1 година

1Б. (Збирка И.Јанев, стр.47, зад. 85)

Докажи дека секој шестцифрен број од видот $\overline{xyzxyz}$ е делив со 7, 11 и 13.

Решение. $\overline{xyzxyz} \overset{(10)}{=} 1000\overline{xyz} + \overline{xyz} \overset{(5)}{=} 1001\overline{xyz} \overset{(10)}{=} 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}$

1А. (Збирка И. Јанев, стр. 103, зад. 144) Ако $xyz = 1$ докажи дека

$$\frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1} = 1.$$

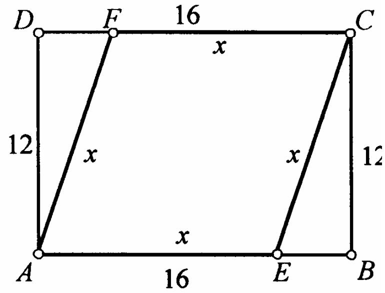
решение:

$$\frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1} \overset{(15)}{=} \frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} \cdot \frac{x}{x} + \frac{z}{zx+z+1} \cdot \frac{xy}{xy} =$$

$$= \frac{x}{xy+x+1} + \frac{xy}{xyz+xy+x} + \frac{xyz}{xyzx+xyz+xy} \overset{(5)}{=} \frac{x}{xy+x+1} + \frac{xy}{1+xy+x} + \frac{xyz}{x+1+xy} \overset{(5)}{=} \frac{xy+x+1}{xy+x+1} = 1$$

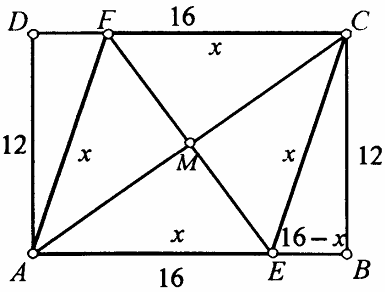
2АБ. (сигма 103, стр. 40, зад. 1355) На цртежот $ABCD$ е правоаголник со страни $AB = 16$ cm и $BC = 12$ cm. Точките E и F припаѓаат на страните AB и CD така што $AECF$ е ромб.

Колку е должината на неговата дијагонала EF?



Решение. Нека $AECF$ е ромб со страна x. **(5)** Според тоа, $AE = x$ и $EB = 16 - x$. **(5)** Бидејќи $ABCD$ е правоаголник, триаголникот EBC е правоаголен, па според Питагорина теорема имаме $EC^2 = EB^2 + BC^2$, т.е. $x^2 = 12^2 + (16-x)^2$.

Последната равенка можеме да ја запишеме во облик $x^2 = 144 + 256 - 32x + x^2$,



од каде добиваме $32x = 400$, т.е. $x = \frac{25}{2}$. **(5)** Сега можеме да продолжиме на два начини.

I начин. Јасно е дека дијагоналата AC на ромбот е и дијагонала на правоаголникот $ABCD$, па според тоа $AC^2 = 16^2 + 12^2 = 400$, односно $AC = 20$. **(5)**

Дијагоналите на ромбот се половат и се заемно нормални. Ако M е нивната пресечна точка, тогаш $FM = EM$, $AM = CM$ и

$$AE^2 = AM^2 + ME^2, \qquad \left(\frac{25}{2}\right)^2 = 10^2 + ME^2, \ \frac{625}{4} = 100 + ME^2,$$

$ME^2 = \frac{225}{4}$, т.е. $ME = \frac{15}{2}$. Сега е јасно дека $FM = 2ME = 2 \cdot \frac{15}{2} = 15\ cm$, што трербаше да се определи. **(5)**

II начин. Ќе ги употребиме плоштините на правоаголникот, ромбот и треиаголникот ΔEBC.**(5)** Бидејќи $EB = 16 - \frac{25}{2} = \frac{7}{2}$, а плоштината на ромбот е половина од производот на неговите дијагонали, добиваме

$$\frac{1}{2}EF \cdot AC = AB \cdot BC - 2\frac{1}{2}EB \cdot BC, \ \frac{1}{2}EF \cdot 20 = 16 \cdot 12 - \frac{7}{2} \cdot 12, \qquad \frac{1}{2}EF \cdot 20 = 192 - 42,$$

