РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IV ОДДЕЛЕНИЕ

Важна напомена: Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата.

Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.

Грешка во пресметување при правилно поставено решение не се казнува со одземање на сите поени за соодветниот чекор туку се предвидува намалување на поените и тоа истоветно се применува при вреднување на решенијата на сите натпреварувачи.

****

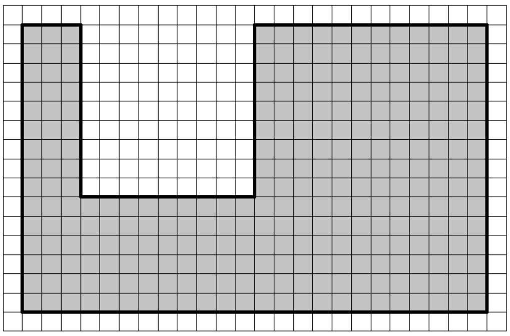
1. (**Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 4 одделение, задача 4056**) Кој е најмалиот парен број што може да се состави од цифрите 2,4,5,8, така што секоја цифра да биде искористена точно еднаш? Кој е најголемиот непарен број што може да се состави од истите цифри, така што секоја цифра да биде искористена точно еднаш?
Решение. Најмалиот парен број составен од дадените цифри е 2458. (**13 поени**) Најголемиот непарен број составен од цифрите е 8425. (**12 поени**)

2. (**Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 4-5 одделение, задача 4057**) Вредноста на изразот $a-b-c$ изнесува 1576. Колкава ќе биде вредноста на изразот ако секој од броевите a, b и c се намали за бројот 576?
Решение. Од условот $a-b-c=1576$. Со намалување на a за 576 збирот 1576 се намалува на $1576-576=1000$. (**5 поени**) Со намалување на бројот b за 576 меѓузбирот 1000 се зголемува за 576, па се добива $1000+576=1576$. (**10 поени**) Со намалување на c за 576, вкупниот збир се зголемува за 576, па имаме дека

$$(a-576)-(b-576)-(c-576)=1576+576=2152.$$ (**10 поени**)

3. Најди ги сите природни броеви n, за кои при делењето на 26 со n се добива остаток 2. Потоа, пресметај го збирот на сите такви природни броеви.
Решение. Бидејќи остатокот од делењето на 26 со бројот n е 2, ги бараме броевите со коишто бројот 24 = 26 – 2 се дели без остаток. (**10 поени**)
Делители на бројот 24 се броевите 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. (**5 поени**)
Со проверка утврдуваме дека броевите 1 и 2 не го исполнуваат бараниот услов. (**5 поени**)
Значи, бараниот збир е 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 57. (**5 поени**)

4. Определи ги периметарот и плоштината на фигурата што Марија ја нацртала и обоила во правоаголна мрежа од квадратчиња со страна 1 cm, претставени на следниот цртеж.



Решение. За точно означување на должините на секоја од страните, се доделуваат 5 поени.

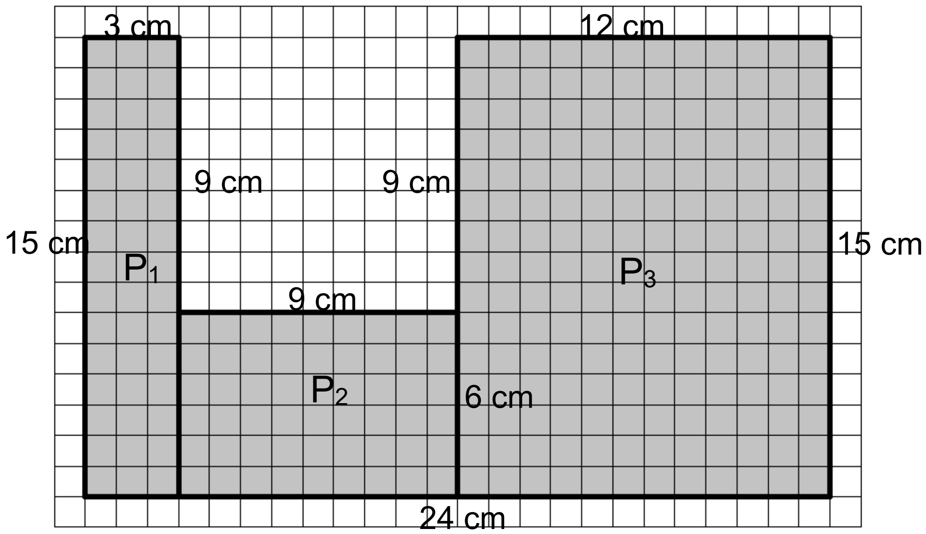
Прв начин. Со броење на отсечките со должина 1 cm од коишто е составена границата на фигурата за определување на периметарот, $L=96\text{ cm}$. (**10 поени**)

Со броење квадратчињата со плоштина 1 cm^2 од коишто е составена фигурата за определување на плоштината, P = 279 cm^2. (**10 поени**)

За мала грешка во броењето се одземаат само 5 поени за L, односно за P.

