20- та Македонска
математичка олипијада

20-та МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

06.04.2013 ФЕИТ-Скопје

1. Реши ја равенката $p^{2q}+q^{2p}=r$ во множеството прости броеви.

Решение. Јасно е дека $r>2$, од каде мора r да биде непарен прост број. Еден од броевите p или q мора да биде 2, а другиот непарен прост број. Без губење на општоста, нека $q=2$ и p е непарен. Но тогаш равенката е од облик $p^4+2^{2p}=r$ односно $p^4+4\cdot 2^{4k}=r$ каде $p=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$. Но тогаш

$$\begin{aligned}p^4+4\cdot 2^{4k}&=p^4+4\cdot 2^{4k}+4\cdot 2^{2k}p^2-4\cdot 2^{2k}p^2=\left(p^2+2\cdot 2^{2k}\right)^2-4\cdot 2^{2k}p^2=\\&=\left(p^2+2\cdot 2^{2k}+2\cdot 2^k p\right)\left(p^2+2\cdot 2^{2k}-2\cdot 2^k p\right)=\\&=\left(p^2+2\cdot 2^{2k}+2\cdot 2^k p\right)\left(\left(p-2^k\right)^2+2^{2k}\right)\end{aligned}$$

Тоа значи дека бројот p^4+2^{2p} не е никогаш прост, што значи дека равенката нема решение во множеството прости броеви.

2. Вкупно 2^n парички се расподелени на неколку деца. До прерасподелба на паричките доаѓа во ситуација кога некое од децата има барем половина од сите парички: тогаш од паричките на едно такво дете на секое од останатите деца му се префрлаат онолку парички колку што веќе имало. Во случај кога сите парички се кај едно дете нема можност за прерасподелба. Кој е најголемиот можен број последователни прераспределби? (На пример, ако 32 парички на 6 деца се првично распределени 17, 2, 9, 1, 2, 1, тогаш после една прерасподелба децата ќе имаат редоследно 2, 4, 18, 2, 4, 2 парички; во примерот, тој број е два).

Одговорот да се образложи!

Решение. Најмногу n последователни прерасподелби. Ќе започнеме со пример дека n последователни прерасподелби се можни. Нека 2^n парички се распределени на 3 деца првично во редослед $1, 2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2, 1$. Последователните прерасподелби (вкупно n на број) ќе бидат :

$2^1, 2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots\ldots+2^2, 2^1$

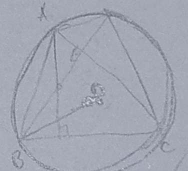
$2^2, 2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^3, 2^2$

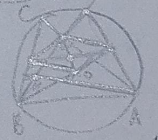
…………………

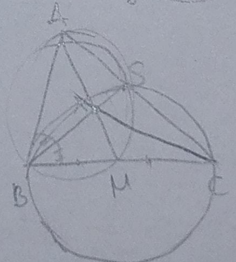
$2^{n-2}, 2^{n-1}, 2^{n-2}$

$2^{n-1}, 0, 2^{n-1}$

$0, 0, 2^n$

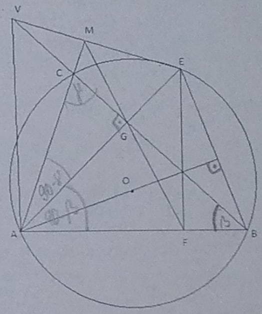






Да покажеме дека n е максималниот број последователни прерасподелби. Тргнуваме од претпоставка дека постои првична расподелба за која се можни барем $n+1$ прерасподелби и бараме контарадикција: да забележиме дека после една прерасподелба бројот на парички кај секое дете е делив со 2 (кај секое дете кај кое се додавале парички, бројот е дуплиран, па е парен, а кај детето од кое се одземале парички повторно останува парен број бидејќи вкупно има 2^n парички т.е. парен број). Аналогно после втората прерасподелба бројот на парички кај секое дете е делив со 4, итн. се до n-тата прерасподелба во која бројот на парички кај секое дете е делив со 2^n; имајќи предвид дека вкупниот број парички е неменлив и изнесува 2^n, единствена можна (во некој редослед) е расподелбата $2^n, 0, 0, \ldots, 0$. Но тогаш нема да има уште една расподелба. Контрадикција!