а од последната равенка имаме $EF = 15$, што требаше да се определи. **(5)**

3 АБ. Ако еден двоцифрен број се подели со збирот на своите цифри, се добива количник 5 и остаток 6, ако бројот запишан со истите цифри, но во оратен редослед се подели со разликата на тие цифри, се добива количник 12. Кој е тој број?

Решение. Бараниот број го означуваме со $\overline{ab} = 10a + b$. **(5)** Од условот на задачата $10a + b = 5(a+b) + 6$ и $10b + a = 12(a-b)$. **(10)** Од втората равенка имаме

$10b + a = 12(a-b)$

$10b + a = 12a - 12b$

$22b = 11a, \qquad b = \frac{11a}{22} = \frac{a}{2}$ **(5)**

Ако замениме во првата равенка, се добива

$10a + b = 5(a+b) + 6$

$10a+\frac{a}{2}=5a+5\frac{a}{2}+6$

$10a+\frac{a}{2}-5a-5\frac{a}{2}=6$

$10a-5a-2a=6$

$3a=6$

$a=2\Rightarrow b=1$

Па, бараниот број е 21. **(5)**

4Б. Ако $ab=5$, да се пресмета вредноста на изразот: $\frac{(a+b)^3-a^3-b^3}{a+b}$.

Решенне. $\frac{(a+b)^3-a^3-b^3}{a+b} \overset{(10)}{=} \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-a^3-b^3}{a+b}=\frac{3ab(a+b)}{a+b}=3ab=15$. **(15)**

4А. Дали е можно рабовите на коцка да се означат (нумерираат) со броевите 1,2,3,...,11,12, така што збирот на броевите придружени на три раба кои излегуваат од исто теме на коцката за сите темиња на коцката да е еднаков? Одговорот да се образложи.

решенне: Нека работ АВ е нумериран со некој број. Тогаш тој број ќе се појави во збирот и кај темето А и кај темето В. **(10)** На ист начин секој од броевите од 1 до 12 се појавува по два пати. **(5)** Значи, ако ги собереме сите 8 збирови кај сите темиња на коцката, ќе се добие бројот 2(1+2+3+...+12)=156. Ако сите 8 збира кои се придружени на осумте темиња на коцката се еднакви природни броеви, тогаш секој од нив е $\frac{156}{8}=\frac{39}{2}$ што не е можно, од каде следува дека предложеното означување не е можно. **(10)**

2 година

1А. Одредете ја вредноста на $x+\frac{1}{x}$ за $x=\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$.

Решение. Од $x=\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{1-5}=\frac{6+2\sqrt{5}}{-4}$ **(10) и**

$\frac{1}{x}=\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{1-2\sqrt{5}+5}{1-5}=\frac{6-2\sqrt{5}}{-4}$ **(10) добиваме**

$x+\frac{1}{x}=\frac{6+2\sqrt{5}}{-4}+\frac{6-2\sqrt{5}}{-4}=-3$. **(5)**

1Б. Одреди го реалниот број m така што решенијата x_1 и x_2 на квадратната равенка $x^2-(m+1)x+m=0$ да го задоволуваат равенството $x_1^2+x_2^2=10$.

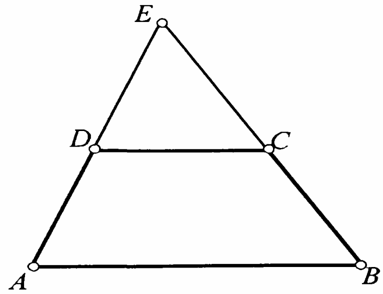
Решение. Да забележиме дека $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. **(10)** Па од Виетовите правила имаме $x_1^2+x_2^2=(m+1)^2-2m=m^2+1$. **(10)** Од овде добиваме $m^2+1=10$, односно $m=3$ или $m=-3$.**(5)**

2АБ. За кои вредности на параметарот a равенката $ax^2-(a-7)x+9=0$ има еднакви и негативни корени.