Втор начин. Со пресметување на збирот на должините на страните на фигурата за определување на периметарот, $L=3+9+9+9+12+15+24+15=96\text{ cm}$. (**10 поени**)

Со поделба на фигурата на правоаголници, пресметување и собирање на нивните плоштини. На пример:



$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 15 \cdot 3 + 9 \cdot 6 + 15 \cdot 12 = 45 + 54 + 180 = 279 \text{ cm}^2$$

(**10 поени - по 3 поени за плоштината на секој правоаголник и 1 поен за збирот**)

<u>Трет начин (за плоштината):</u> Со одземање на плоштината на квадратот со страна 9 cm од плоштината на правоаголникот со страни 15 cm и 24 cm.

$$P = 15 \cdot 24 - 9 \cdot 9 = 360 - 81 = 279 \text{ cm}^2 .$$

(**10 поени - по 4 поени за плоштините и 2 поени за разликата**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА V ОДДЕЛЕНИЕ

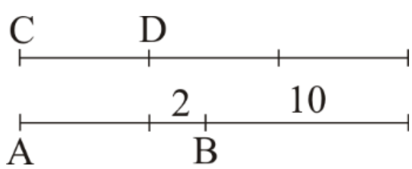
1. (**Нумерус 48-4, Конкурсни задачи, 5-6 одделение, задача 4033**) Најди ги сите броеви од облик $\overline{xyxyxy}$ деливи со 2, така што бројот $\overline{yyxxyx}$ е делив со 5, ако x и y се цифри различни од нула.

Решение. Бидејќи $\overline{xyxyxy}$ е делив со 2, следува дека тој е парен број, па тој ќе завршува на една од цифрите 0, 2, 4, 6 или 8. (**10 поени**) Но од условот y е различна од нула, па $y \in \{2,4,6,8\}$. (**3 поени**) Од тоа што бројот $\overline{yyxxyx}$ е делив со 5 следува дека тој ќе завршува на една од цифрите 0 или 5. (**5 поени**) Но x е различна од нула, па следува дека $x = 5$. (**3 поени**) Според тоа, бараните броеви се 525252, 545454, 565656 и 585858. (**4 поени**)

2. (**Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 4-5 одделение, задача 4058**) Дадени се отсечки AB и CD. Должината на AB е за 2 сантиметри поголема од должината на CD. Ако должината на отсечката AB се зголеми за 10 сантиметри, а должината на отсечката CD се зголеми три пати, тогаш ќе се добијат еднакви должини. Колкави се должините на отсечките AB и CD?

Решение.

<u>Прв начин:</u>



(**5 поени за правилен цртеж**)

Од цртежот е јасно дека кога отсечката CD ќе ја зголемиме три пати, тогаш таа се зголемила за двојната вредност од нејзината должина. (**5 поени**)

Тоа зголемување изнесува 2 + 10 = 12 сантиметри (**5 поени**), од каде за должината на CD се добива 12 : 2 = 6 сантиметри. (**5 поени**)

Според тоа отсечката AB има должина од 6 + 2 = 8 сантиметри. (**5 поени**)

<u>Втор начин:</u> Ако со x ја означиме должината на отсечката CD, тогаш должината на отсечката AB е $x+2$ cm. (**3 поени**)

Ако должината на отсечката CD се зголеми три пати, се добива отсечка со должина $3\cdot x$ сантиметри. (**3 поени**)

Со зголемување на должината на отсечката AB за 10 сантиметри, се добива отсечка со должина $(x+2\text{ cm})+10\text{ cm}=x+12\text{ cm}$. (**3 поени**)

Бидејќи двете нови отсечки имаат еднаква должина, добиваме $3\cdot x=x+12$. (**7 поени**)

Тоа значи $2\cdot x=12$ (**3 поени**), односно $x=6$. (**3 поени**)

Должината на отсечката CD е 6 cm, а на отсечката AB е 6 + 2 = 8 cm. (**3 поени**)

3. Да ги разгледаме сите четирицифрени непарни броеви за кои:
а) збирот на цифрите е 12; и
б) збирот на цифрата на десетки и на цифрата на единици е 5.

Колку такви броеви има?

Решение. Цифрата на единици мора да биде непарен број, а збирот на цифрата на единици и цифрата на десетки е 5, па има три можности: 05, 23 и 41. (**10 поени**)

Збирот на првите две цифри мора да биде 12 – 5 = 7, па можностите за првите две цифри се: 70, 61, 52, 43, 34, 25 и 16. (**10 поени**)
Тоа се седум можности, па 3 · 7 = 21. Постои 21 таков број. (**5 поени**).

4. При планирањето на изградбата на еден стан, идните сопственици побарале квадратната дневна соба со плоштина 16 m^2 да се измени во правоаголна, така што една страна да се зголеми за 20%, а другата да се намали за 20%. Се надевале дека со оваа измена ќе се зголеми плоштината на дневната соба. Дали сопствениците биле во право? Образложи го одговорот со помош на пресметка.

