I година

1. Колку има петцифрени броеви од облик $\overline{37abc}$, такви што секој од броевите $\overline{37abc}$, $\overline{37bca}$ и $\overline{37cab}$ е делив со 37?

Решение. Петоцифрениот број $\overline{37abc}$ е делив со 37 ако и само ако бројот $\overline{abc}$ е делив со 37. Нека означиме $x=\overline{abc}, y=\overline{bca}$ и $z=\overline{cab}$. Тогаш,

$$x=100a+10b+c,\quad y=100b+10c+a,\quad z=100c+10a+b$$

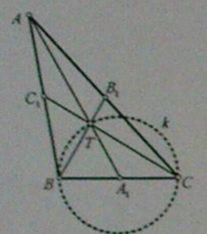
или

$$10x-y=999a,\quad 10y-z=999b,\quad 10z-x=999c$$

Бидејќи 999 е содржател на 37, т.е. $999=37\cdot 27$, од претходното следи дека ако некој од броевите x,y или z е делив со 37, тогаш такви се и другите.

Па, сите барани броеви се броевите чии последни три цифри образуваат број кој е содржател на 37, т.е. 37 000, 37 037, 37 074, 37 111, ..., 37 999.

Од тоа што $999=37\cdot 27$, вакви броеви има 28 на број.



2. Во еден триаголник должината на една тежишна линија е подолга за половина должина од должината на страната кон која е повлечена. Најди го аголот меѓу другите две тежишни линии.

Решение. Нека ABC е триаголник во кој тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во точката T при што $\overline{AA_1}=\frac{3}{2}\overline{BC}$.

Од својството и атежишни линии во еден триаголник, и од условот на задачата имаме

$$\overline{TA_1}=\frac{1}{3}\overline{AA_1}=\frac{1}{2}\overline{BC}.$$

Значи, во триаголникот CTB, должината на тежишната линија TA_1 е половина од должината на страната кон која е повлечена. Значи, точките B,T и C се еднакво оддалечени од точката A_1. Според тоа тие припаѓаат на кружница со центар во A_1 и радиус $\frac{1}{2}\overline{BC}$. Значи $\angle BTC=90^\circ$, односно тежишните линии BB_1 и CC_1 се сечат под прав агол.

3. Нека a,b,c се попарно различни релани броеви, такви што $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Докажи дека $a+\frac{1}{b}=-abc$.

Решение. Нека $p=a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Треба да се докаже дека $p=-abc$. Ги множиме равенствата со b,c,a соодветно и добиваме:

$$ab+1=pb,\quad bc+1=pc,\quad ca+1=pa.$$

Потоа ги одземаме и се добива:

$$b(a-c)=p(b-c),\quad c(b-a)=p(c-a),\quad a(c-b)=p(a-b),$$

а ако овие три равенства се помножат се добива:

$$abc(a-c)(b-a)(c-b)=p^3(b-c)(c-a)(a-b) \qquad (*)$$

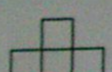
Од почетните равенства добиваме:

$$a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{b-c}{bc},\qquad b-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{c-a}{ac},\qquad c-a=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab},$$

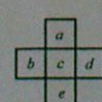
па со нивно множење имаме:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(abc)^2}$$

Броевите се попарно различни, па според тоа $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$. Од последното равенство имаме $(abc)^2=1\Rightarrow abc=\pm1$. Од (*) и последното следи дека $p^3=-abc=\mp1 \quad\Rightarrow p=-abc$.



4. Дали може природните броеви од 1 до 100 да се запишат во квадратна шема 10×10, секој број во едно квадратче, секој од броевите да се јавува само еднаш и збирот на броевите во секоја од фигурите како на цртежот (или истата ротирана) да биде парен број?