3. Даден е остроаголен триаголник ABC таков што аголот во темето C е најголем. Нека E и G се пресечните точки на висината спуштена од A кон BC со опишаната кружница на триаголникот ABC и со BC соодветно и центарот O на опишаната кружница лежи на нормалата спуштена од A кон BE. Точките M и F се подножјата на висините спуштени од E кон AC и AB соодветно. Докажи дека $P_{MFE}<P_{FBEG}$.



Решение. Нека пресекот на EM со BC е V (пресекот секогаш ќе постои бидејќи аголот во C е остар) Од теорема на Симсон следува дека точките M, G и F се колинеарни. Да забележиме дека $\angle EAC=\angle EBC$ како агли над ист кружен лак. Уште $\angle CAE=\angle BAO$. Четириаголникот $FBEG$ е тетивен. Па добиваме $\angle GBE=\angle GFE$. Уште $\angle GAO=\angle GBE$ како агли со нормални краци. Добивме $\angle CAE=\angle GAO=\angle BAO$. Па добиваме дека AO е симетрала на аголот и нормала во триаголникот ABE. Следува дека ABE е рамнокрак од каде GF е паралелна со BE. Правите AO, BG и EF се сечат во една точка (EF и BG се висини во триаголникот ABE). Да забележиме дека $AGMV$ е тетивен. Имаме $\angle MVG=\angle GAM$. Уште добиваме $\angle MAV=\angle VGM=\angle FGB$. Па AM е висина и симетрала на аголот во триаголникот EAV. Следува дека триаголникот EAV е рамнокрак и M е средина на страната VE. Уште $\Delta AVE\cong\Delta AEB$. Јасно е дека $\Delta EGV\cong\Delta EGB$ и бидејќи и двата се правоаголни $P_{GEM}=\frac{1}{2}P_{GEB}$. Од друга страна $P_{GFE}=P_{GFB}$ од каде се добива бараното неравенство.

4. **Нека x, y и z се позитивни реални броеви така што $x^4+y^4+z^4=3$. Докажи дека**

$$\frac{9}{x^2+y^4+z^6}+\frac{9}{x^4+y^6+z^2}+\frac{9}{x^6+y^2+z^4}\le x^6+y^6+z^6+6.$$

Кога важи равенство?

Решение. Ако го искористиме неравенството на Коши – Буњаковски –Шварц за позитивните броеви (x,y^2,z^3) и (x^3,y^2,z) добиваме

$$(x^4+y^4+z^4)^2\le(x^2+y^4+z^6)(x^6+y^4+z^2) \text{ т.е}$$

$$\frac{1}{x^2+y^4+z^6}\le\frac{x^6+y^4+z^2}{9}. \qquad (1)$$

Аналогно, со користење на неравенство на Коши – Буњаковски – Шварц за позитивните броеви (x^2,y^3,z) и (x^2,y,z^3), како и за позитивните броеви (x^3,y,z^2) и (x,y^3,z^2), добиваме

$$\frac{1}{x^4+y^6+z^2}\le\frac{x^4+y^2+z^6}{9}, \qquad (2)$$

односно

$$\frac{1}{x^6+y^2+z^4}\le\frac{x^2+y^6+z^4}{9}. \qquad (3)$$

Сега, со собирање на неравенствата (1), (2) и (3) го добиваме неравенството

$$\frac{1}{x^2+y^4+z^6}+\frac{1}{x^4+y^6+z^2}+\frac{1}{x^6+y^2+z^4}\le\frac{x^6+y^6+z^6+x^4+y^4+z^4+x^2+y^2+z^2}{9}. \qquad (4)$$

Од неравенство меѓу аритметичка и квадратна средина за позитивните броеви x^2, y^2 и z^2 добиваме дека $x^2+y^2+z^2\le 3\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}}=3$, па ако замениме во (4) го добиваме бараното неравенство. Равенство во (1) важи ако и само ако $\frac{x}{x^3}=\frac{y^2}{y^2}=\frac{z^3}{z}$ т.е. $x=z=1$ и од $x^4+y^4+z^4=3$ следува дека $y=1$.

5. Дадени се произволен триаголник ABC и две прави p и q кои не се паралелни меѓу себе и не се нормални на ниту една од страните на триаголникот. Нормалите низ точките A, B и C на правата p ги обележуваме со p_A, p_B и p_C соодветно, а нормалите на правата q со q_A, q_B и q_C соодветни. Нека пресечните точки на правите p_A, q_A, p_B, q_B, p_C и q_C соодветно со q_B, p_B, q_C, p_C, q_A и p_A се K, L, P, Q, N и M. Докажи дека правите KL, MN и PQ се сечат во една точка.