Решение. За да равенката има еднакви корени треба дискриминантата $D=0$ т.е. **(5)**

$$(a-7)^2-36a=0\Leftrightarrow a^2-14a+49-36a=0\Leftrightarrow a^2-50a+49=0\Leftrightarrow$$
$$(a-49)(a-1)=0\Leftrightarrow a=49,\ a=1.\ \textbf{(10)}$$

Тогаш корените се $x_1=x_2=\frac{a-7}{2a}$. **(5)** Притоа за $a=49$ корените се позитивни, додека за $a=1$ корените се негативни. Значи решението е $a=1$.**(5)**



3АБ. (Сигма 102, задача 1338). Основите на еден трапез се $a=25$ и $b=15$, еден од краците е $c=8$. Определи го периметарот и плоштината на трапезот ако збирот на аглите на поголемата основа е $90°$.

Решение. Нека $\overline{AD}=c=8$ и $\overline{DE}=x$, **(5)** каде E е пресек на краците на трапезот. Од сличноста $\Delta ABE\approx\Delta DCE$ имаме $\frac{25}{15}=\frac{8+x}{8}$. Од ова добиваме $x=12$. **(5)** Од условот на задачата $\angle AEB=90°$. **(5)** Од питагорова теорема за правоаголниот триаголник ΔDCE имаме $\overline{CE}=9$. Од питагорова теорема за правоаголниот триаголник ΔABE имаме $\overline{BE}=15$. Сега добиваме $\overline{BC}=6$. **(5)**Па за периметарот на трапезот имаме $L=54$. За плоштината на трапезот добиваме $P=P_{ABE}-P_{DCE}=150-54=96$. **(5)**

4А. (сигма 100, задача **1311).** Во множеството реални броеви, реши ја равенката

$$\sqrt{6x-y^2-4z+1}=\sqrt{y+4z^2}+\sqrt{9x^2+y+4}.$$

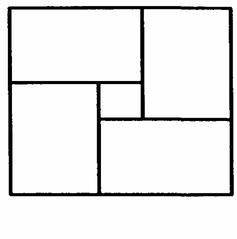
Решение. Со квадрирање на равенката добиваме

$$6x-y^2-4z+1=y+4z^2+2\sqrt{6x-y^2-4z+1}\sqrt{y+4z^2}+9x^2+y+4\ \textbf{(5)}$$

односно $(3x-1)^2+(y+1)^2+(2z+1)^2+2\sqrt{6x-y^2-4z+1}\sqrt{y+4z^2}=0$, **(10)**

Следува $x=\frac{1}{3}$, $y=-1$ и $z=-\frac{1}{2}$. **(5)**

Со проверка во првобитната равенка го верификуваме решението. **(5)**



4Б. (сигма 101, задача 1324). Квадратот даден на цртежот се состои од четири складни правоаголници и еден мал квадрат. Односот на плоштините на поглемиот и помалиот квадрат е $9+4\sqrt{5}$. Колкав е односот на страните на правоаголниците?

Решение. Со a и b ќе ги означиме должините на страните на поголемиот и помалиот квадрат соодветно, а со x и y ќе ги означиме должините на страните на правоаголникот($y>x$).**(5)** Од условот на задачата имаме

$$9+4\sqrt{5}=\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^2=(2+\sqrt{5})^2,$$ **(5)** па според тоа $\frac{a}{b}=2+\sqrt{5}$. **(5)**

Да забележиме дека $a=x+y$ и $y=b+x$. Но, тогаш $x=\frac{1}{2}(a-b)$ и $y=\frac{1}{2}(a+b)$, од каде добиваме

$$\frac{x}{y}=\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}=\frac{2+\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$ што требаше да се определи. **(10)**

3 година

1Б. За кои вредности на X, изразот $A = 24 - 12x - 2x^2$ има најголема вредност и колку изнесува?