Решение. Ги разгледуваме броевите кои се внесени во фигурата во облик на крст (дадена на цртежот). Од условот на задачата $a+b+c+d=2m$ и $b+c+d+e=2n$. Добиваме дека $a-e=2(m-n)$ од каде мора a и e да се со иста парност. Аналогно добиваме дека b и d се со иста парност. Исто така од $a+b+c+d=2m$ и од тоа што b и d се со иста парност добиваме дека $a+b$ е парен па и a и b се со иста парност. Исто така од $c=2m-a-b-d$ е со иста парност како и другите броеви. Добиваме дека секој од броевите на сликата е со иста парност. Квадратната шема ќе биде пополнета со броеви кои што се со иста парност(освен можеби броевите кои се наоѓаат на неговите краеви). Такви се вкупно 4 па како и да се пополнат тие 4 полиња за остатокот од шемата потребни се 96 парни или непарни броеви. Меѓутоа броевите од 1 до 100 се вкупно 50 парни и 50 непарни.

Сојуз на математичари на Македонија
55-ти Републички натпревар по математика

II година

1. Реши ја равенката $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$

Решение. За дефинициона област добиваме $D=[-3,-1]\cup(0,+\infty)$. Тогаш,

$$x^2+x+1+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{x^2+x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=x+3,\qquad x^2-2+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{(x+1)\frac{x^2+1}{x}}=0,\qquad \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{(x+1)\frac{x^2+1}{x}}=0$$

Оттука, $\begin{cases} x-\frac{1}{x}=0 \\ (x+1)(x^2+1)=0\end{cases}$ и добиваме дека $x=-1$, што е решение и на дадената равенка.

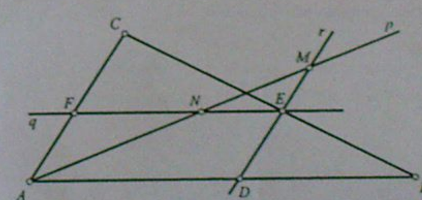
2. Даден е комплексниот број $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Пресметај го производот:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\cdots\left(z^{2012}+\frac{1}{z^{2012}}\right)$$

Решение. Од $z^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ и $z^3=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1+3}{4}=1$ следува:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\cdots\left(z^{2012}+\frac{1}{z^{2012}}\right)=\left((z+z^2)(z^2+z)(1+1)\right)^{670}(z+z^2)(z^2+z)=2^{670}(z^2+z)^{1342}=$$
$$=2^{670}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{1342}=2^{670}(-1)^{1342}=2^{670}$$

3. Нека E е произволна точка на страната BC од триаголникот ABC, а p е произволна права која минува низ точката A. Правата q минува низ E, паралелна е со AB и $q\cap p=\{N\}$, а правата r минува низ E, паралелна е со AC и $r\cap p=\{M\}$. Докажи дека CN и MB се паралелни прави.



Решение. Да ги означиме пресечните точки на r и AB и на q и AC со D и F, соодветно. Тогаш четириаголникот $ADEF$ е паралелограм. Уште, триаголниците FAN и DMA се слични (бидејќи $\angle F=\angle D, \angle A=\angle M$), како и триаголниците CFE и EDB (од паралелноста на q и AB и на r и AC). Имаме

$$\frac{\overline{FN}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{FN}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DM}}\cdot\frac{\overline{ED}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DM}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DM}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DM}}.$$

Од $\frac{\overline{FN}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DM}}$ и $\angle CFN=\angle MDB$ следува дека триаголниците CFN и MDB се слични, а бидејќи по две страни им се паралелни следува дека CN и MB се паралелни.

4. Равенките $x^2+px-q=0$ и $x^2-px+q=0$, $p,q>0$, имаат целобројни решенија. Докажи дека постои правоаголен триаголник чиишто должини на катетите се природни броеви, должината на хипотенузата е p а плоштината на триаголникот е q.

Решение. Нека x_1' и x_2' се решенија на $x^2+px-q=0$, а x_1'' и x_2'' се решенија на $x^2-px+q=0$. Тогаш, од виетовите формули добиваме дека p и q се природни броеви. Нека $d=\sqrt{p^2+4q}$ и $e=\sqrt{p^2-4q}$. Тогаш, $x_{1,2}'=\frac{-p\pm d}{2}$ и $x_{1,2}''=\frac{p\pm e}{2}$ и затоа p има иста парност со d и e, а оттука d и e имаат иста парност. Јасно, $d>e$ па ако ставиме $a=\frac{d+e}{2}$ и $b=\frac{d-e}{2}$ добиваме дека a и b се природни броеви. Имаме

$$\frac{a\cdot b}{2}=\frac{\frac{d+e}{2}\cdot\frac{d-e}{2}}{2}=\frac{d^2-e^2}{8}=\frac{8q}{8}=q$$

и

$$a^2+b^2=\left(\frac{d+e}{2}\right)^2+\left(\frac{d-e}{2}\right)^2=\frac{2}{4}(d^2+e^2)=\frac{1}{2}2p^2=p^2.$$

Значи, a и b се катети на правоаголен триаголник со хипотенуза p и плоштина q.