Решение. Без губење на општоста може да претпоставиме дека p_B е меѓу p_A и p_C. Прв случај е ако q_A е меѓу q_B и q_C како на цртежот, очигледно KL ја сече PN. Аналогно, ако q_C е меѓу q_A и q_B случајот е симетричен на разгледуваниот. Втор случај, ако q_B е меѓу q_A и q_C, тогаш MQ и PN не се паралелни, па KL ја сече барем едната

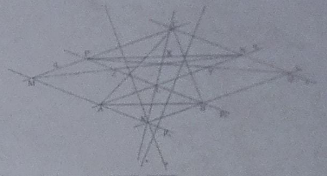
и двата случаи се еквивалентни. Според ова можеме да претпоставиме дека KL ја сече PN. Правата MN не може да е паралелна со p_B, бидејќи во тој случај p е нормална на AC и аналогно PQ не е паралелна со q_A.

Нека X, Y и Z се пресечните точки на правите PN, q_A и p_B соодветно со KL, PQ и MN. Од сличноста на триаголниците LNZ и PMZ се добива

$$\frac{\overline{LZ}}{\overline{PZ}}=\frac{\overline{LN}}{\overline{PM}}. \qquad (1)$$

Слично од сличноста на LPY и NQY се добива

$$\frac{\overline{NY}}{\overline{LY}}=\frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}}(1) \qquad (2)$$



Ако KL не минува низ C, нека ги сече NC и MC соодветно во U и во V. Од триаголникот CPN и теоремата на Менелај за правата KL добиваме $\frac{\overline{PX}}{\overline{XN}}\frac{\overline{NU}}{\overline{UC}}\frac{\overline{CV}}{\overline{VP}}=-1$, то ест

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}}=\frac{\overline{UC}}{\overline{NU}}\frac{\overline{VP}}{\overline{CV}}(2) \qquad (3).$$

Од сличноста на триаголниците KQU и LNU добиваме $\frac{\overline{UQ}}{\overline{UN}}=\frac{\overline{KQ}}{\overline{LN}}$, од каде $1+\frac{\overline{NQ}}{\overline{UN}}=1+\frac{\overline{KB}}{\overline{LN}}$, па $\overline{UN}=\frac{\overline{LN}\,\overline{NQ}}{\overline{KB}}$ и $\overline{UC}=\overline{UN}+\overline{NC}=\frac{\overline{LN}\,\overline{NQ}+\overline{NC}\,\overline{KB}}{\overline{KB}}$ и оттука

$$\frac{\overline{NU}}{\overline{UC}}=\frac{-\frac{\overline{LN}\,\overline{NQ}}{\overline{KB}}}{\frac{\overline{LN}\,\overline{NQ}+\overline{NC}\,\overline{KB}}{\overline{KB}}}=\frac{-\overline{LN}\,\overline{NQ}}{\overline{LN}\,\overline{NQ}+\overline{NC}\,\overline{KB}}. \qquad (4)$$

Аналогно за сличните триаголници KMV и LPV добиваме

$$\frac{\overline{CV}}{\overline{VP}}=\frac{\overline{LP}\,\overline{PM}+\overline{PC}\,\overline{KA}}{-\overline{LP}\,\overline{PM}}.(2) \qquad (5)$$

Ако ги замeнеме (4) и (5) во (3) добиваме:

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}}=\frac{\overline{UC}}{\overline{NU}}\frac{\overline{VP}}{\overline{CV}}=\frac{\overline{LN}\,\overline{NQ}+\overline{NC}\,\overline{KB}}{-\overline{LN}\,\overline{NQ}}\frac{-\overline{LP}\,\overline{PM}}{\overline{LP}\,\overline{PM}+\overline{PC}\,\overline{KA}}=\frac{\overline{LN}\,\overline{NQ}+\overline{NC}\,\overline{KB}}{\overline{LP}\,\overline{PM}+\overline{PC}\,\overline{KA}}\frac{\overline{LP}\,\overline{PM}}{\overline{LN}\,\overline{NQ}}=-\frac{\overline{LP}\,\overline{PM}}{\overline{LN}\,\overline{NQ}} \qquad (6)$$