Решение.

Квадратната соба со плоштина 16 m^2 има должина на страна $a = 4\text{ m} = 400\text{ cm}$. (**3 поени**)

Страната a зголемена за 20 % ќе биде долга $a + 0{,}2\,a = 400 + 80 = 480\text{ cm}$. (**8 поени**)

Страната a намалена за 20 % ќе има должина $a - 0{,}2\,a = 400 - 80 = 320\text{ cm}$. (**8 поени**)

Плоштината на оваа правоаголна соба ќе биде

$$\text{P} = 480 \cdot 320 = 153600\text{ cm}^2 \ (\textbf{3 поени})$$

Бидејќи 16 m^2 = 160000 cm^2 > 153600 cm^2 (**3 поени**), заклучуваме дека сопствениците не биле во право.

(**Не се доделуваат поени ако само е даден одговор НЕ, без образложение/пресметка.**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VI ОДДЕЛЕНИЕ

1. (**Нумерус 48-1, Конкурсни задачи, 6-7 одделение, задача 3955**) Одреди ги сите можни парови цифри a и b, така што бројот $\overline{78a9b}$ да биде делив со 18.

Решение. Според признаците за деливост на еден број со 18, знаеме дека бројот треба да биде делив истовремено со 2 и со 9. (**6 поени**) Тоа значи дека цифрата b може да има една од следниве вредности: 0, 2, 4, 6 или 8. (**7 поени**) Бидејќи $7+8+a+9+b=24+a+b$ и од деливоста со 9: (**7 поени**)

За $b=0$, имаме $a=3$, односно бараниот број е 78390; (**1 поен**)
За $b=2$, имаме $a=1$, односно бараниот број е 78192; (**1 поен**)
За $b=4$, имаме $a=8$, односно бараниот број е 78894; (**1 поен**)
За $b=6$, имаме $a=6$, односно бараниот број е 78696; (**1 поен**)
За $b=8$, имаме $a=4$, односно бараниот број е 78498. (**1 поен**)

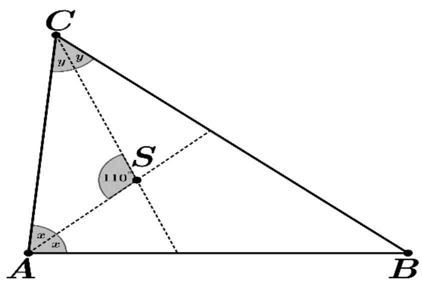
2. Баба Цана ја отворила славината за вода над кадата, но заборавила да ја затне кадата. Таа се сетила да ја затне кадата дури после 12 минути. Ако е познато дека затната када може да се наполни до горе за 10 минути, а полната када по одзатнување се празни за 20 минути, дали за тие 12 минути кадата се преполнила? (Образложи го одговорот)

Решение. Ако кадата се полни за 10 минути, тогаш за 1 минута е полна $\frac{1}{10}$ од неа. (**5 поени**) Ако, пак, таа се празни за 20 минути, тогаш за 1 минута ќе се испразни $\frac{1}{20}$ од кадата. (**5 поени**) Значи за 12 минути ќе се испразни $12\cdot\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{20}\right)=12\cdot\frac{1}{20}=\frac{3}{5}$ од кадата. (**10 поени**) Ова значи дека за 12 минути се наполниле само $\frac{3}{5}$ од кадата т.е. не се преполнила. (**5 поени**)

3. (**Нумерус 48-4, Конкурсни задачи, 6-7 одделение, задача 4038**) **3.** Во $\triangle ABC$ симетралите на $\angle BAC$ и $\angle ACB$ се сечат во точката S. Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$ ако $\angle ASC=110^\circ$ и $\angle BAC$ е трипати поголем од $\angle ABC$.

Решение 1. Нека со $x=\angle SAC$ и $y=\angle SCA$ ги означиме внатрешните агли на $\triangle ASC$ како на цртежот. За $\triangle ASC$, од тоа што $\angle ASC=110^\circ$ следува дека

$x+y+110^\circ=180^\circ \Leftrightarrow x+y=180^\circ-110^\circ \Leftrightarrow x+y=70^\circ$. (**10 поени**)



Од условот на задачата имаме дека $\angle BAC=3\angle ABC$. Исто така, $\angle BAC=2x$ и $\angle ACB=2y$, па $\angle ABC=\frac{2x}{3}$. Тогаш за внатрешните агли на $\triangle ABC$ важи $2x+2y+\frac{2x}{3}=180^\circ$. (**5 поени**) Со замена на $x+y=70^\circ$ во последното равенство, добиваме дека

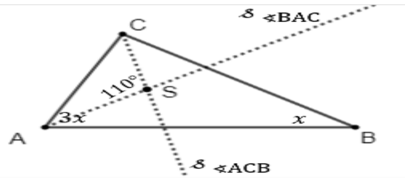
$$2x+2y+\frac{2x}{3}=180^\circ \Leftrightarrow 2(x+y)+\frac{2x}{3}=180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 70^\circ+\frac{2x}{3}=180^\circ \Leftrightarrow 140^\circ+\frac{2x}{3}=180^\circ \Leftrightarrow \frac{2x}{3}=180^\circ-140^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{2x}{3}=40^\circ \Leftrightarrow 2x=120^\circ \Leftrightarrow x=60^\circ,$$ (**5 поени**)

