Решенија на задачите

1. Нека $a,b,c,d>0$ и $a+b+c+d=1$. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d}\geq 2.$$

Решение. Нека

$$x_1=4a+3b+c; x_2=3a+b+4d; x_3=a+4c+3d; x_4=4b+3c+d.$$

Да забележиме дека

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8.$$

Тогаш

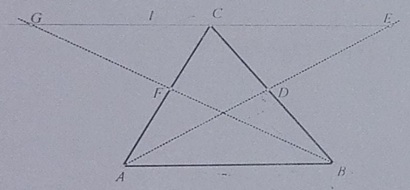
$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)(x_1+x_2+x_3+x_4)\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}}\cdot 4\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=16,$$

односно

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\geq\frac{16}{x_1+x_2+x_3+x_4}=2,$$

што и требаше да се докаже.

2. Нека е даден остроаголниот триаголник ABC. Повлечена е права l паралелна со AB која минува низ C. Нека симетралите на аглите $\angle BAC$ и $\angle ABC$ ги сечат страните BC и AC во точки D и F, а правата l во точки E и G соодветно. Докажи дека ако $\overline{DE}=\overline{GF}$ тогаш $\overline{AC}=\overline{BC}$.



Решение. Најпрво ќе ја покажеме оваа лема.

Лема. Ако во триаголникот ABC AD е симетрала на аголот $\angle BAC$ тогаш $\overline{CD}=\frac{ab}{b+c}$.

Доказ на лемата. Знаеме дека важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{b}{c}$. Од ова следува

$$\overline{CD}=\frac{b}{c}\overline{DB}=\frac{b\left(a-\overline{CD}\right)}{c}=\frac{ab}{c}-\frac{b\overline{CD}}{c}$$

од што следува бараното равенство.

Нека претпоставеме дека $\overline{AC}\neq\overline{BC}$. Без губење на општоста можеме да претпоставеме дека $\angle BAC>\angle ABC$. Од лемата следува точноста на равенствата $\overline{CD}=\frac{ab}{b+c}$ и $\overline{CF}=\frac{ab}{a+c}$. Нека ставиме $\angle BAC=2\alpha$, $\angle ABC=2\beta$. Тогаш имаме $\angle FCG=2\alpha$, $\angle FGC=\beta$, $\angle DCE=2\beta$ и $\angle DEC=\alpha$. Од синусна теорема за ΔCGF имаме $\frac{\overline{GF}}{\sin 2\alpha}=\frac{\overline{CF}}{\sin\beta}$, од синусна теорема за ΔCED имаме $\frac{\overline{ED}}{\sin 2\beta}=\frac{\overline{CD}}{\sin\alpha}$. Од ова добиваме $\overline{GF}=\frac{ab}{a+c}\frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta}$ и $\overline{ED}=\frac{ab}{b+c}\frac{\sin 2\beta}{\sin\alpha}$. Бидејќи $\overline{DE}=\overline{GF}$ имаме $(b+c)\sin\alpha\sin 2\alpha=(a+c)\sin\beta\sin 2\beta$. Од синусна теорема за ΔABC имаме

$\frac{a}{\sin 2\alpha}=\frac{b}{\sin 2\beta}$, односно $a\sin 2\beta=b\sin 2\alpha$. Ако ова го замениме во претходното равенство добиваме

$$a\sin 2\beta\sin\alpha+c\sin\alpha\sin 2\alpha=a\sin\beta\sin 2\beta+c\sin\beta\sin 2\beta$$

$$a\sin 2\beta(\sin\alpha-\sin\beta)+c(\sin\alpha\sin 2\alpha-\sin\beta\sin 2\beta)=0$$

Бидејќи претпоставивме дека $\angle BAC>\angle ABC$ и бидејќи триаголникот е остроаголен ќе важи $\sin 2\alpha>\sin 2\beta$ и $\sin\alpha>\sin\beta$. Но тогаш последното равентво не може да е точно.

3. Најди ги сите природни броеви n за кои секој природен број запишан со $n-1$ единици и една седумка е прост.

Решение. Број B со $n-1$ единица и една седумка е од облик $B=A_n+6\cdot 10^k$ каде A_n е број со n единици и $0\leq k<n$. Да забележиме дека ако $3|n$ тогаш збирот на цифрите на B е $3n+6$. Да забележеме дека

$$A_1\equiv 1, A_2\equiv 4, A_3\equiv 6, A_4\equiv 5, A_5\equiv 2, A_6\equiv 0 \pmod 7$$

$$10^0\equiv 1; 10^1\equiv 3; 10^2\equiv 2; 10^3\equiv 6; 10^4\equiv 4; 10^5\equiv 5; 10^6\equiv 1 \pmod 7$$

