19-та Македонска математичка олимпијада

19-та МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

07.04.2012 ПМФ-Скопје

1. Реши ја равенката $x^4+2y^4+4z^4+8t^4=16xyzt$ во множеството цели броеви.

Решение. Јасно е дека $(0,0,0,0)$ е решение на равенката. Ќе покажеме дека ненулто решение на равенката не постои. Нека претпоставиме спротивно односно нека $(x_\circ,y_\circ,z_\circ,t_\circ)$ е решение на равенката со барем една ненулта координата. Јасно е дека $x_\circ$ е делив со 2. Па го запишуваме од облик $x_\circ=2x_1$ за некој $x_1\in\mathbb{Z}$ и заменуваме во првата равенка при што после кратење со 2 добиваме равенка $y_\circ^4+2z_\circ^4+4t_\circ^4+8x_1^4=16x_1y_\circ z_\circ t_\circ$. Сега, бројот $y_\circ$ е делив со 2 па $y_\circ=2y_1$ за некој $y_1\in\mathbb{Z}$. Повторно заменуваме во последната равенка и кратиме со 2 при што добиваме $z_\circ^4+2t_\circ^4+4x_1^4+8y_1^4=16x_1y_1z_\circ t_\circ$. Аналогно, бројот $z_\circ$ е делив со 2, па $z_\circ=2z_1$, за $z_1\in\mathbb{Z}$. Заменуваме во последната равенка и кратиме со 2 после што добиваме равенка $t_\circ^4+2x_1^4+4y_1^4+8z_1^4=16x_1y_1z_1t_\circ$. Бројот $t_\circ$ е делив со 2 односно $t_\circ=2t_1$ за $t_1\in\mathbb{Z}$. После заменувањето и кратењето со 2 ја добиваме равенката $x_1^4+2y_1^4+4z_1^4+8t_1^4=16x_1y_1z_1t_1$. Добиваме дека четворката (x_1,y_1,z_1,t_1) е исто така решение на првата равенка. Аналогно продолжувајќи ја постапката добиваме четворки целобројни решенија на првата равенка (x_2,y_2,z_2,t_2), (x_3,y_3,z_3,t_3),... при што во $4n$-тиот чекор $(x_n,y_n,z_n,t_n)=\left(\frac{x_\circ}{2^n},\frac{y_\circ}{2^n},\frac{z_\circ}{2^n},\frac{t_\circ}{2^n}\right)$, што е контрадикција со целобројноста на добиените решенија.

Значи единствено решение е $(0,0,0,0)$.

2. Ако a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што $abcd=1$ тогаш докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1}\le 2$$

Решение 1. Со множење на $1+bc+cd+da$ и $1+ab$ добиваме

$$(1+bc+cd+da)(1+ab)=1+bc+cd+da+ab+ab^2c+abcd+a^2bd=$$
$$=2+ab+bc+cd+da+\frac{b}{d}+\frac{a}{c}$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните броеви $\frac{b}{d}$ и $\frac{a}{c}$, како и од $abcd=1$ добиваме, $\frac{b}{d}+\frac{a}{c}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{cd}}=2ab$, па затоа важи неравенството

$$(1+bc+cd+da)(1+ab)\ge 2+2ab+ab+bc+cd+da,$$

т.е.

$$1+bc+cd+da\ge 2+\frac{ab+bc+cd+da}{1+ab}$$

или

$$\frac{1+ab}{ab+bc+cd+da}\ge\frac{1}{bc+cd+da-1} \qquad (1)$$

Аналогно се добива

$$\frac{1+bc}{ab+bc+cd+da}\ge\frac{1}{ab+cd+da-1} \qquad (2)$$

$$\frac{1+cd}{ab+bc+cd+da}\ge\frac{1}{ab+bc+da-1} \qquad (3)$$

и

$$\frac{1+da}{ab+bc+cd+da}\ge\frac{1}{ab+bc+cd-1} \qquad (4)$$

Со собирање на (1),(2),(3) и (4) се добива неравенството

$$\frac{4+ab+bc+cd+da}{ab+bc+cd+da}\ge\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1}$$

Бидејќи $ab+bc+cd+da\ge 4\sqrt[4]{(abcd)^2}=4$ следува

$$\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1}\le 1+\frac{4}{ab+bc+cd+da}\le 2$$

што требаше да се докаже.