Решение. Имаме $A = -2\left(x^2 + 6x - 12\right) = -2\left(\left(x+3\right)^2 - 21\right) = 42 - \left(x+3\right)^2$. **(15)** Следува A има најголема вредност за $x = -3$ и таа вредност е 42.**(10)**

1А. Докажи го неравенството $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.

Решение. Нека $x = \log_2 3$, јасно $x > 0$. **(5)** Тогаш $\log_3 2 = \dfrac{1}{\log_2 3} = \dfrac{1}{x}$. **(5)** Неравенството добива облик $x + \dfrac{1}{x} > 2$ што е еквивалентно со $x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0$. **(5)** Последново е точно за секое $x \neq 1$, **(5)** а тоа во случајот е задоволено затоа што $x = \log_2 3 \neq 1$.**(5)**

2А. Ако $\cos 2015^0 = a$, $tg2015^0 = b$, $ctg2015^0 = c$ подреди ги по големина a, b, c почнувајќи од најголемиот.

Решение. Со оглед на фактот дека $2015^0 = 5 \cdot 360^0 + 215^0$, **(5)** важат следните равенства:

$a = \cos 2015^0 = \cos 215^0 = \cos(180^0 + 35^0) = -\cos 35^0 < 0;$

$b = tg2015^0 = tg215^0 = tg35^0 < tg45^0 = 1, b = tg35^0 > 0;$

$c = ctg2015^0 = ctg35^0 = \dfrac{1}{tg35^0} > 1.$

(15)

Тогаш јасно, $c > b > a$. **(5)**

2Б. Пресметај ја вредноста на изразот $\left(1 - \sin\dfrac{\pi}{8}\right) \cdot \left(1 + \sin\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Решение. $\left(1 - \sin\dfrac{\pi}{8}\right) \cdot \left(1 + \sin\dfrac{\pi}{8}\right) \overset{(5)}{=} 1 - \sin^2\dfrac{\pi}{8} \overset{(5)}{=} \cos^2\dfrac{\pi}{8} \overset{(10)}{=} \dfrac{1 + \cos 2 \cdot \dfrac{\pi}{8}}{2} = \dfrac{1 + \cos\dfrac{\pi}{4}}{2} \overset{(5)}{=} \dfrac{\sqrt{2} + 2}{4}.$

3АБ. (сигма 98, задача 212). Во множеството реални броеви да се реши системот

$$\begin{cases} (x+y)^2 &= z \\ (z+x)^2 &= y. \\ (y+z)^2 &= x \end{cases}$$

Решение. Бидејќи $(x+y)^2, (y+z)^2, (z+x)^2 \geq 0$, добиваме дека $z, y, x \geq 0$. **(5)** Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка, добиваме

$$\begin{cases} (x+y)^2 - (z+x)^2 = z - y \\ (z+x)^2 = y \\ (y+z)^2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-z)(2x+y+z) = z - y \\ (z+x)^2 = y \\ (y+z)^2 = x \end{cases}$$

Добиваме два системи:

$$\begin{cases} y = z \\ (z+x)^2 = y \\ (y+z)^2 = x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y+z = -1 \\ (z+x)^2 = y \\ (y+z)^2 = x \end{cases}. \ \mathbf{(5)}$$

Бидејќи $z, y, x \geq 0$, вториот систем нема решение. Во првиот систем од последните два системи, од втората равенка ќе ја одземеме третата равенка, при што аналогно како и претходно ќе ги добиеме системите:

$$\begin{cases} y = z \\ z = x \\ (y+z)^2 = x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = z \\ x + y + 2z = -1. \ \mathbf{(5)} \\ (y+z)^2 = x \end{cases}$$

Очигледно е дека вториот систем, од исти причини како и претходно, нема решение. Во првиот од последните два системи, заради равенството $x = y = z$ (од првите две равенки), добиваме

$(x+x)^2 = x$

$4x^2 = x.$ **(5)**

Решенија на последната равенка се $x = 0$ и $x = \dfrac{1}{4}$.

