XXXVII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА, 15.II-2014

I година

1АБ. Докажи дека збирот од квадратите на пет последователни цели броеви не може да биде полн квадрат.

Решение. Нека се тоа броевите $n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2$. Тогаш нивниот збир е

$$S=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5(n^2+2)$$

што значи дека $5|S$. Ако бројот S е полн квадрат, тогаш треба $5|(n^2+2)$. Ова не е можно за ниту еден број $n\in\mathbb{Z}$. Имено ако $n=5k$, тогаш $n^2+2=5A+2$, ако $n=5k\pm1$, тогаш $n^2+2=5B+3$, ако $n=5k\pm2$, тогаш $n^2+2=5C+1$. Оттука следува дека овој број не може да биде полн квадрат.

2А.4Б. Докажи дека дадената равенка нема решение во множеството на цели броеви:

$$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)=1\,.$$

Решение. Имаме

$$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)=xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-y^2-x^2+y^2)$$
$$=(xy-zx)(x^2-y^2)+(yz-zx)(y^2-z^2)=x(y-z)(x^2-y^2)-z(x-y)(y^2-z^2)$$
$$=(x-y)(y-z)(x^2+xy-zy-z^2)=(x-y)(y-z)(x-z)(x+z+y)\,.$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката

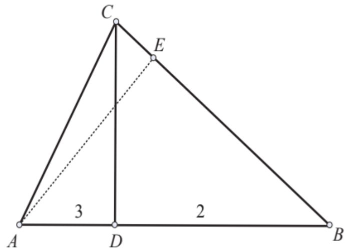
$$(x-y)(y-z)(x-z)(x+z+y)=1$$

и оттука $x-y,y-z,z-x\in\{-1,1\}$. Значи, $(x-y)+(y-z)+(z-x)\neq0$ што е невозможно и затоа равенката нема решение во множеството на цели броеви.

2Б. Во остроаголен триаголник ABC висината од врвот C ја дели спротивната страна на два дела $\overline{AD}$ и $\overline{DB}$ со должини $\overline{AD}=3cm$ и $\overline{DB}=2cm$. Аголот при темето A изнесува 60°. Одреди ги должините на страните на триаголникот ABC како и должината на висината на триаголникот ABC спуштена од темето A.

Решение. Јасно, $\overline{AB}=5cm$. Бидејќи аголот кај темето A изнесува 60° и бидејќи триаголникот ADC е правоаголен имаме дека аголот $\angle DCA$ изнесува 30° од каде пак се добива дека $\overline{AC}=2\overline{AD}=6sm$. Од Питагоровата теорема кај триаголникот ADC имаме

$$\overline{DC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=5cm$$



Од Питагоровата теорема кај триаголникот BDC имаме

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{DC}^2+\overline{BD}^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{29}cm\,.$$

Следно, за плоштината на триаголникот ABC имаме $P_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2}=\frac{5\cdot5}{2}=\frac{25}{2}$. Од друга страна $P_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AE}}{2}$, па затоа $\frac{25}{2}=\frac{\sqrt{29}\cdot\overline{AE}}{2}$. Конечно, висината од темето A изнесува $\overline{AE}=\frac{25}{\sqrt{29}}cm$.

3А. Трапезот $ABCD$ е поделен со права p, таква што $p\parallel AB\parallel CD$, на два дела со еднакви плоштини. Определи ја должината на отсечката чиишто крајни точки се пресечните точки на правата p и краците на трапезот, ако се дадени дожините на основите a и b.

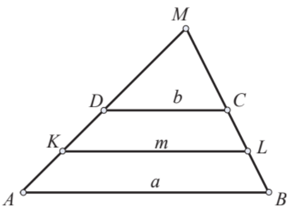
Решение. Ги продолжуваме краците AD и BC до нивниот пресек M. Нека $KL=p$. Тогаш, $\triangle ABM\sim\triangle KLM\sim\triangle DCM$ и при тоа

$P_{\triangle ABM}:P_{\triangle KLM}:P_{\triangle DCM}=a^2:m^2:b^2$, т.е.