Решение 2. Ќе воведеме смени $ab=p$ и $bc=q$. Според тоа $cd=\frac{1}{p}$ и $ad=\frac{1}{q}$, па даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{q+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}+\frac{1}{p+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}+\frac{1}{p+q+\frac{1}{q}-1}+\frac{1}{p+q+\frac{1}{p}-1}\le 2.$$

Од друга страна, ако ги искористиме неравенствата $p+\frac{1}{p}\ge 2$ и $q+\frac{1}{q}\ge 2$ добиваме

$$\frac{1}{q+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}+\frac{1}{p+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}+\frac{1}{p+q+\frac{1}{q}-1}+\frac{1}{p+q+\frac{1}{p}-1}\le\frac{1}{1+\frac{1}{p}}+\frac{1}{1+\frac{1}{q}}+\frac{1}{1+p}+\frac{1}{1+q}=$$
$$=\frac{p}{p+1}+\frac{1}{p+1}+\frac{q}{q+1}+\frac{1}{q+1}=2.$$

3. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ кои ги задоволуваат условите:

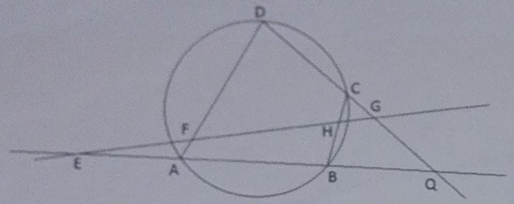
$$f(x+y)<f(x)+f(y)$$
$$f(f(x))=[x]+2.$$

Решение. Нека $f(0)=a$, тогаш $f(a)=f(f(0))=2$, $f(2)=f(f(a))=a+2$. Со продолжување на оваа постапка добиваме дека $f(2k)=a+2k$ и $f(a+2k)=2k+2$. $2k+2=f(a+2k)<f(a)+f(2k)=2+a+2k$, од каде $a>0$. Ако ставиме $x=y=a$ добиваме $a+2a=f(2a)<f(a)+f(a)=4$, па $3a<4$, то ест $a=1$. Оттука со примена на $f(2k)=a+2k$ и $f(a+2k)=2k+2$ добиваме $f(x)=x+1$, за сите природни броеви x. За $x=y=\frac{1}{2}$ во неравенството добиваме $2=f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)<2f\left(\frac{1}{2}\right)$, па $f\left(\frac{1}{2}\right)>1$. Од друга страна $1+f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=2$, па $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, што е контрадикција. Следува дека не постои функција која ги задоволува бараните услови.

4. Нека е дадена фиксна кружница k и три колинеарни точки E, F и G така што E и G лежат надвор од кружницата и F лежи внатре во кружницата. Докажи дека ако $ABCD$ е произволен четириаголник, впишан во кружницата k таков што продолженијата на страните AB, AD и DC минуваат низ E, F и G соодветно, тогаш неговата страна BC минува низ фиксна точка, колинеарна со E, F и G, која што не зависи од четириаголникот $ABCD$.

Решение. Нека $ABCD$ е таков четириаголник. Да забележиме дека, од условот на задачата, правата EG ја сечи страната BC во внатрешна точка. Да ја означиме таа точка со H. Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. Правите AB и CD не се паралелни.



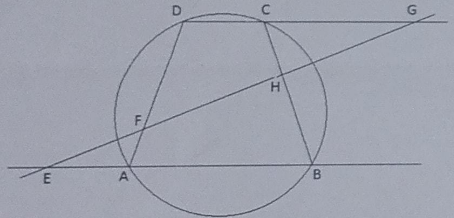
Нека тие се сечат во точка Q. Од теоремата на Менелај за триаголникот EQG и правата CB и DA имаме

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{CG}}\cdot\frac{\overline{GH}}{\overline{HE}}\cdot\frac{\overline{EB}}{\overline{BQ}}=1,\ \frac{\overline{QD}}{\overline{DG}}\cdot\frac{\overline{GF}}{\overline{FE}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{AQ}}=1$$

Ако ги помножиме последните две равенства и искористеме дека $\overline{QC}\cdot\overline{QD}=\overline{BQ}\cdot\overline{AQ}$, бидејќи тоа е степенот на точката Q во однос на кружницата k, добиваме $\frac{\overline{GH}}{\overline{CG}}\cdot\frac{\overline{EB}}{\overline{HE}}\cdot\frac{\overline{GF}}{\overline{DG}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{FE}}=1$. Односно

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{HE}}=\frac{\overline{CG}\cdot\overline{DG}}{\overline{EB}\cdot\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{FE}}{\overline{GF}} \qquad (1)$$

Да забележиме дека $\overline{CG}\cdot\overline{DG}$ и $\overline{EB}\cdot\overline{EA}$ се степените на точките G и E во однос на кружницата k, соодветно и тие не зависат од изборот на четириаголникот $ABCD$. $\overline{FE}$ и $\overline{GF}$ јасно е дека не зависат од изборот на четириаголникот $ABCD$.



