ следува дека $y^2=-1$, па во овој случај нема решение **(7 поени)**. Затоа, важи $x-t=0$, т.е. $x=t$ **(2 поени)**. Ако се повтори постапката со втората и третата равенка, како и со третата и четвртата добиваме $x=t=y=z$ **(3 поени)** Тогаш, $x^3=3x$, $x(x^2-3)=0$ **(5 поени)** и оттука множеството решенија на системот е $\{(0,0,0,0),(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})\}$ **(3 поени)**

4 Б. Реши го системот $\begin{cases}\dfrac{3xy}{x+y}=5\\ \dfrac{2xz}{x+z}=3\\ \dfrac{yz}{y+z}=4\end{cases}$ во множеството реални броеви. .

Решение. Бидејќи $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$, дадениот систем е еквивалентен со $\begin{cases}\dfrac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=5\\ \dfrac{2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}=3\\ \dfrac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}=4\end{cases}$, односно со $\begin{cases}\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{3}{5}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\end{cases}$ **(8 поени)**. Тогаш, ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{15}$ **(2 поени)**. Од $\begin{cases}\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{15}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}\end{cases}$ добиваме $\begin{cases}\frac{1}{z}=\frac{19}{120}\\ \frac{1}{y}=\frac{11}{120}\end{cases}$ **(8 поени)**. Тогаш $\frac{1}{x}=\frac{3}{5}-\frac{11}{120}=\frac{61}{120}$ **(2 поени)**. Конечно, $x=\frac{120}{61}$, $y=\frac{120}{11}$ и $z=\frac{120}{19}$ **(5 поени)**.

III година

АБ1. $\Sigma 98$**, задача 1271**

За реалните броеви $x,\ y\in(0,\pi)$ е исполнето равенството

$$\cos 2x\cos y-\cos 2y\cos x=\cos y-\cos x.$$

Докажи дека $x=y$.

Решение. Не е тешко да се види дека даденото равенство може да се запише во облик

$$\cos y(1-\cos 2x)-\cos x(1-\cos 2y)=0. \ \textbf{(5)}$$

Заради равенствата $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ и $1-\cos 2y=2\sin^2 y$, последното равенство го добива обликот $\cos y\sin^2 x-\cos x\sin^2 y=0$, **(5)** а заради основната тригонометриска релација, во облик

$$\cos y\cos^2 x-\cos x\cos^2 y=\cos y-\cos x$$

$$\cos y\cos x(\cos x-\cos y)=\cos y-\cos x\ .\textbf{(5)}$$

Конечно тоа може да се запише во облик $(\cos y-\cos x)(\cos x\cos y+1)=0$.

Но, $x,y\in(0,\pi)$, па $\cos x\cos y+1>0$, и според тоа

$$\cos y-\cos x=0, \quad \textbf{(5)} \qquad (1)$$

т.е. $\cos x=\cos y$. Функцијата $f(t)=\cos t$ на интервалот $(0,\pi)$ е монотоно опаѓачка, па равенството $\cos x=\cos y$ е можно само ако $x=y$. **(5)**

Забелешка. Решението од (1) може да продолжи со примена на равенството

$$\cos y-\cos x=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}.$$

А2. Нека важи $0<x<1$ и $a,b>0$. Докажи дека $a^x b^{1-x}<a+b$.

Решение. Да го означиме бараното неравенство $a^x b^{1-x}<a+b$ со (1). Претпоставуваме дека $b\le a$ **...(5)**

Ако го поделиме неравенството (1) со a, добиваме $\left(\frac{b}{a}\right)^{1-x}<1+\frac{b}{a}$, односно $\left(\frac{b}{a}\right)^{1-x}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\right)<1$.....(2)

Со оглед на тоа дека $0<\frac{b}{a}\le 1$ и $0\le 1-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}<1$, неравенството (2) е точно, а со тоа и еквивалентното неравенство (1) во случај кога $b\le a$ **...(10)** Нека сега $a<b$. Го делиме неравенството (1) со b и добиваме $\left(\frac{a}{b}\right)^{x}<1+\frac{a}{b}$, односно $\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{1-x}\right)<1$.....(3). Од тоа што $0<\frac{a}{b}<1$, важи и $0<\left(\frac{a}{b}\right)^{x}<1$ и $0<1-\left(\frac{a}{b}\right)^{1-x}<1$, па сигурно важи неравенството (3), а со тоа и неравенството (1) **...(10)**