Ако сега ги замeнеме (1), (2) и (6) во равенството на Чева за триаголникот LNP и правите LK, NM и PQ добиваме:

$$\frac{\overline{LZ}}{\overline{PZ}}\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}}\frac{\overline{NY}}{\overline{LY}}=\frac{\overline{LN}}{\overline{PM}}\frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}}\frac{-\overline{LP}\,\overline{PM}}{\overline{LN}\,\overline{NQ}}=-1\,(1)$$

Ако KL минува низ C, тогаш X е средина на $\overline{PN}$ и

$$\frac{\overline{LN}}{\overline{BK}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{LB}}. \qquad (7)$$

Ако сега ги замeнеме (1), (2) и (7) во равенството на Чева за триаголникот LNP и правите LK, NM и PQ добиваме:

$$\frac{\overline{LZ}}{\overline{PZ}}\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}}\frac{\overline{NY}}{\overline{LY}}=-\frac{\overline{LN}}{\overline{PM}}\frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}}=-\frac{\overline{NC}}{\overline{LB}}\frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}}=-1\,(1)$$

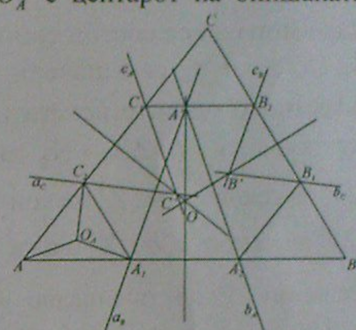
Од обратната теорема на Чева правите KL, MN и PQ се сечат во една точка или се паралелни.(1) Без губење на општоста може да претпоставиме дека p_B е меѓу p_A и p_C. Ако q_B не е меѓу q_A и q_C како на цртежот очигледно е дека правите не може да се паралелни. Ако q_B е меѓу q_A и q_C, тогаш за правите да бидат паралелни треба $\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{AN}}$, но тогаш $\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{KB}}{\overline{MC}}$, па AB е паралелна со AC, што не е можно бидејќи ABC е триаголник.(2)

Изборен натпревар за ИМО 2013
08.04.2013

1. На страните на остроаголен триаголник ABC лежат точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2, така што $\overline{AA_1}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_2B}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{BB_1}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_2C}=\frac{1}{3}\overline{BC}$ и $\overline{CC_1}=\overline{C_1C_2}=\overline{C_2A}=\frac{1}{3}\overline{CA}$. Нека k_A, k_B и k_C се опишаните кружници на триаголниците AA_1C_2, BB_1A_2 и CC_1B_2 соодветно, a_B и a_C се тангентите на k_A во A_1 и C_2, b_C и b_A се тангентите на k_B во B_1 и A_2 и c_A и c_B се тангентите на k_C во C_1 и B_2. Докажи дека нормалите спуштени од пресекот на a_B и b_A на AB, пресекот на b_C и c_B на BC и пресекот на c_A и a_C на CA се сечат во една точка.

Решение. Да ги означиме пресеците на a_B, b_C и c_A соодветно со b_A, c_B и a_C со A', B' и C'. Триаголникот AA_1C_2 е сличен на ABC, бидејќи имаат заеднички агол и страните им се во сооднос 1:3.(1) Нека O_A е центарот на опишаната кружница на триаголникот AA_1C_2, тогаш:

$$\angle O_AA_1A=\tfrac{1}{2}\left(180^\circ-\angle AO_AA_1\right)=90^\circ-\angle AC_2A_1=90^\circ-\gamma$$



Бидејќи a_B е нормална на O_AA_1 следува дека аголот меѓу a_B и AB е еднаков на

$$180^\circ-90^\circ-\left(90^\circ-\gamma\right)=\gamma \text{ .(3)}$$

Аналогно и аголот меѓу b_A и AB е еднаков на γ, па триаголникот A_1A_2A' е рамнокрак со основа A_1A_2, то ест нормалата на AB низ C' минува низ средината на A_1A_2, која е истовремено и средина на AB,(4) па нормалата минува и низ центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC. Од причини на симетрија сите три нормали минуваат низ центарот на опишаната кружница, то ест низ една точка.(2)

2. а) Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на бројот n. После запирката ги пишуваме еден по друг броевите $S(1),S(2),\ldots$. Докажи дека бројот што се добива е ирационален.