односно $\angle SAC=x=60^\circ$. Според тоа $y=70^\circ-60^\circ$, односно $y=10^\circ$. Значи, за внатрешните агли на $\triangle ABC$ добиваме дека $\angle BAC=120^\circ$, $\angle ACB=20^\circ$ и $\angle ABC=40^\circ$. (**5 поени**)

Решение 2. $\alpha=3x,\beta=x,\gamma=180^0-\alpha-\beta=180^0-4x$ (**5 поени**)

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}+110^0=180^0$ т.е. $\alpha+\gamma=140^0$ (**10 поени**)



$3x+180^0-4x=140^0$ т.е. $x=40^0$ (**5 поени**)

Значи, $\beta=40^0, \alpha=120^0, \gamma=20^0$. (**5 поени**)

4. Одреди ја вредноста на аголот α ако неговиот комплементен агол е три пати помал од неговиот суплементен агол.

Решение: Од условот на задачата имаме:

$3(90^0-\alpha)=180^0-\alpha$ (**15 поени**)

$270^0-3\alpha=180^0-\alpha$ (**5 поени**)

$2\alpha=90^0$ т.е. $\alpha=45^0$. (**5 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. (**Нумерус 47-3, Конкурсни задачи, 7-8 одделение, задача 3901**) По намалувањето на цената за 30%, за 280 денари може да се купат 2 kg лимони повеќе отколку што можело да се купат за 240 денари пред намалувањето. Колкава била цената на 1 kg лимони пред намалувањето, а колкава после намалувањето?

Решение. Ако пред намалувањето, цената на 1 kg лимони била x денари, тогаш за 240 денари може да се купат $\frac{240}{x}$ kg лимони (**5 поени**). После намалувањето, цената на 1kg лимони е 70% од првобитната цена, т.е. таа е $0,7\cdot x$ денари (**4 поени**), па за 280 денари може да се купат $\frac{280}{0,7\cdot x}=\frac{400}{x}$ kg лимони (**6 поени**). Значи, $\frac{400}{x}=\frac{240}{x}+2$ (**6 поени**), од каде добиваме $\frac{160}{x}=2$, односно $x=160:2=80$.

Цената пред намалувањето била 80 денари за 1 kg лимони, (**2 поени**)
а после намалувањето била $0,7\cdot 80=56$ денари за 1 kg лимони. (**2 поени**)

2. Определи ги сите тројки цели броеви a, b и c, така што $a\cdot b=-12$, $a\cdot c=-20$ и $b\cdot c=60$. Пресметај ја соодветната вредност на производот $a\cdot b\cdot c$.

Решение 1. Со множење на левите и десните страни на равенствата $a\cdot b=-12$ и $a\cdot c=-20$, имаме дека $a\cdot a\cdot b\cdot c=(-12)\cdot(-20)$, односно $a\cdot a\cdot b\cdot c=240$. (**7 поени**) Со замена на $b\cdot c=60$ во последното равенство, добиваме дека $a\cdot a\cdot 60=240$, односно $a\cdot a=240:60 \Leftrightarrow a\cdot a=4$. (**3 поени**) Бидејќи $4=2\cdot 2=(-2)\cdot(-2)$, добиваме дека $a=2$ или $a=-2$. (**5 поени**)

За $a=2$, од $a\cdot b=-12$ следува дека $b=-6$, а од $a\cdot c=-20$ следува дека $c=-10$. (**3 поени**) Соодветната вредност на производот $a\cdot b\cdot c$ за тројка цели броеви $a=2$, $b=-6$ и $c=-10$ кои ги задоволуваат условите на задачата е еднаква на $a\cdot b\cdot c=2\cdot(-6)\cdot(-10)=120$. (**2 поени**)

За $a=-2$, од $a\cdot b=-12$ следува дека $b=6$, а од $a\cdot c=-20$ следува дека $c=10$. (**3 поени**) Соодветната вредност на производот $a\cdot b\cdot c$ за тројката цели броеви $a=-2$, $b=6$ и $c=10$ кои ги задоволуваат условите на задачата е еднаква на $a\cdot b\cdot c=(-2)\cdot 6\cdot 10=-120$. (**2 поени**)

Решение 2. Од $a\cdot b=-12$ и $a\cdot c=-20$ следува дека a е цел број кој е делител на -12 и -20. (**6 поени**)