$P_{\triangle ABM}=ka^2,\ P_{\triangle KLM}=km^2,\ P_{\triangle DCM}=kb^2$,

каде што k е коефициент на пропорционалност. Од условот на задачата,

$$P_{ABLK}=P_{KLCD}$$
$$\Rightarrow\ P_{\triangle ABM}-P_{\triangle KLM}=P_{\triangle KLM}-P_{\triangle DCM}$$
$$ka^2-km^2=km^2-kb^2$$
$$m^2=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)$$
$$m=\overline{KL}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)}.$$



3Б. На почеток на три плочки се наоѓаат броевите 2012, 2014 и 2016. Марко во секој чекор броевите на плочката ги означува со a,b и c по некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a-b,3b-c$ и $3c-a$. Дали може Марко со последователна примена на оваа постапка во некој момент на трите плочки да има три еднакви броеви?

Решение. Ако претпоставиме дека во некој момент може да се добијат сите три броеви да се исти, имаме дека $3a-b=3b-c=3c-a=t$. Од овој систем добиваме дека

$$b=3a+t,\qquad c=3b-t=9a-4t,\qquad a=3c-t=27a-13t$$

Од последната равенка $26a=13t\Rightarrow a=\frac{t}{2}$. Ако се вратиме и замениме, добиваме дека $b=\frac{t}{2}$ и $c=\frac{t}{2}$, односно $a=b=c=\frac{t}{2}$. Од оваа дискусија се заклучува дека три еднакви броја во некој чекор би добиле ако во претходниот чекор сме имале три исти броеви. Но, бидејќи се тргнува од броевите 2012, 2014 и 2016, следува дека не е можно да се добијат три исти броја.

4А. Најди ги сите парови заемно прости природни броеви a и b такви што $a+b$ е делител на a^4+b^4.

Решение Користиме $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ од каде $a+b$ е делител на a^4-b^4. Добиваме дека $a+b$ е делител на $(a^4+b^4)+(a^4-b^4)=2a^4$ и $a+b$ е делител на $(a^4+b^4)-(a^4-b^4)=2b^4$ или $(a+b)\big|\text{НЗД}(2a^4,2b^4)$. Од $\text{НЗД}(a,b)=1$ следува $\text{НЗД}(a^4,b^4)=1$ односно $(a+b)\big|\text{НЗД}(2a^4,2b^4)=2$. Конечно $a=1,b=1$.

II година

1 АБ. Најди ги целобројните вредности на параметарот a, за кои решенијата на системот:

$$\begin{cases} a(x+y-1)=x-2y-1 \\ a(x-y-3)=x+2y-3 \end{cases}$$

се целобројни.

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со: $\begin{cases} (a-1)x+(a+2)y=a-1 \\ (a-1)x-(a+2)y=3a-3 \end{cases}$.

Имаме $\begin{cases} 2(a-1)x=4a-4 \\ 2(a+2)y=-2a+2 \end{cases}$. Ако $a\neq 1$, тогаш $x=2$, а ако $a=1$, тогаш $x\in\mathbf{R}$. Ако $a=-2$ тогаш нема решение за y па и за системот. Ако $a\neq -2$, имаме $y=\frac{-a+1}{a+2}=-1+\frac{3}{a+2}$. Бидејќи решенијата треба да бидат целобројни, следува дека $a+2$ треба да е делител на 3 и затоа $a+2=\pm1,\pm3$. Оттука, $a=-5,-3,-1,1$. Добиваме: $a=-5: x=2, y=-2$; $a=-3: x=2, y=-4$; $a=-1: x=2, y=2$; $a=1: x\in\mathbf{R}$, $y=0$.

2 АБ. Нека a,b,c се реални боеви за кои важат: $ab-a=b+119$, $bc-b=c+59$, $ca-c=a+71$. Пресметај ги сите можни вредности на $a+b+c$.