б) Нека $P(n)$ е производот на цифрите на бројот n. После запирката ги пишуваме еден по друг броевите $P(1),P(2),\ldots$. Докажи дека бројот што се добива е ирационален.

Решение. а) Бројот $0,S(1)S(2)\ldots$ е ирационален ако е непериодичен. Да претпоставиме дека бројот е периодичен и нека периодот има должина d. Јасно е дека периодот мора да содржи цифри различни од 0 бидејќи во спротивно бројот би бил од облик $0,S(1)S(2)\ldots S(k)$ и секогаш постои број поголем од k чиј збир на цифри е различен од 0.(на пример 10^m за доволно голем m е поголем од k а збирот на цифри му е 1). Меѓутоа, постои доволно голем природен број чиј што збир на цифри завршува на

$2d$ нули. (11...11 со 10^{2d} единици е таков што е поголем од збирот на цифри му е 10^{2d}). Тогаш периодот со должина d мора да се јави целосно во бројот $S(10^{2d})$, од каде мора да се состои само од нули.

б) Бројот $0,P(1)P(2)...$е ирационален ако е непериодичен. Да претпоставиме дека бројот е периодичен и нека периодот има должина d. Јасно е дека периодот мора да содржи цифри различни од 0 бидејќи во спротивно бројот би бил од облик $0,P(1)P(2)...P(k)$ и секогаш постои број поголем од k чиј производ на цифри е различен од 0.(на пример 11...1 со доволно многу единици е поголем од k а производот на цифри му е 1). Броевите од облик $\underbrace{22...2}_{m}\underbrace{55...5}_{m}$ може да се изберат произволно големи и јасно е дека производот на цифри на тие броеви е 10^m . Ако го избереме $m > 2d$, тогаш периодот мора целосно да се јави во бројот $S(\underbrace{22...2}_{m}\underbrace{55...5}_{m})$ од каде мора да се состои само од нули.

3. Со $\mathbb{Z}^*$ и $\mathbb{N}_0$ се означени множеството од сите ненулти цели броеви и множеството од сите ненегативни цели броеви, соодветно. Најди ги сите пресликувања $f:\mathrm{Z}^* \to \mathrm{N}_0$ за кои се исполнети следниве два услови :

(1) за секои $a,b \in \mathrm{Z}^*$ за кои $a+b \in \mathrm{Z}^*$ важи $f(a+b) \geq \min\{f(a), f(b)\}$;

(2) за секои $a,b \in \mathrm{Z}^*$ важи $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Решение. Едно тривијално решение е константното пресликување $f \equiv 0$. Нека f е едно нетривијално пресликување за кое важат (1) и (2). Ќе покажеме дека постои природен број c и прост број p за кои е исполнето $f(a) = c\nu_p(a)$ за секој $a \in \mathrm{Z}^*$, каде $\nu_p(a) :=$ експонентот на p во канонската факторизација на a: да забележиме најпрво дека $f(1) = f(-1) = 0$ (доказ:

$$f(1) = f(1\cdot 1) = f(1) + f(1),\ f(1) = f((-1)\cdot(-1)) = f(-1) + f(-1));$$

од ова и од (2) следува дека постои прост број p за кој $f(p) \neq 0$; за $c := f(p)$ ќе покажеме дека важи $f(a) = c\nu_p(a)$ за секој $a \in \mathrm{Z}^*$; имено, за секој прост број $q \neq p$ постојат ненулти цели броеви α, β за кои $1 = \alpha p + \beta q$, па исполнето е неравенството $0 = f(\alpha p + \beta q) \geq \min\{f(\alpha p), f(\beta q)\}$; од

$$f(\alpha p) = f(\alpha) + f(p) \geq f(p) = c \neq 0$$

следува $f(\beta q) = 0$ и $f(q) = 0$; нека $a = \pm p^k q^\beta r^\gamma \ldots$ е канонската факторизација на a; тогаш

$$f(a) = f(\pm p^k) + f(q^\beta) + f(r^\gamma) + \ldots = f(\pm 1) + f(p^k) = kf(p) = c\nu_p(a)$$

Останува да забележиме дека секое вакво пресликување ги исполнува условите (1) и (2) па претставува нетривијално решение на поставениот проблем.

Време за работа 3 часа