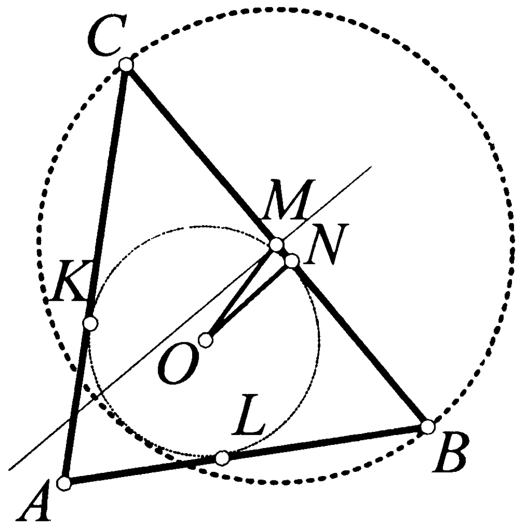
А3. Реши ја равенката $\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x=2$

Решение: Равенката ќе ја запишеме во следниов облик $\sin^5 x+\cos^5 x=2-\sin^4 x$. Да забележиме дека $\cos^5 x\le\cos^2 x$, $\sin^5 x\le\sin^2 x$. Оттука добиваме дека левата страна на последното равенство $\sin^5 x+\cos^5 x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$**....(10)** Од друга страна, имено десната $2-\sin^4 x\ge 1$, па дадената равенка е еквивалентна на системот равенки. $\begin{cases}\sin^5 x+\cos^5 x=1\\ 2-\sin^4 x=1\end{cases}$ **...(10)**

За $\sin x=\pm 1$ добиваме дека $\cos^5 x=0$ или $\cos^5 x=2$. Од последниве равенки ги добиваме бараните решенија во облик $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$**....(5)**

АБ4. Σ103**, задача 273**

Страната BC на триаголникот ABC има должина a а радиусот на впишаната кружница r. Определи ја плоштината на триаголникот, ако впишаната кружница ја допира кружницата со дијаметар BC.



Решение. Нека O е центар на впишаната кружница, а M е средина на отсечката BC. Нека кружницата k впишана во триаголникот ABC ги допира страните AC,AB и BC во точките K,L и N соодветно. Ќе воведеме ознаки $\overline{AK}=\overline{AL}=x$, $\overline{CK}=\overline{CN}=y$ и $\overline{BL}=\overline{BN}=z$. Притоа, од условот на задачата имаме $\overline{OM}=\frac{a}{2}-r$ и $y+z=a$. **(5)** Но тогаш

$\overline{NM}=\sqrt{\overline{OM}^2-\overline{ON}^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-r\right)^2-r^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-ar}$, од каде што следува дека едната од отсечките y и z има должина $\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-ar}$ а другата $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-ar}$. **(5)**

Од Хероновата формула имаме $P=\sqrt{(x+y+z)xyz}$, а од формулата за пресметување на плоштина $P=pr$, каде $p=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$, имаме $P=(x+y+z)r$. **(5)** Според тоа

$$\sqrt{(x+y+z)xyz}=(x+y+z)r, \qquad xyz=(x+a)r^2, \qquad arx=(x+a)r^2 \quad \textbf{(5)}$$

Од последното равенство имаме $x=\frac{ar}{a-r}$, па за плоштината добиваме

$$P=(x+y+z)r=(x+a)r=\left(\frac{ar}{a-r}+a\right)r=\frac{a^2r}{a-r},$$ што требаше да се определи. **(5)**

Б2. Реши ја равенката $\log_{\frac{1}{8}}(2x)-4\log_{\frac{1}{4}}x\cdot\log_8 x=0$.

Решение. Имајќи во предвид дека $\log_{\frac{1}{8}}(2x)=\log_{\frac{1}{8}}2+\log_{\frac{1}{8}}x=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}x$, $\log_{\frac{1}{4}}x=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x$ и $\log_8 x=-\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}x$...**(10)**, равенката можеме да ја запишеме во обликот $2\log^2_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}x-1=0$.

Решенијата на квадратната равенка која одговара на горната равенка се: $\log_{\frac{1}{2}}x_1=\frac{1}{2}$ и $\log_{\frac{1}{2}}x_2=-1$,...**(5)**

од каде за решенијата на првата равенка имаме: $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2=2$....**(10)**

Б3. Реши ја неравенката $\frac{1}{2^{2x}+3}\geq\frac{1}{2^{x+2}-1}$.