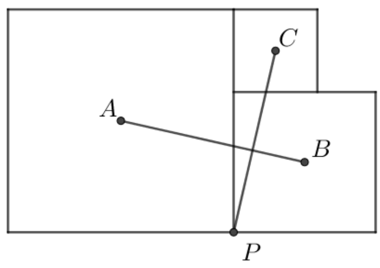
Тогаш за a важи $a\in\{-1,1,-2,2,-4,4\}$. (**6 поени**)
Имаме:
За $a=-1, b=12, c=20$, добиваме $b\cdot c=12\cdot 20=240\neq 60$, што значи $a\neq\pm 1$. (**2 поени**)

За $a=2$, $b=-6$, $c=-10$, добиваме $b\cdot c=60$ што значи $a=2$ е едно од решенијата за a. (**1 поен**)
За $a=-2$, $b=6$, $c=10$ тогаш $b\cdot c=60$, што значи $a=-2$ е второ решение за a. (**1 поен**)
За $a=4$, $b=-3$, $c=5$, тогаш $b\cdot c=15$, што не е можно поради условот на задачата. (**1 поен**)
За $a=-4$, $b=-3$, $c=5$, тогаш $b\cdot c=15$, исто така не е можно поради условот на задачата.(**1 поен**)
Добиваме две решенија, односно $a=2$, $b=-6$, $c=-10$ (**2 поени**) или $a=-2$, $b=6$, $c=10$. (**2 поени**)
Производот $a\cdot b\cdot c=120$ или $a\cdot b\cdot c=-120$. (**3 поени**)

Решение 3. Со множење на сите три равенства се добива дека $(abc)^2=120^2$ (**5 поени**) т.е. $abc=120$ (**5 поени**) или $abc=-120$ (**5 поени**).
- Од тоа што $ab=-12$ и $abc=120$ се добива дека $c=-10$, а од $bc=60$ мора и $b=-6$, односно $a=2$. (**5 поени**)
- Ако $a\cdot b\cdot c=-120$ од $ab=-12$ следува $c=10$ а од $bc=60$ добиваме $b=6$. Тогаш $a=-2$ (**5 поени**)

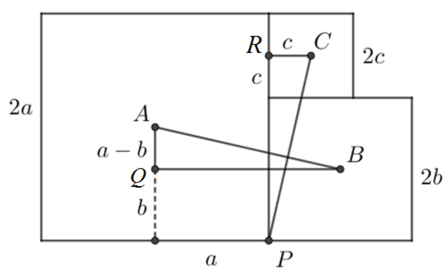
3. Димитар ја бојадисувал дрвената ограда околу неговата нива. За викендот тој обоил 12 метри повеќе од $\frac{3}{8}$ од вкупната должина на оградата. Во понеделник обоил 3 метри повеќе од $\frac{1}{4}$ од вкупната должина на оградата. Во вторник обоил $\frac{1}{3}$ од должината која ја обоил за време на викендот и понеделникот, а во среда го обоил останатиот дел од оградата, којшто е точно $\frac{1}{24}$ од вкупната должина на оградата. Колку метри е долга оградата на нивата?

Решение. Со x ја означуваме вкупната должина на оградата во метри.
За време на викендот Димитар обоил $\frac{3}{8}\cdot x+12$ метри. (**4 поени**)
Во понеделник обоил $\frac{1}{4}\cdot x+3$ метри. (**4 поени**)
Во вторник обоил $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot x+12+\frac{1}{4}\cdot x+3\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{8}\cdot x+15\right)=\frac{5}{24}\cdot x+5$ метри. (**4 поени**)
Во среда обоил $\frac{1}{24}\cdot x$ метри. (**4 поени**)
Сега имаме $\frac{3}{8}\cdot x+12+\frac{1}{4}\cdot x+3+\frac{5}{24}\cdot x+5+\ \frac{1}{24}\cdot x$ е вкупната должина на оградата, односно $\frac{7}{8}\cdot x+20=x$. (**6 поени**)
Конечно, добиваме дека вкупната должина е 160 метри. (**3 поени**)



4. (**Нумерус 48-1, Конкурсни задачи, 7-8 одделение, задача 3960**) На цртежот се дадени три квадрати со своите центри A, B и C. Точката P е заедничко теме на квадратите со центри A и B. Пресметај го односот $\frac{\overline{AB}}{\overline{PC}}$.

Решение: Со повлекување на паралелни линии со страните на квадрати-те ги конструираме правоаголните триаголници AQB и CRP (како на цртежот) (**5 поени** за точен цртеж). Нека должините на страните на квадратите со центри A, B и C се $2a$, $2b$ и $2c$, соодветно. Бидејќи



$$2a=2b+2c\text{, т.е. } a=b+c\text{, (**5 поени**)}$$

следува дека

$$\overline{AQ}=a-b=c=\overline{CR}\ (\textbf{5 поени})\text{ и}$$

$$\overline{RP} = c + 2b = (a-b) + 2b = a + b = \overline{QB}.$$ (**5 поени**)

Значи, правоаголните триаголници ΔAQB и ΔCRP се складни според признакот САС. Следува дека $\overline{AB} = \overline{PC}$, т.е. $\frac{\overline{AB}}{\overline{PC}} = 1$. (**5 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. (**Нумерус 48-3, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 3990**) Одреди ги сите природни броеви $n \in \mathbb{N}$ за кои дропката $\frac{5n+23}{n+3}$ е цел број.