17.03.2012 година, Машински факултет-Скопје

III година

1. Нека $x,a,b,c\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ и $b^2=ac$. Докажи дека $\dfrac{\log_a x}{\log_c x}=\dfrac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}$.

Решение. Користејќи ги својствата на логаритмите, изразот на десната страна го трансформираме на следниот начин:

$$\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}=\frac{\frac{1}{\log_x a}-\frac{1}{\log_x b}}{\frac{1}{\log_x b}-\frac{1}{\log_x c}}=\frac{\frac{\log_x b-\log_x a}{\log_x a\cdot\log_x b}}{\frac{\log_x c-\log_x b}{\log_x c\cdot\log_x b}}=\frac{\log_x c}{\log_x a}\,\frac{\log_x b-\log_x a}{\log_x c-\log_x b}=\frac{\log_a x}{\log_c x}\,\frac{\log_x\frac{b}{a}}{\log_x\frac{c}{b}}$$

Од условот $b^2=ac$, забележуваме дека $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$, па и $\log_x\frac{b}{a}=\log_x\frac{c}{b}$. Конечно, по кратењето добиваме

$$\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}=\frac{\log_a x}{\log_c x}$$

2. Во множеството цели броеви реши ја равенката $x^2=3^y+7$.

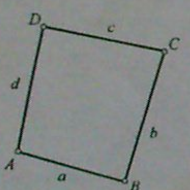
Решение. Бидејќи $x^2,7\ge 0$, а $x^2=8$ и $x^2=10$ (за $y=0,y=1$) немаат решение во множеството цели броеви, јасно е дека $y\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Да забележиме дека 3^y+7 е парен број, па и x^2 е парен, а од таму и x е парен. Од тука следува дека десната страна на равенката е делива со 4. Нека y е непарен, односно $y=2k+1$.

Тогаш $x^2=3^{2k+1}+7=3\cdot 3^{2k}-3+10=3(3^k-1)(3^k+1)+10$. Да забележиме дека x^2 и $3(3^k-1)(3^k+1)$ се деливи со 4, а 10 не е. Заради добиената контрадикција, заклучуваме дека мора y да е парен број. Нека $y=2s, s\ge 1$.

Сега, $x^2=3^{2s}+7$, односно $(x-3^s)(x+3^s)=7$, каде $x-3^s<x+3^s$. Тогаш можни се само следниве два случаи:

а) $\begin{cases}x-3^s=1\\x+3^s=7\end{cases}$, од каде $x=4, s=1$ и б) $\begin{cases}x-3^s=-7\\x+3^s=-1\end{cases}$, од каде $x=-4, s=1$.

Можни решенија на почетната равенка се $(4,2),(-4,2)$, а за истите со проверка се добива дека се решенија на почетната равенка.



3. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник со плоштина $P=\frac{1}{2}(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{DA})$. Докажи дека четириаголникот е тетивен.

Решение. Нека должините на страните на четириаголникот ги означиме како на цртежот. Нека $\beta=\angle ABC$ и $\delta=\angle CDA$. Тогаш за плоштината на четириаголникот $ABCD$ имаме $P=\frac{1}{2}(ab\sin\beta+cd\sin\delta)$. Од условот на задачата добиваме:

$$ab+cd=2P=ab\sin\beta+cd\sin\delta\le ab+cd.$$

А равенство се достигнува ако и само ако $\sin\beta=1$ и $\sin\delta=1$, односно $\beta=\delta=\frac{\pi}{2}$. Од ова следува тврдењето на задачата.