Нека $n>6$. Тогаш $n=6t+r$ каде $t\geq 0$, $1\leq r\leq 6$. Па

$$A_n=A_{6t+r}=A_{6t}+A_r\cdot 10^{6t}\equiv A_{6t}+A_r\equiv A_r \pmod 7$$

Ако $6|n$ тогаш $3|n$ па видовме дека B не е прост во ниту еден случај. Нека 6 не го дели n. Тогаш веќе видовме дека $A_n\equiv A_r \pmod 7$ и притоа A_r не е конгруентно со 0 по модул 7. Нека ставеме $A_r\equiv t \pmod 7$. Па за тоа t, од претходните разгледувања, следи дека можеме да избереме такво k, $0\leq k\leq 5$, да важи $6\cdot 10^k\equiv -10^k\equiv -t \pmod 7$. Па тој B е делив со 7. За $n=6$ веќе видовме дека броевите се сложени. Треба да ги провериме случаите $n\leq 5$. За $n=5$

$$A_5+6\cdot 10^2\equiv 2-2\equiv 0 \pmod 7$$

За $n=4$ $1711=29\cdot 59$. Во случајот $n=3$ веќе видовме дека сите броеви се сложени. За $n=2$ и $n=1$ сите броеви се прости.

4. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ што ја задоволуваат равенката:

$$f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y) \qquad (1)$$

Решение. За $x=0, f(yf(0))=f(f(0))$. Ако $f(0)\neq 0, y={}^{t}\!/_{f(0)}, f(t)=f(f(0))=c$, то ест функцијата е контантна. Но тогаш $c=c+xc$ за секое x, па мора $c=0$. Функцијата $f(x)=0$ ја задоволува равенката. Следува дека $f(0)=0$. Нека $f(x)=0, x\neq 0$ тогаш $0=xf(y)$, па мора $f(x)=0$ за секое x. За $y=0, f(x)=f(f(x))$,Ако ова го замeнеме во пвата равенка добиваме $f(x+yf(x))=f(x)+xf(y)$. Нека $f(1)=a\neq 0$, тогаш добиваме:

I .Ако избереме $x=0$, тогаш

$$f(yf(0))=f(f(0)).$$

Ако $f(0)\neq 0$, тогаш за $y=\frac{t}{f(0)}$, добиваме

$$f(t)=f(f(0))=c,$$

т.е. f е константна функција. Но тогаш, со замена во (1), равенката го добива обликот

$$c=c+cx,\ x\in\mathbb{R}.$$

Од произволноста на x, добиваме дека $c=0$. Заради добиената контрадикција, $f(0)=0$.

II. Нека претпоставиме дека $f(x)\neq 0$ за некое $x\neq 0$. Тогаш со замена во почетната равенка добиваме

$$xf(y)=0,$$

за секое $y\in\mathbb{R}$. Според тоа, $f(y)=0$ за секое $y\in\mathbb{R}$. Заради добиената контрадикција, $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Не е тешко да се провери дека $f(x)\equiv 0$, $x\in\mathbb{R}$ е решение на почетната равенка.

III. Ако $y=0$, тогаш $f(x)=f(f(x))$. Сега, ако замениме во првата равенка добиваме

$$f(x+yf(x))=f(x)+xf(y).$$

IV. Нека $f(1)=a\neq 0$. Тогаш

$$x=1, y=1 \Rightarrow f(1+a)=2a$$
$$x=1, y=-1 \Rightarrow f(1-a)=a+f(-1) \qquad (1)$$
$$x=1+a, y=-1 \Rightarrow f(1-a)=f(1+a-2a)=2a+(1+a)f(-1) \qquad (2)$$

Сега од (1) и (2) добиваме

$$a+f(-1)=2a+(1+a)f(-1)$$
$$-a=af(-1)$$
$$f(-1)=-1$$
$$f(1-a)=a-1$$

Од друга страна

$$x=1-a, y=1 \quad \Rightarrow \quad 0=f(1-a+a-1)=a-1+(1-a)a=-(a-1)^2 \Rightarrow a=1$$
$$x=1 \quad \Rightarrow f(1+y)=1+f(y) \qquad (3)$$
$$x=-1 \quad \Rightarrow f(-1-y)=-1-f(y) \qquad (4)$$

Сега од (3) и (4) $-f(y)=1+f(-1-y)=f(-y)$. Според тоа за $y=-1$ имаме

$$f(x-f(x))=f(x)-x.$$

Конечно,

$$f(x-f(x))=f(f(x-f(x)))=f(f(x)-x)=-f(x-f(x))$$
$$f(x-f(x))=0$$
$$x-f(x)=0$$
$$f(x)=x$$

Оваа функција ја задоволува равенката, па бараните решенија се: $f(x)=0$ и $f(x)=x$.