Решение. Левата страна на неравенката е дефинирана и позитивна за секој реален број x, додека десната страна е дефинирана за секој број $x\neq-2$, при што изразот може да добие и негативни вредности...**(5)**. Тогаш

1 Ако десната страна е негативна односно ако $2^{x+2}<1$, неравенството е исполнето за секое $x<-2$...**(5)**

2 Ако $x>-2$ тогаш равенката е еквивалентна со следнава неравенка

$$2^{2x}+3\leq 2^{x+2}-1,\text{ односно } 2^{2x}-4\cdot 2^x+4\leq 0.$$

Ако се изврши замена $2^{2x}=t$, неравенката го добива обликот

$$t^2-4t+4\leq 0 \text{ или } (t-2)^2\leq 0.$$

Нејзино единствено решение е $t=2$ односно $x=1$....**(10)**

Конечното решение на почетната неравенка е $x\in(-\infty,-2)\cup\{1\}$....**(5)**

IV Година

1А. Одреди го 2015-от член во низата 1, 2, -2, 3, -3, 3, 4, -4, 4, -4, 5, -5, 5, -5, 5, 6,-6, 6, -6,6, -6,...

Решение.

Нека 2015-от член во низата е бројот k. Да забележиме дека последното појавување во низата на број со апсолутна вредност 2 има реден број 3; на број со апсолутна вредност 3 има реден број 6; на број со апсолутна вредност 4 има реден број 10 и.т.н.**(5)**

Последното појавување на број чија апсолутна вредност е k има реден број $\frac{k(k+1)}{2}$.**(10)**

Бидејќи $\frac{62\cdot 63}{2}=1953$ и $\frac{63\cdot 64}{2}=2016$, следува дека на 2015-та позиција во низата е бројот $(-1)^{2015-1953+1}63=-63$.**(10)**

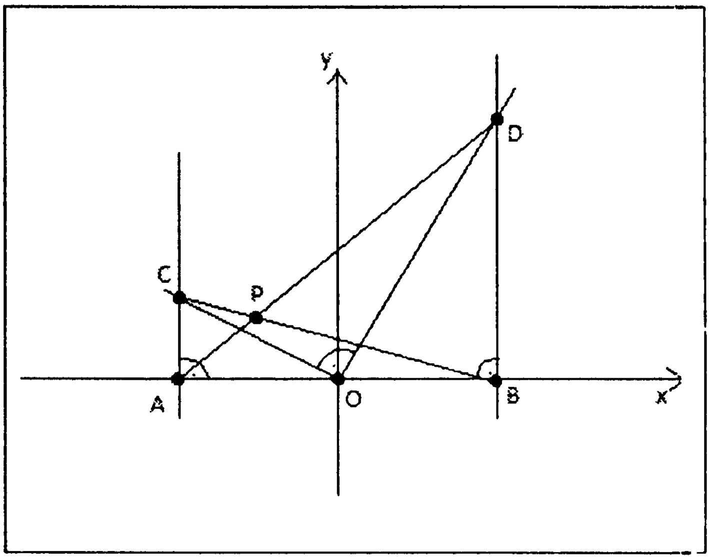
1Б. Пресметај го производот $P=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$.

Решение. Множејќи ги двете страни на равенството со $1-\frac{1}{2}$, добиваме $\left(1-\frac{1}{2}\right)P=1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}$.**(20)**

Оттука следува дека $P=2\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)$.**(5)**

2А. Дадени се точките A(-2, 0) и B(2, 0). Точките C и D припаѓаат на нормалите на отсечката AB во точките A и B соодветно, при што аголот COD е прав. Одреди го геометриското место на точки на пресекот на правите AD и BC.

Решение.



Нека точката C има координати C(-2, c). Равенката на правата OC е $y=-\frac{c}{2}x$.**(3)**

Бидејќи аголот COD е прав, равенката на правата OD е $y=\frac{2}{c}x$ и точката D има координати $D\left(2,\frac{4}{c}\right)$.**(6)**

Равенката на правата AD е $y=\frac{1}{c}\left(x+2\right)$, додека на правата BC е $y=-\frac{c}{4}\left(x-2\right)$.**(5)**

Координатите на пресечната точка P, на правите AD и BC, се решение на системот $\begin{cases} y=\frac{1}{c}\left(x+2\right) \\ y=-\frac{c}{4}\left(x-2\right)\end{cases}$. **(3)**

Со елиминација на параметарот c од равенките, се добива равенката $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.**(6)**

Од **произволноста на c**, следува дека геометриското место е **елипсата** $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.**(2)**

2Б. Нека S_n, S_{2n}, S_{3n} се сумите на првите $n, 2n, 3n$ членови на аритметичка прогресија, соодветно. Докажи дека $S_{3n}=3\left(S_{2n}-S_n\right)$