4. Реши ја равенката $\cos^n x-\sin^n x=1$, каде n природен број.

Решение. Ќе ги разгледаме прво случаите за $n=1$ и $n=2$.

Ако $n=1$, равенката добива облик $\cos x-\sin x=1$, која ја трансформираме до $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$, односно до $2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0$. Тогаш $\sin\frac{x}{2}=0$ или $\sin\frac{x}{2}=-\cos\frac{x}{2}$, па решенија на равенката се $x=2k\pi$ или $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, за k цел број.

Ако $n=2$, равенката добива облик $\cos^2 x-\sin^2 x=1$, односно $\cos 2x=1$. Тогаш решенија се сите броеви во облик $x=k\pi$, за k цел број.

Сега, нека $n>2$ и нека $\sin x\ne 0,\cos x\ne 0$. Да забележиме дека во тој случај $|\cos x|,|\sin x|\in(0,1)$ и дека $|\cos x|^n<\cos^2 x, |\sin x|^n<\sin^2 x$. Тогаш

$$\cos^n x-\sin^n x\le|\cos^n x-\sin^n x|\le|\cos x|^n+|\sin x|^n<\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

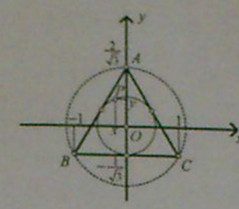
па добиваме контрадикција. Јасно, претпоставката $\sin x\ne 0,\cos x\ne 0$ не е точна, па за $n>2$, мора барем една од функциите да има вредност 0.

Доколку n е парен број, равенката $\cos^n x-\sin^n x=1$ има решение за $\sin x=0$, $\cos x=\pm 1$, а тоа е можно само за $x=k\pi$, за k цел број. Ова е истото решение кое е добиено за $n=2$.

Доколку n е непарен број, равенката $\cos^n x-\sin^n x=1$ има решение во случај кога $\cos x=1,\sin x=0$ или $\cos x=0,\sin x=-1$. Решенијата се тогаш истите од случајот кога $n=1$, односно $x=2k\pi$ или $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, за k цел број.

Сојуз на математичари на Македонија
55-ти Републички натпревар по математика

IV година



1. Точката P припаѓа на впишаната кружница k во рамностраниот триаголник ABC. Ако должината на страната на триаголникот е 2, докажи дека $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=5$.

Решение. Ќе поставиме координатен систем со координатен почеток во центарот на впишаната кружница, а x-оската да е паралелна со една страна на триаголникот. Тогаш $A\left(0,\frac{2}{\sqrt3}\right)$, $B\left(-1,-\frac{1}{\sqrt3}\right)$ и $B\left(1,-\frac{1}{\sqrt3}\right)$. Радиусот на впишаната кружница е $r=\frac{1}{\sqrt3}$. Точката P има координати (x,y) такви што $x^2+y^2=r^2=\frac{1}{3}$. Сега,

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\left[x^2+\left(y-\frac{2}{\sqrt3}\right)^2\right]+\left[(-1-x)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt3}-y\right)^2\right]+\left[(1-x)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt3}-y\right)^2\right]=3(x^2+y^2)+4=3\frac{1}{3}+4=5$$

2. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=a_n-a_n^2$. Дали $a_{999}<\frac{1}{1000}$?

Решение. I начин. Од $a_{n+1}=a_n-a_n^2$ се добива дека $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(1-a_n)}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{1-a_n}$. Оттука,

$$\frac{1}{a_{999}}=\frac{1}{a_{998}}+\frac{1}{1-a_{998}}=\frac{1}{a_{997}}+\frac{1}{1-a_{997}}+\frac{1}{1-a_{998}}=\ldots=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{1-a_1}+\frac{1}{1-a_2}+\ldots+\frac{1}{1-a_{998}}.$$

Имајќи во предвид дека $0<a_n<1$, добиваме $\frac{1}{1-a_n}>1$. Следува $\frac{1}{a_{999}}=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=1}^{998}\frac{1}{1-a_n}>2+998=1000$. Од овде $a_{999}<\frac{1}{1000}$.