Решение. Од првата равенка имаме

$$a(b-1)=(b-1)+120, \text{ т.е. } (a-1)(b-1)=120.$$

Слично, втората е еквивалентна со $(b-1)(c-1)=60$ и третата со $(c-1)(a-1)=72$. Оттука, $\frac{a-1}{c-1}=2$, $a-1=2(c-1)$ и заменето во третата добиваме $2(c-1)^2=72$. Добиваме, $c_1=7$, $c_2=-5$ и оттука $a_1=13, a_2=-11$ и $b_1=11, b_2=-9$. Затоа, можните вредности за $a+b+c$ се: $13+11+7=31$ и $-11-9-5=-25$.

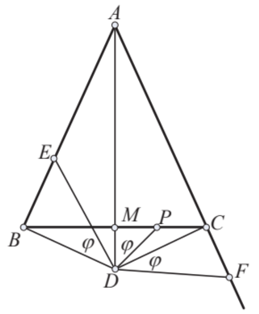
3 А. Реши ја равенката: $(x^2-8)(x+1)^2+x^2=0$.

Решение. -1 не е решение на равенката па затоа таа е еквивалентна со: $x^2-8+\frac{x^2}{(x+1)^2}=0$. Ја трансформираме во $(x-\frac{x}{x+1})^2+2\frac{x^2}{x+1}-8=0$, односно во $(\frac{x^2}{x+1})^2+2\frac{x^2}{x+1}-8=0$. Ја воведуваме смената $t=\frac{x^2}{x+1}$ и добиваме $t^2+2t-8=0$, чиишто решенија се 2 и -4. Од $\frac{x^2}{x+1}=2$ ги добиваме $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$, а од $\frac{x^2}{x+1}=-4$ добиваме $x_3=-2$.

4 А. Над отсечката BC, како основа, во различните полурамнини конструирани се рамнокраките триаголници ABC и DCB, притоа $\angle DBA=90°$. Нека M е средината на основата BC. Нека E е точка од страната AB, P е на отсечката MC и F е на полуправата AC така што C е меѓу A и F, притоа

$$\measuredangle EDB=\measuredangle PDA=\measuredangle FDC.$$

Докажи дека P е средина на отсечката EF и DP и EF се заемно нормални.



Решение. Нека $\measuredangle EDB=\measuredangle PDA=\measuredangle FDC=\phi$. Триаголниците EBD, PMD и FCD се правоаголни и оттука: $\cos\phi=\frac{\overline{BD}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{MD}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{FD}}$. Тогаш, од $\overline{BD}=\overline{CD}$ следува дека $\overline{ED}=\overline{FD}$, па триаголникот DFE е рамнокрак. Уште, $\measuredangle FDE=\measuredangle FDC+\measuredangle CDE=\measuredangle EDB+\measuredangle CDE=\measuredangle CDB$, па триаголниците DCB и DFE се слични, со коефициент на сличност $\cos\phi$.

Од $\measuredangle PDE=\measuredangle PDM+\measuredangle MDE=\measuredangle EDB+\measuredangle MDE=\measuredangle MDB$, следува дека DP е симетрала на аголот FDE, па затоа DP и EF се заемно нормални. Од тоа што DM е висина во триаголникот DCB, DP е симетрала на аголот FDE и $\cos\phi=\frac{\overline{MD}}{\overline{PD}}$, следува дека DP е висината во триаголникот DFE па затоа P е средина на отсечката EF.

3 Б. Најди ги сите реални броеви c такви што равенката

$$(x^2-4x-c)^2-8x^2+32x+8c=0$$

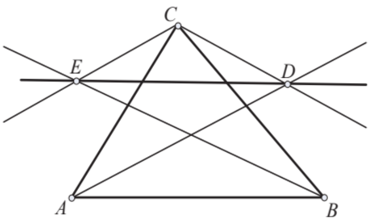
има точно две реални решенија.