Решение. Нека $A = \frac{5n+23}{n+3} \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$A = \frac{5n+23}{n+3} = \frac{5n+15+8}{n+3} = \frac{5(n+3)+8}{n+3} = \frac{5(n+3)}{n+3} + \frac{8}{n+3} = 5 + \frac{8}{n+3}.$$ (**10 поени**)

Бидејќи $A \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{N}$, следува дека $\frac{8}{n+3} \in \mathbb{Z}$. Но, $\frac{8}{n+3} \in \mathbb{Z}$ само ако $n+3$ е делител на 8. Па, $n+3 \in \{-8,-4,-2,-1,1,2,4,8\}$, (**5 поени**) односно $n \in \{-11,-7,-5,-4,-2,-1,1,5\}$. (**5 поени**) Но, n е природен број, па добиваме дека $A \in \mathbb{Z}$ за $n=1$ и $n=5$. (**5 поени**)

2. (**Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 4075**) Должините на страните на еден паралелограм се цели броеви сантиметри. Периметарот на паралелограмот е 26cm, а збирот од плоштините на квадратите конструирани над две негови соседни страни е 97cm^2. Колку изнесуваат должините на страните на тој паралелограм?

Решение. Нека страните на паралелограмот се a и b и нека $a \geq b$. Бидејќи периметарот е 26cm, се добива $2(a+b) = 26$, односно $a+b=13$. (**3 поени**) Бидејќи збирот на плоштините на квадратите конструирани над две негови соседни страни е $97\,\text{cm}^2$, добиваме $a^2+b^2=97$. (**3 поени**)

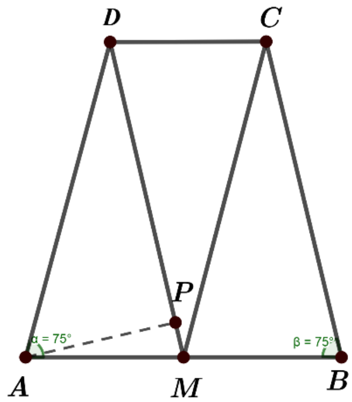
Од $(a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2$ (**3 поени**) и користејќи ги претходните две равенства, добиваме дека $13 \cdot 13 = 97 + 2ab$, (**3 поени**) односно $ab=36$. (**3 поени**) Бидејќи $a,b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ и $ab=36$, следува дека $(a,b) \in \{(36,1),(18,2),(12,3),(9,4),(6,6)\}$. (**5 поени**) Но, $a+b=13$, па добиваме дека $(a,b)=(9,4)$, односно должините на страните на паралелограмот се 9cm и 4cm. (**5 поени**)

3. Трговецот Климе купил грозје и калинки за вкупен износ од 5800 денари. Цената на грозјето била 40 денари за килограм, а на калинките 50 денари за килограм. При транспортот, еден дел од овошјето го изгубил квалитетот, па морал да фрли 14% од грозјето и 15% од калинките. Останатото грозје го продал по цена од 60 денари за килограм, а калинките по 80 денари за килограм. По колку килограми грозје и калинки купил трговецот Климе, ако се знае дека од нивната продажба заработил 1934 денари?

Решение. Нека Климе купил x килограми грозје и y килограми калинки. Значи, $40x+50y=5800$ т.е. $4x+5y=580$. (**3 поени**) По фрлање на неквалитетното овошје му останале 86% од x килограми грозје и 85% од y килограми калинки, односно $0{,}86x$ килограми грозје кое го продал по 60 денари за килограм и $0,85y$ калинки кои ги продал по 80 денари за килограм. (**3 поени**)

Значи, $60\cdot 0,86x+80\cdot 0,85y=5800+1934$, односно $51,6x+68y=7734$. (**6 поени**) Од $4x+5y=580$, добиваме $x=\frac{580-5y}{4}$. Со замена на $x=\frac{580-5y}{4}$ во равенката $51,6x+68y=7734$ добиваме $51,6\cdot\frac{580-5y}{4}+68y=7734\Leftrightarrow 29928-258y+272y=30936\Leftrightarrow 14y=1008\Leftrightarrow y=72$. (**8 поени**) Сега, во $x=\frac{580-5y}{4}$ со замена на $y=72$ добиваме $x=\frac{580-5\cdot 72}{4}=55$. (**3 поени**) Значи, трговецот Климе купил 55 килограми грозје и 72 килограми калинки. (**2 поени**)

4. Аголот при основата на рамнокрак трапез е 75°, а основите се однесуваат како $2:1$. Ако кракот е 30cm, колкава е плоштината на трапезот?