4. Дефинираме табела од тип $(n_1,n_2,...,n_m)$, $n_1\geq n_2\geq ...\geq n_m$ на следниот начин: n_1 квадрати ги поставуваме хоризонтално еден до друг, потоа n_2 квадрати ги поставуваме хоризонтално под поставените n_1 квадрати . Постапката ја продолжуваме додека не добиеме мрежа од квадрати со n_1 квадрати во прва редица, n_2 во втора, n_i во *i*-та редица, при што добиени се вкупно $n=n_1+n_2+...+n_m$ квадрати. Поставените редици се порамнети од лево, како на примерот. Добиената табела ја пополнуваме со броевите од 1 до *n* така што броевите во секоја редица и колона растат од лево на десно и од горе надолу, соодветно. Пример за табела од тип $(5,4,2,1)$ и едно можно пополнување е

1	3	4	7	11
2	5	10	12	
6	9			
8				

ОСУМНАЕСЕТТА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Скопје, 16.IV-2011 година

Најди го бројот на пополнувањата на табелата од тип $(4,3,2)$!

Решение. Дефинираме функција f на m – торките $(n_1,n_2,...,n_m)$ на следниот начин: $f(n_1,n_2,...,n_m)=0$ за m – торките за кои не важи

$$n_1\geq n_2\geq ...\geq n_m\geq 0. \qquad (1)$$

Ако $n_1\geq n_2\geq ...\geq n_m\geq 0$, тогаш важи

$$f(n_1,n_2,...,n_m,0)=f(n_1,n_2,...,n_m). \qquad (2)$$
$$f(n_1,n_2,...,n_m)=f(n_1-1,n_2,...,n_m)+f(n_1,n_2-1,...,n_m)+...+f(n_1,n_2,...,n_m-1). \qquad (3)$$
$$f(n)=1, \text{ за } n\geq 0. \qquad (4)$$

Функција f е добро дефинирана. Ќе покажеме дека $f(n_1,n_2,...,n_m)$ е бројот на табели од тип$(n_1,n_2,...,n_m)$. Јасно е дека за бараната табела мора да е исполнет условот (1) и (4) (редица од n квадрати може на единствен начин да се пополни со n броеви при што тие да растат :1,2,3,…,n). Условот (2) е исто така јасен. За да покажеме дека табела од тип $(n_1,n_2,...,n_m)$ го задоволува равенството (3) го разгледуваме бројот n. Тој број мора да биде последен во некоја од редиците, па ако го отстраниме квадратот со бројот n, добиваме табела која ги исполнува условите на задачата но со $n-1$ броеви. Може да се случи неколку редици да имаат ист број на квадрати па бројот n може да биде во последната редица најдесно. Ако на пример $n_1=n_2$, тогаш $f(n_1-1,n_2,...,n_m)=0$ бидејќи $n_1-1<n_2$. Затоа во записот (3) стојат сите изрази $f(n_1-1,n_2,...,n_m), f(n_1,n_2-1,...,n_m),..., f(n_1,n_2,...,n_m-1)$ кои се нула ако е исполнет горниот услов.

Ја користиме претходно дефинираната функција f за да го добиеме бројот на табели од тип$(4,3,2)$.

$$f(4,3,2)=f(3,3,2)+f(4,2,2)+f(4,3,1)=$$
$$=(f(3,2,2)+f(3,3,1))+(f(3,2,2)+f(4,2,1))+(f(3,3,1)+f(4,2,1)+f(4,3,0))=$$
$$=2f(3,2,2)+2f(3,3,1)+2f(4,2,1)+f(4,3)=$$
$$=2(f(2,2,2)+f(3,2,1))+2(f(3,2,1)+f(3,3,0))+2(f(3,2,1)+f(4,1,1)+f(4,2,0))+(f(3,3)+f(4,2))=$$
$$=2f(2,2,2)+6f(3,2,1)+2f(4,1,1)+3f(4,2)+3f(3,3)=$$
$$=2(f(2,2,1))+6(f(2,2,1)+f(3,1,1)+f(3,2,0))+2(f(3,1,1)+f(4,1,0))+3(f(3,2)+f(4,1))+3(f(3,2))=$$
$$=8f(2,2,1)+8f(3,1,1)+12f(3,2)+5f(4,1)=$$
$$=8(f(2,1,1)+f(2,2,0))+8(f(2,1,1)+f(3,1,0))+12(f(2,2)+f(3,1))+5(f(3,1)+f(4,0))=$$
$$=16f(2,1,1)+20f(2,2)+25f(3,1)+5f(4)=$$
$$=16(f(1,1,1)+f(2,1,0))+20(f(2,1))+25(f(2,1)+f(3,0))+5=$$
$$=16f(1,1,1)+61f(2,1)+25f(3)+5=16(f(1,1,0))+61(f(1,1)+f(2,0))+25+5=$$
$$=77f(1,1)+61f(2)+30=77(f(1,0))+61+30=77f(1)+91=77+91=168.$$

Секоја точно решена задача се вреднува со 8 поени.
Време за работа 4 часа и 30 минути.