Случај 2. Правите AB и CD се паралелни.

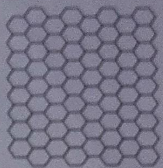
Јасно е дека $\Delta GCH \sim \Delta EBH$ и $\Delta GFD \sim \Delta EFA$. Од сличноста, имаме $\frac{\overline{GH}}{\overline{EH}}=\frac{\overline{GC}}{\overline{EB}}$, $\frac{\overline{EA}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{GD}}{\overline{GF}}$. Ако ги помножиме последните две равенства, добиваме $\frac{\overline{GH}}{\overline{EH}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{GC}}{\overline{EB}}\cdot\frac{\overline{GD}}{\overline{GF}}$, односно

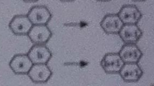
$$\frac{\overline{GH}}{\overline{EH}}=\frac{\overline{GC}\cdot\overline{GD}}{\overline{EB}\cdot\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{FE}}{\overline{GF}}, \qquad (2)$$

што е во сушност, исто како во првиот случај.

Заклучуваме дека страната BC ја сечи правата EG во точка H за која важи (1) (што е исто со (2)). Бидејќи E и G лежат надвор од кружницата и F лежи внатре во кружницата и продолженијата на страните AB, AD и DC минуваат низ E, F и G соодветно, ако $ABCD$ е произволен четириаголник кој го исполнува условот на задачата, точката H што се добива како пресек на правата EG и страната BC мора да лежи помеѓу F и H. Од ова и (1) (односно (2)) следува дека точката H е единствена, односно не зависи од изборот на четириаголникот $ABCD$.

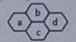
5. Дадена е шестоаголна табела, како на цртежот, која има 2012 колони. Во непарните колони има по 2012 шестоаголници, а во парните има по 2013 шестоаголници. Во секој шестаголник од i-тата колона е запишан бројот i. Дозволени се промени на броевите во табелата на следниот начин: Произволно избираме три соседни шестоаголници, ги ротираме броевите, и ако ротацијата е во насока на стрелките на часовникот тогаш трите броеви ги намалуваме за еден, а ако ги ротираме во насока спротивна на стрелките на часовникот трите броеви ги зголемуваме за еден (види цртеж). Колку најмногу нули може да се добијат во табелата со користење на вака дефинираните потези.

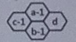




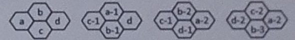
Решение. Збирот на сите броеви во табелата со секој потез се менува за +3 или -3, што значи дека во секој потез ќе дава остаток 2 при делење со 3.

Ако имаме фигура како на сликата десно на местото на бројот d после конечно многу потези можеме да добиеме нула на следниот начин. Ако d, $c+1$ или $b-1$ е делив со 3, тоа ќе го направиме со ротирање на броевите b, c и d. Ако b е делив со 3:



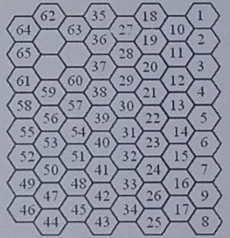


На овој начин на местото на c добиваме број кој дава остаток -1 и го применуваме првиот случај. Ако $b+1$ е делив со 3:

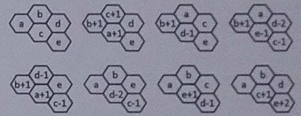


На овој начин на местото на c добиваме број кој дава остаток -1 и го применуваме првиот случај.

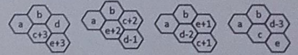
Со оваа постапка сите броеви освен три, на пример вториот и третиот од втората колона и вториот од третата колона може да ги направиме нули. Постапката за тоа е следнава(види цртеж),каде бројките се редоследот во кој се добиваат нулите во шестоаголниците.



Со следната низа на потези произволен од овие три броеви може да се намали за 3 или со обратна низа аналогно да се зголеми за 3.



Симетрично можеме да го зголемиме c за 2, а e за 1. После три ротации по стрелките на часовникот добиваме:



Ова значи дека преостанатите три броеви може да се сведат на 0, 1 или 2. Бидејќи нивниот збир по модул 3 е еднаков на 2 следува дека два од нив мора да се еднакви (или се две нули, една двојка, или две единици една нула или две двојки една единица). Во секој од овие случаи двата кои се еднакви може да се сведат на нула, а тој што преостанува на 2. Според ова се добива дека сите елементи од табелата освен еден може да се направи да бидат нули.