Решенија (x, y, z) на почетниот систем се $(0,0,0)$ и $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$. **(5)**

4АБ (сигма 99, задача 223). Ако $m^2 + n^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$ и $mp + nq = 0$, определи ја вредноста на $mn + pq$.

Решение. Нека $m = \sin\alpha, n = \cos\alpha, p = \sin\beta, q = \cos\beta$. **(15)**Тогаш

$mp + nq = \cos(\alpha - \beta) = 0.$ **(5)**

Сега за $mn + pq$ имаме:

$mn + pq = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta =$

$= \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 0$ **(5)**

4 година

1А. Ако n , $n > 1$ е природен број, докажи дека низата од природни броеви $n!+2$, $n!+3$, $n!+4$, ..., $n!+n$ нема ниту еден прост број.
Решение. Бројот $n!+n$ е делив со n, бројот $n!+(n-1)$ е делив со $n-1$, ..., бројот $n!+2$ е делив со 2. **(15)** Од дискусијата јасно е дека ниту еден од броевите $n!+2$, $n!+3$, $n!+4$, ..., $n!+n$ задачата не е прост број. **(10)**

1Б. Во множеството природни броеви, реши ја равенката $\binom{n+1}{n-2}+2\binom{n-1}{3}=7(n-1)$.

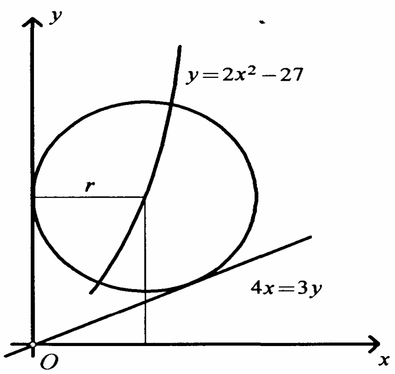
Решение. Јасно е дека равенката е дефинирана за $n \geq 2$.**(5)**
Почетната равенка е еквивалентна со $\frac{n(n+1)(n-1)}{6}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}=7(n-1)$.**(10)**
Од последната равенка, после делењето на двете страни со $n-1$, се добива квадратна равенка $n^2-3n-10=0$,**(5)** чие што единствено решение во $\mathbb{N}$ е $\mathbf{n=5}$. **(5)**
2АБ. Одреди ги сите аритметички прогресии за кои важи $a_n+a_m=a_{m+n}$, каде a_n е n-титот член во аритметичката прогресија.
Решение. Од формулата за општиот член на една аритметичка прогресија имаме

$$a_n=a_1+(n-1)d$$
$$a_m=a_1+(m-1)d$$
$$a_{m+n}=a_1+(m+n-1)d, \textbf{(5)}$$

каде d е разликата на аритметичката прогресија.
Од условот на задачата $a_n+a_m=a_{m+n}$ имаме

$$a_1+(n-1)d+a_1+(m-1)d=a_1+(m+n-1)d \ \textbf{(15)}$$
$$2a_1+(m+n-2)d=a_1+(m+n-1)d$$
$$a_1+(m+n-1)d-d=(m+n-1)d,$$ од каде се добива $d=a_1$. **(5)**

3А. (сигма 99, задача 1302). Правите $x=0$ и $4x=3y$ се тангенти на кружница која се наоѓа во првиот квадрант и има центар на параболата $y=2x^2-27$. Најди го радиусот на кружницата.