Решение. Равенката е еквивалентна со $(x^2-4x-c)^2-8(x^2-4x-c)=0$. Ако $t=x^2-4x-c$, добиваме $t^2-8t=0$ и оттука $x^2-4x-c=0$ или $x^2-4x-c=8$. Дискриминантата на првата равенка е $D_1=4(c+4)$, а на втората равенка е $D_2=4(4+c+8)=4(c+12)$. Равенката има точно две реални решенија ако:

$$1)\ \begin{cases} D_1>0 \\ D_2<0 \end{cases} \text{ или } 2)\ \begin{cases} D_1=0 \\ D_2=0 \end{cases} \text{ или } 3)\ \begin{cases} D_1<0 \\ D_2>0 \end{cases}.$$

Решение има третиот систем т.е. $c\in(-12,-4)$.

4Б. Во остроаголниот триаголник ABC повлечени се симетралите на внатрешните агли во темињата A и B. Од темето C се повлечени прави паралелни со овие симетрали кои нив ги сечат во точките D и E, соодветно. Ако правата DE е паралелна со AB докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

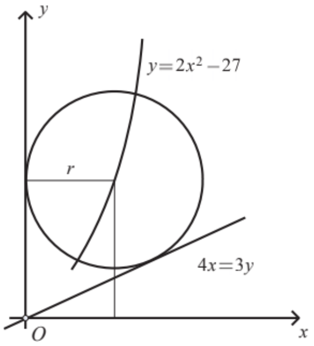


Решение. Бидејќи AD е симетрала на $\measuredangle A$, користејќи ја паралелноста $AB\parallel ED$ и $AD\parallel EC$ добиваме $\measuredangle CAD=\measuredangle BAD=\measuredangle DEC$. Од ова добиваме дека точките A, D, C и E лежат на иста кружница. Слично, добиваме дека точките B, D, C и E лежат на иста кружница. Значи A, B, D, C и E лежат на иста кружница. Од паралелноста $AD\parallel EC$ и $BE\parallel CD$ следи $\measuredangle DAC=\measuredangle DEC=\measuredangle EDA=\measuredangle ABE$, од каде го следува тврдењето во задачата.

IV година

1АБ. Правите $x=0$ и $4x=3y$ се тангенти на кружница која се наоѓа во првиот квадрант и има центар на кривата $y=2x^2-27$. Најди го радиусот на кружницата.

Решение. Нека (a,b) се координатите на центарот на кружницата и r е нејзиниот радиус. Да забележиме дека кружницата лежи во полурамнината определена со правата $4x=3y$ и точката $(0,1)$ (т.е. со позитивниот дел на y-оската), па важи $3a-4b>0$. Бидејќи кружницата се наоѓа во првиот квадрант, следува дека $a>0$ и $b>0$. Од тоа што y-оската е тангента следува дека $r=a$, а бидејќи центарот се наоѓа на параболата $y=2x^2-27$ следува дека $b=2a^2-27=2r^2-27$, па координатите на центарот се $(r,2r^2-27)$. Растојанието од центарот до y-оската е r а до правата $4x=3y$ е $\frac{3(2r^2-27)-4r}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{6r^2-4r-81}{5}$. Бидејќи двете прави се тангенти, следува дека $r=\frac{6r^2-4r-81}{5}$, и оттука добиваме $6r^2-9r-81=0$. Решенија на последнава равенка се -3 и $\frac{9}{2}$, па бараниот радиус е $\frac{9}{2}$.



2АБ. Аглите на конвексниот n - аголник се $\alpha, 2\alpha, ..., n\alpha$. Најди ги сите можни вредности за n и соодветните вредности за α.

Решение. Јасно е дека $n\geq 3$. Збирот на аглите во конвексниот n - аголник е $(n-2)\pi$ (n-аголникот можеме да го поделиме на $n-2$ триаголници). Од друга страна $\alpha+2\alpha+...+n\alpha=\alpha(1+2+...+n)=\frac{n(n+1)}{2}\alpha$.