II начин. Ја формираме низата $b_n=\frac{1}{a_n}$. Тогаш, $b_1=2$, $b_{n+1}=\frac{1}{\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_n^2}}=b_n+1+\frac{1}{b_n-1}>b_n+1$. Оттука, $b_n>b_1+(n-1)=n+1$, па $b_{999}>1000$, од каде $a_{999}<\frac{1}{1000}$.

3. Функцијата f е дефинирана на множеството ненегативни цели броеви $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, и има вредности во истото множество $\mathbb{N}_0$. За секој $n\in\mathbb{N}$ е исполнето $f(f(n))+f(n)=2n+3$. Да се најде $f(2012)$.

Решение. За $n=0$ имаме дека $f(0)+f(f(0))=3$, па имајќи во предвид дека $f(f(0))\ge 0$, следува дека $0\le f(0)\le 3$, $f(0)\in N_0$.

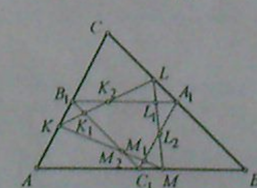
а) Нека $f(0)=0$, тогаш $f(f(0))=f(0)=0$. Па, $3=f(0)+f(f(0))=0$, што е контрадикција. Значи $f(0)\ne 0$.

б) Нека $f(0)=1$. Тогаш $f(f(0))=f(1)=2$. Од $5=f(1)+f(f(1))=f(1)+f(2)$ се добива дека $f(2)=3$. Со индукција ќе покажеме дека $f(n)=n+1$. Нека тврдењето е точно за $k\le n$, односно $f(k)=k+1$. Тогаш $2k+3=f(k)+f(f(k))=k+1+f(k+1)$. Од овде $f(k+1)=k+2$, па согласно принципот на математичка индукција $f(n)=n+1$ за секој n. Согласно ова, $f(2012)=2013$.

в) Нека $f(0)=2$. Тогаш $f(2)=1$, па $7=f(2)+f(f(2))=1+f(1)$. Следува $f(1)=6$. Но, $5=f(1)+f(f(1))$, од каде $f(1)\le 5$, што е контрадикција.

г) Нека $f(0)=3$. Тогаш $f(3)=0$. Но, $3=f(0)+f(f(0))=f(0)+f(3)=f(3)+f(f(3))=9$, па ова е повторно контрадикција.

Значи $f(n)=n+1$, па $f(2012)=2013$.



4. Триаголникот ABC има плоштина 1, A_1 е средина на BC, B_1 е средина на AC и C_1 е средина на AB. Нека M е точка на отсечката C_1B, L е точка на отсечката A_1C и K е точка на отсечката B_1A. Колкава е најмалата заедничка плоштина на триаголниците $A_1B_1C_1$ и KLM?

Решение: Точките M_1 и M_2, L_1 и L_2, K_1 и K_2 ги означуваме како на цртежот. Да забележиме дека $\frac{\overline{C_1M_1}}{M_1L_2}\le\frac{\overline{AK}}{KC}\le\frac{\overline{AB_1}}{B_1C}=1$. Од ова добиваме дека $P_{\Delta C_1M_1M_2}\le P_{\Delta M_1L_2M_2}$. Аналогно, се добива $P_{\Delta A_1L_1L_2}\le P_{\Delta L_1L_2K_2}$ и $P_{\Delta B_1K_1K_2}\le P_{\Delta K_1K_2M_2}$. Нека со P ја означиме заедничката плоштина на триаголниците $A_1B_1C_1$ и KLM. Тогаш

$$P_{\Delta A_1B_1C_1}-P=P_{\Delta C_1M_1M_2}+P_{\Delta A_1L_1L_2}+P_{\Delta B_1K_1K_2}\le P_{\Delta M_1L_2M_2}+P_{\Delta L_1L_2K_2}+P_{\Delta K_1K_2M_2}=P-P_{\Delta M_2L_2K_2}\le P.$$

Односно $P\ge\frac{1}{2}P_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{1}{8}$. Да забележиме дека вредноста $\frac{1}{8}$ се достигнува и тоа ако, на пример, избериме $M\equiv C_1$, $L\equiv C$ и $K\equiv B_1$.