Решение. Нека (a,b) се координатите на центарот на кружницата и r е нејзиниот радиус. Да забележиме дека кружницата лежи во полурамнината определена со правата $4x=3y$ и точката $(0,1)$ (т.е. со позитивниот дел на y-оската), па важи $3a-4b>0$. **(5)** Бидејќи кружницата се наоѓа во првиот квадрант, следува дека $a>0$ и $b>0$. Од тоа што y-оската е тангента следува дека $r=a$, **(5)** а бидејќи центарот се наоѓа на параболата $y=2x^2-27$ следува дека $b=2a^2-27=2r^2-27$, па координатите на центарот се $(r,2r^2-27)$. **(5)** Растојанието од центарот до y-оската е r а до правата $4x=3y$ е $\frac{3(2r^2-27)-4r}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{6r^2-4r-81}{5}$. **(5)** Бидејќи двете прави се тангенти, следува дека $r=\frac{6r^2-4r-81}{5}$, и оттука добиваме $6r^2-9r-81=0$. Решенија на последнава равенка се -3 и $\frac{9}{2}$, па бараниот радиус е $\frac{9}{2}$.**(5)**
3Б. (сигма 103, задача 1362). На секој ѕид од една коцка дадени се n точки, така што било кои три не се колинеарни и ниту една не лежи на рабовите од коцката.
а) Колку прави што не лежат на ѕидовите од коцката се одредени со дадените коцки.
б) Колку триаголници што не лежат на ист ѕид од коцката се одредени со дадените точки?

Решение. а) Коцката има 6 ѕида, па значи, дадени се вкупно $6n$ точки. **(5)** Бидејќи било кои три точки на еден ѕид не се колинеарни, со овие $6n$ точки се одредени $\binom{6n}{2}$ прави. **(5)** Бројот на правите што лежат на еден ѕид од коцката е $\binom{n}{2}$. Значи, бројот на бараните прави е $\binom{6n}{2}-6\binom{n}{2}=15n^2$. **(5)**
б)На сличен начин добиваме дека бројот на триаголниците одредени со $6n$ точки а кои не лежат на ист ѕид од коцката е $\binom{6n}{3}-6\binom{n}{3}=5n^2(7n-3)$. **(10)**

4АБ. (сигма 98, задача **1290**). Низата броеви $a_1,a_2,\dots$ е зададена со $a_1=1$, $a_2=143$ и $a_{n+1}=5\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n}$, за $n \geq 2$. Докажи дека сите членови на низата се цели броеви.

Решение 1. Да забележиме дека $a_3 = 5\frac{a_1 + a_2}{2} = 5 \cdot \frac{144}{2} = 5 \cdot 72 = 360$. **(5)** За $n \geq 4$ имаме

$$a_n = 5\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \quad \text{и} \quad a_{n-1} = 5\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2}}{n-2}. \ \textbf{(5)}$$

Со алгебраски трансформации добиваме

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} = \frac{n-2}{5}a_{n-1} \qquad a_n = \frac{5}{n-1}\left(\frac{n-2}{5}a_{n-1} + a_{n-1}\right)$$

$$a_n = \frac{5}{n-1}\frac{n+3}{5}a_{n-1} = \frac{n+3}{n-1}a_{n-1}. \ \textbf{(10)}$$

Според тоа,

$$a_n = \frac{(n+3)(n+2)\cdot \ldots \cdot 7}{(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3}a_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot 360 = (n+3)(n+2)(n+1)n,$$

што требаше да се докаже. **(5)**

Решение 2. Ако воведеме ознака $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, **(5)** тогаш $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$. **(5)** Значи, доволно е да докажеме дека S_n е цел број. Од самата дефинција е јасно дека $S_1 = 1$, $S_2 = 144$, а од равенството $a_{n+1} = 5\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$ добиваме

$$S_{n+1} - S_n = \frac{5}{n}S_n, \qquad S_{n+1} = \frac{n+5}{n}S_n. \ \textbf{(5)}$$

Значи, при $n \geq 2$ добиваме

$$S_{n+1} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)\cdot \ldots \cdot 7}{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2}S_2 = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}144 = \\ = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5} \quad \textbf{(5)}$$

Но, броевите $n+5$, $n+4$, $n+3$, $n+2$, $n+1$ се пет последователни природни броеви па еден од нив е делив со 5. Значи, $S_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, што требаше и да се докаже. **(5)**