Од равенката, $(n-2)\pi=\frac{n(n+1)}{2}\alpha$ добиваме $\alpha=\frac{2\pi(n-2)}{n(n+1)}$ и $n\alpha=\frac{2\pi(n-2)}{n+1}<\pi$. Но, тогаш $\frac{2(n-2)}{n+1}<1$, т.е. $n<5$. Сега за $n=3$ имаме $\alpha=\frac{\pi}{6}$, а за $n=4$ имаме $\alpha=\frac{\pi}{5}$.

3А. Најди $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n$, ако $a_1=1$, $a_{n+1}a_n=4(a_{n+1}-1)$, за $n\geq 1$.

Решение. Бидејќи $a_{n+1}a_n=4(a_{n+1}-1)$, $a_{n+1}=\frac{4}{4-a_n}$. Ако на двете страни одземеме 2, имаме $a_{n+1}-2=\frac{4}{4-a_n}-2=\frac{2(a_n-2)}{4-a_n}$. Оттука, $\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{4-a_n}{2(a_n-2)}=\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{2}$. Па, низата $\{\frac{1}{a_n-2}\}$ е аритметичка прогресија со почетен член $\frac{1}{a_n-2}=-1$ и разлика $d=-\frac{1}{2}$. Значи, $\frac{1}{a_n-2}=-1+(n-1)(-\frac{1}{2})=-\frac{n+1}{2}$, од каде $a_n=\frac{2n}{n+1}$. Конечно,

$$a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n=(2\cdot\tfrac{1}{2})(2\cdot\tfrac{2}{3})(2\cdot\tfrac{3}{4})\ldots(2\cdot\tfrac{n}{n+1})=\frac{2^n}{n+1}.$$

4А. Најди ги сите природни броеви n така што $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k!}$ е цел број.

Решение. Бидејќи $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}=\frac{n!+n(n-1)\cdot...\cdot3+....+n(n-1)+n+1}{n!}=\frac{(n-1)S+n+1}{n!}$, добиваме дека $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k!}=\frac{(n-1)S+(n+1)}{(n-1)!}$. За бројот $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k!}$ да биде цел треба $(n-1)!\,|\,(n-1)S+n+1$. Бидејќи $(n-1)\,|\,(n-1)!$ и $n-1\,|\,(n-1)S$ следува дека мора $n-1\,|\,n+1$. Јасно $n-1\,|\,n-1+2$ па оттука $n-1\,|\,2$. Значи $n=2$ и $n=3$.)

3Б. Ако $x^2=x+1, n\geq 2$ тогаш докажи дека $x^n=F_nx+F_{n-1}$ каде $F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ за секој природен број n.

Решение. Ќе докажеме со помош на математичка индукција по n. За $n=2$ добиваме $x^2=F_2x+F_1=x+1$.

Сега, нека претпоставиме за $n>2$ е исполнето $x^{n-1}=F_{n-1}x+F_{n-2}$. Имаме

$$\begin{aligned}x^n&=x\cdot x^{n-1}=x(F_{n-1}x+F_{n-2})=x^2F_{n-1}+xF_{n-2}=(x+1)F_{n-1}+xF_{n-2}\\&=x(F_{n-1}+F_{n-2})+F_{n-1}==xF_n+F_{n-1}.\end{aligned}$$

4Б. Ако $n\,|\,a-b$ докажи дека $n^2\,\big|\,a^n-b^n$. Дали важи обратното?

Решение. Бидејќи $n\,|\,a-b$ следува дека постои цел број c така што $a=nc+b$. Од Биномната формула добиваме

$$\begin{aligned}a^n-b^n&=(b+nc)^n-b^n=b^n+\tbinom{n}{1}b^{n-1}nc+\tbinom{n}{2}b^{n-2}n^2c^2+...+\tbinom{n}{n}n^nc^n-b^n\\&=n^2(b^{n-1}c+\tbinom{n}{2}b^{n-2}c^2+...+\tbinom{n}{n}n^nc^n).\end{aligned}$$

Значи, $n^2\,|\,(a^n-b^n)$.

Обратно не важи бидејќи $3^n\equiv 1^4 \pmod{4^2}$ но 3 и 1 немат ист остаток при делење со 4.