Решение. Од $\overline{AB}:\overline{CD}=2:1$, следува дека $\overline{AB}=2\cdot\overline{CD}$. Нека $\overline{CD}=b$, $\overline{AB}=2b$ и M е средина на AB. Тогаш $\overline{AM}=\overline{MB}=b$. Од $AB\parallel CD$ и $\overline{MB}=\overline{CD}$, следува дека $MBCD$ е паралелограм. Притоа, $AM\parallel CD$ и $\overline{AM}=\overline{CD}$, па и $AMCD$ е паралелограм. (**5 поени**)

Добиваме дека $\overline{AD}=\overline{MC}$ и $\overline{BC}=\overline{MD}$, т.е. триаголниците AMD, MBC и CDM се рамнокраки триаголници со крак 30cm, основа b, агли при основата 75° и агол при врвот $180^\circ-2\cdot 75^\circ=30^\circ$. Па, $P_{\text{трапез}}=3\cdot P_\Delta$. (**5 поени**)

Нека AP е висина во ΔAMD, спуштена од темето A кон кракот MD. Тогаш ΔAPD е правоаголен триаголник со хипотенуза AD и агли 30° и 60°. (**5 поени**) Бидејќи катетата спроти аголот од 30° е AP, за неа ќе важи: $\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\cdot 30=15\text{cm}$. (**5 поени**) Според тоа, $P_\Delta=\frac{\overline{MD}\cdot\overline{AP}}{2}=\frac{30\cdot 15}{2}=225\text{cm}^2$, па плоштината на трапезот ќе биде $P=3\cdot 225=675\text{cm}^2$. (**5 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. (**Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 9 одделение, задача 4079**) Нека n е природен број и нека a е цел број еднаков на $\frac{10^{2n}-1}{3\cdot(10^n+1)}$. Ако збирот на цифрите на бројот a е 567, определи ја вредноста на бројот n?

Решение. Ќе го примениме равенството $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

$$a=\frac{10^{2n}-1}{3\cdot(10^n+1)}=\frac{(10^n)^2-1}{3\cdot(10^n+1)}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{3\cdot(10^n+1)}=\frac{10^n-1}{3}\quad \textbf{(10 поени)}$$

(кратењето е можно бидејќи $10^n+1\neq 0$). Бројот 10^n е цел број и тој се состои од една цифра 1 и n цифри 0. (**3 поени**) Бројот 10^n-1 се состои од n цифри 9. (**2 поени**) Следува дека бројот $a=\frac{10^n-1}{3}$ се состои од n цифри 3. (**3 поени**) Тоа значи дека збирот на цифрите на бројот a е еднаков на $3n$. (**2 поени**)

Од условот на задачата имаме дека збирот на цифрите на бројот a е 567, па ја добиваме равенката $3n = 567 \Leftrightarrow n = \frac{567}{3} \Leftrightarrow n = 189$, односно бараниот број е $n = 189$. (**5 поени**)

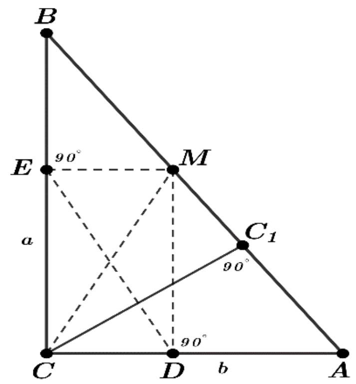
2. (**Нумерус 48-4, Конкурсни задачи, 9 одделение, задача 4052**) Нека $\triangle ACB$ е правоаголен триаголник со прав агол во темето C и M е произволна точка на хипотенузата AB. Точките E и D се ортогонални проекции на точката M врз катетите $a = \overline{BC}$ и $b = \overline{AC}$, соодветно. Докажи дека

$$\overline{DE} \geq \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

За која положба на точката M важи еднаквост во даденото неравенство.

Решение. Четириаголникот $CDME$ е правоаголник, па неговите дијагонали $\overline{CM}$ и $\overline{DE}$ се еднакви. Ако $\overline{CC_1}$ е висина што одговара на хипотенузата $\triangle ACB$, тогаш

$$\overline{DE} = \overline{CM} \geq \overline{CC_1}. \text{ (1)} \qquad \textbf{(8 поени)}$$



Од сличноста на триаголниците $\triangle ACB$ и $\triangle AC_1C$ имаме дека

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BC} : \overline{CC_1},$$

однсно

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{CC_1}. \qquad \textbf{(5 поени)}$$

Според Питагоровата теорема $\overline{AB} = \sqrt{a^2+b^2}$, па следува дека

$$ba = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \overline{CC_1},$$

односно

$$\overline{CC_1} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \text{ (2)} \qquad \textbf{(5 поени)}$$

Од (1) и (2) следува дека $\overline{DE} \geq \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Знакот за еднаквост ќе важи кога $\overline{CM} = \overline{CC_1}$, односно $M \equiv C_1$. (**7 поени**)

3. Ако $x + y = 0$ и $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, пресметај $x^8 + y^8$.