Решение. $a_{2n}=a_1+(2n-1)d=a_1+(n-1)d+nd=a_n+nd$ **(5)**

$a_{3n}=a_1+(3n-1)d=a_1+(n-1)d+2nd=a_n+2nd$ **(5)**

$S_n=\frac{n}{2}\left(a_1+a_n\right)$,

$S_{2n}=\frac{2n}{2}\left(a_1+a_{2n}\right)=n\left(a_1+a_n+nd\right)=n\left(\frac{2S_n}{n}+nd\right)=2S_n+n^2d$, **(5)**

$S_{3n}=\frac{3n}{2}\left(a_1+a_{3n}\right)=\frac{3n}{2}\left(a_1+a_n+2nd\right)=\frac{3n}{2}\left(\frac{2S_n}{n}+2nd\right)=3S_n+3n^2d$

$3\left(S_{2n}-S_n\right)=3\left(2S_n+n^2d-S_n\right)=3\left(S_n+n^2d\right)=S_{3n}$ **(5)**

3АВ (сигма 101, задача **1308**). Докажи дека за секој природен број $n\geq 2$, постојат различни природни броеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такви што $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2013}$

Решение. Задачата ќе ја докажеме со методот на математичка индукција. Имаме $\frac{1}{2013}=\frac{1}{3\cdot 671}=\frac{1}{674}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{671}\right)=\frac{1}{3\cdot 674}+\frac{1}{671\cdot 674}$, равенството важи за $n=2$. **(5)** Нека тврдењето важи за $n=k$, односно постојат различни природни броеви x_1, x_2 , ..., x_k, такви што $\frac{1}{2013}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_k}$. **(5)** Тогаш $\frac{1}{2013}=\frac{1}{4026}+\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2}+...+\frac{1}{2x_k}$. **(10)**

Јасно $x_i\neq 2013$ односно $2x_i\neq 4026$ за сите $i=1,2..,n$ и $2x_1$, $2x_2$, ..., $2x_k$ се различни природни броеви. Следува тврдењето важи и за $n=k+1$.

Сега, според принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој природен број $n\in\mathbb{N}$. **(5)**

4АБ (сигма 104, задача 1358). Нека a,b,c се попарно различни реални броеви. Докажи дека

$$(x-a)(x-b)=x-c$$

барем една од равенките $(x-b)(x-c)=x-a$ има реални решенија.

$$(x-c)(x-a)=x-b$$

Решение 1. Ќе ги разгледаме квадратните функции

$$f_1(x)=(x-a)(x-b)-(x-c)$$
$$f_2(x)=(x-b)(x-c)-(x-a)$$
$$f_3(x)=(x-c)(x-a)-(x-b)\ . \qquad (10)$$

Нека тврдењето на задачата не е точно. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ немаат корени. Но тогаш, бидејќи најстарите коефициенти им се единици, добиваме дека $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Од особините на реални броеви имаме $f_1(x)+f_2(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$. **(5)**

Од друга страна

$$f_1(x)+f_2(x)=(x-a)(x-b)-(x-c)+(x-b)(x-c)-(x-a)=$$
$$=(x-b)[(x-a)+(x-c)]-[(x-a)+(x-c)]$$
$$=[2x-(a+c)](x-b-1) \qquad (5)$$

има реални корени $x_{01}=b+1$ и $x_{02}=\frac{a+c}{2}$. Значи, не е исполнето $f_1(x_{01})>0$ и $f_2(x_{01})>0$, односно $f_1(x_{02})>0$ и $f_2(x_{02})>0$. Заради добиената контрадикција, постојат два полиноми, односно имаме две равенки кои имаат реален корен. **(5)**

Решение 2. Како и во претходното решение ќе претпоставиме дека на пример дека $f_2(x)$ и $f_3(x)$ немаат реални решенија.(10 поени од почетокот на решение 1) Тогаш нивните дискриминанти се негативни, т.е. $(b+c+1)^2-4(bc+a)<0$, т.е. $(b+c+1)^2<4(bc+a)$

$$(c+a+1)^2-4(ca+b)<0,\ \text{т.е. } (c+a+1)^2<4(ca+b).\ \ (5)$$

Истите неравенства ќе ги запишеме во облик
$$(b-c-1)^2<4a-4b$$
$$(c-a+1)^2<4b-4a\ . \qquad (5)$$

Броевите од десната страна се позитивни, а нивниот збир е еднаков на нула, што не е можно. **(5)**

Заради добиената контрадикција, добиваме дека барем две од дадените равенки имаат реални решенија.