Решение 1. Од $x + y = 0$, имаме дека $x = -y$, па $x^2 = y^2$. (**8 поени**) Со замена на $x^2 = y^2$ во $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ добиваме дека $y^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, односно $2y^2 = \frac{1}{2}$, од каде следува дека $y^2 = \frac{1}{4}$. (**5 поени**)

Според тоа, $x^2 = y^2 = \frac{1}{4}$. (**2 поени**) Од овде добиваме дека

$$x^8 + y^8 = \left(x^2\right)^4 + \left(y^2\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} + \frac{1}{256} = \frac{2}{256} = \frac{1}{128}. \textbf{ (10 поени)}$$

Решение 2. Со квадрирање на левата и десната страна на равенството $x+y=0$ и користејќи дека $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, добиваме дека $x^2+2xy+y^2=0 \Leftrightarrow -2xy=x^2+y^2 \Leftrightarrow -2xy=\frac{1}{2} \Leftrightarrow xy=-\frac{1}{4}$. (**5 поени**)

Со квадрирање на левата и десната страна на равенството $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ и користејќи дека $xy=-\frac{1}{4}$, добиваме дека

$$x^4+2x^2y^2+y^4=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^4+y^4=\frac{1}{4}-2(xy)^2 \Leftrightarrow x^4+y^4=\frac{1}{4}-2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4=\frac{1}{4}-\frac{1}{8} \Leftrightarrow x^4+y^4=\frac{1}{8}.$$ (**10 поени**)

Со квадрирање на левата и десната страна на равенството $x^4+y^4=\frac{1}{8}$ и користејќи дека $xy=-\frac{1}{4}$, добиваме дека

$$x^8+2x^4y^4+y^8=\frac{1}{64} \Leftrightarrow x^8+y^8=\frac{1}{64}-2(xy)^4 \Leftrightarrow x^8+y^8=\frac{1}{64}-2\left(-\frac{1}{4}\right)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^8+y^8=\frac{1}{64}-\frac{1}{128} \Leftrightarrow x^8+y^8=\frac{1}{128}.$$ (**10 поени**)

Решение 3. Од $x+y=0$, со квадрирање добиваме

$$(x+y)^2=0,$$
$$x^2+2xy+y^2=0,$$
$$(x^2+y^2)+2xy=0,$$
$$\frac{1}{2}+2xy=0,$$
$$xy=-\tfrac{1}{4}$$ (**5 поени**)

Следува дека

$$x^8+y^8=(x^4+y^4)^2-2x^4y^4=$$ (**8 поени**)

$$=((x^2+y^2)^2-2x^2y^2)^2-2x^4y^4=$$ (**5 поени**)

$$=((x^2+y^2)^2-2(xy)^2)^2-2(xy)^4=$$ (**2 поени**)

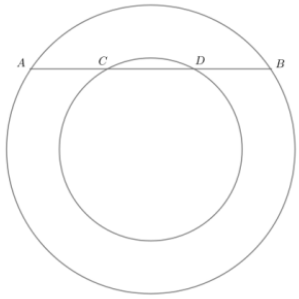
$$=\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right)^2\right]^2-2\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right)^4=$$

$$=\left[\tfrac{1}{4}-2\cdot\tfrac{1}{16}\right]^2-2\cdot\tfrac{1}{256}=$$

$$=\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}\right)^2-\tfrac{1}{128}=\left(\tfrac{1}{8}\right)^2-\tfrac{1}{128}=\tfrac{1}{64}-\tfrac{1}{128}=\tfrac{1}{128}.$$ (**5 поени**)

4. Дадени се два концентрични круга. Тетивата AB на поголемиот круг е разделена на три еднакви делови со помалиот круг со точки C и D. Ако $\overline{AC}=m$, пресметај ја плоштината на прстенот помеѓу двата круга, во зависност од m и радиусите на круговите.

Решение: Нека $\overline{OP}\perp\overline{AB}$ и $\overline{OP}=d$. **.....**(3)



Бидејќи $\overline{CD}=m$, имаме дека

$$\overline{PD}=\frac{m}{2} \text{ и } \overline{PB}=\frac{m}{2}+m=\frac{3m}{2}.$$ **.....**(5)

Нека r и R се радиусите на помалиот и поголемиот круг соодветно. Тогаш, според Питагоровата теорема

$$d^2+\overline{PB}^2=R^2,$$

$$d^2+\left(\frac{3m}{2}\right)^2=R^2, \text{ т.е.}$$

$$d^2+\frac{9m^2}{4}=R^2$$ (**5 поени**)

и

$$d^2+\overline{PD}^2=r^2,$$

$$d^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2=r^2, \text{ т.е.}$$

$$d^2+\frac{m^2}{4}=r^2.$$ (**5 поени**)

Со изедначување на двете равенства добиваме

$$R^2-\frac{9m^2}{4}=r^2-\frac{m^2}{4},$$

$$\frac{9m^2}{4}-\frac{m^2}{4}=R^2-r^2,$$

$$\frac{8m^2}{4}=R^2-r^2, \text{ т.е.}$$

$$R^2-r^2=2m^2.$$ (**5 поени**)

Плоштината на кружниот прстен е $P=(R^2-r^2)\pi=2m^2\pi$. (**2 поени**)