РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ОПШТИНСКИОТ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
2.2.2024 година

Важна напомена: Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата.
Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.
Грешка во пресметување при правилно поставено решение не се казнува со одземање на сите поени за соодветниот чекор туку се предвидува намалување на поените и тоа истоветно се применува при вреднување на решенијата на сите натпреварувачи.
****

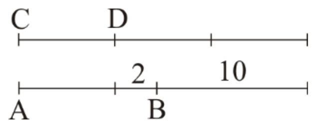
РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IV ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 4 одделение, задача 4053) Во еден селски двор пасат кокошки и овци. Овците и кокошките заедно имаат вкупно 40 глави и 130 нозе. Колку овци и колку кокошки има во дворот?

Решение: Сите 40 животни имаат барем по 2 нозе, што е вкупно 80 нозе. Остануваат $130-80=50$ нозе кои ќе се поделат по 2 на 25 животни. Така, 25 животни ќе имаат по 4 нозе, па значи 25 се овци, а $40-25=15$ се кокошки.

2. (Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 4-5 одделение, задача 4058) Должината на отсечката AB е за 2cm поголема од должината на отсечката CD. Ако должината на отсечката AB се зголеми за 10cm, а должината на отсечката CD се зголеми три пати, тогаш ќе се добијат еднакви отсечки. Колкави се должините на отсечките AB и CD, пред зголемувањето?

Решение: Цртаме цртеж на кој ги нанесуваме условите на задачата:



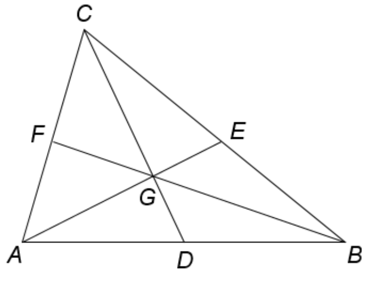
Од цртежот е јасно дека кога отсечката CD ќе ја зголемиме три пати, тогаш таа се зголемила за двојната вредност од нејзината должина. Тоа зголемување изнесува 2+10=12 cm, од каде за должината на CD се добива 12:2=6 cm. Според тоа отсечката AB има должина од 6+2=8 cm.

3. Ива ги преброила парите во својата касичка и рекла: „Ако ги заокружам на најблиската стотка, имам околу 5700 денари.“ Бојан точно ја заокружил својата заштеда на најблиската илјадарка и рекол: „Имам околу 6 илјади денари во касичката.“
Дали е можно Ива да има повеќе пари во својата касичка од што има Бојан во својата? Објасни го прецизно својот одговор.
Решение: Да, можно е.
Броевите што се заокружуваат на бројот 5700 при заокружување на најблиската стотка се броевите: 5650, 5651, 5652, . . . , 5748, 5749.
Броевите што се заокружуваат на бројот 6000 при заокружување на најблиската илјадарка се броевите: 5500, 5501, 5502, . . . , 6498, 6499.

4. Именувај ги сите триаголници на цртежот.
Решение: (Вкупно се 16 триаголници, не е важен редоследот на испишување на темињата на триаголниците.)

ABC, AGD, DGB, BGE, EGC, CGF, FGA

AGB, BGC, CGA, ADC, BDC, ACE, ABE, ABF, CBF



РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА V ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 4-5 одделение, задача 4060) Колку четирицифрени броеви постојат, чија почетна и крајна цифра е 3?

Решение: Бараните броеви го имаат обликот $\overline{3ab3}$.

Прв начин. Имајќи го предвид обликот на бараните броеви, прашањето се сведува на тоа колку двоцифрени броеви постојат $\overline{ab}$, со тоа што и првата цифра може да биде 0. Постојат 90 двоцифрени броеви (броевите од 10 до 99) и постојат уште 10 броеви чија прва цифра е 0 (броевите 00, 01, 02,..., 09). Значи, постојат вкупно 100 броеви чија почетна и крајна цифра е 3.

Втор начин. На местото на цифрата a може да стојат 10 цифри, а и на местото на цифрата b може да стојат 10 цифри, така што има вкупно $10 \cdot 10 = 100$ можности да се формира број од обликот $\overline{3ab3}$.

Трет начин. Ако $a = b$, постојат 10 такви броја. Ако $a \neq b$, тогаш на местото на a може да бидат сите десет цифри, а на местото на b со секоја цифра a ќе биде по една од останатите девет цифри, па $10 \cdot 9 = 90$. Значи, вкупно има $90 + 10 = 100$ такви броја.

2. (Нумерус 48-3, Конкурсни задачи, 4-5 одделение, задача 4003) Јан и Лука купиле кеса бонбони. Прво, заедно, изеле $\frac{2}{3}$ од бонбоните, а подоцна секој од нив изел уште по една бонбона. Другиот ден, заедно, изеле $\frac{1}{2}$ од остатокот и им останале уште 3 бонбони. Колку бонбони имало во кесата, на почетокот?

Решение: Трите бонбони што останале се $\frac{1}{2}$ од остатокот после првиот ден, што значи после првиот ден останале 6 бонбони. Ако ги додадеме двете што ги изеле подоцна првиот ден ќе добиеме дека $\frac{1}{3}$ од вкупниот број бонбони е 8. Значи, имало $3 \cdot 8 = 24$ бонбони.

3. Правоаголник и квадрат имаат еднакви периметри. Страната на квадратот е долга 6 cm. Едната страна на правоаголникот е долга 4 cm. Колку е долга другата страна на правоаголникот?

Решение: Периметарот на квадрат со страна долга 6 cm е еднаков на $4 \cdot 6 = 24\ cm$.

Ќе ги означиме страните на правоаголникот со буквите a и b и страната a = 4 cm.

Тогаш периметарот на правоаголникот е $2 \cdot a + 2 \cdot b = 24\ cm$.

Оттука, $2 \cdot b = 24 - 2 \cdot 4 = 16\ cm$ и добиваме дека $b = 8\ cm$.

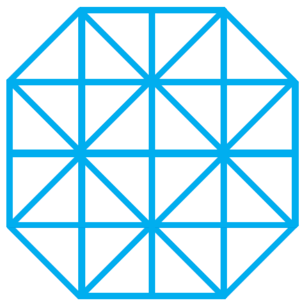
4. Обој едно од најмалите квадратчиња на цртежот десно.

а) Колку квадратчиња имаат еднаква плоштина со обоеното квадратче?

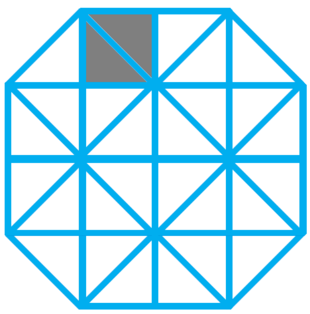
б) Колку квадрати имаат 4 пати поголема плоштина од обоеното квадратче?

в) Колку квадрати имаат 2 пати поголема плоштина од обоеното квадратче?

г) Колку вкупно квадрати има на цртежот?



Решение.



а) 12

б) 5

в) 5

г) 22

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VI ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 48-3, Конкурсни задачи, 5-6 одделение, задача 4007) Колку цифри се потребни за да се нумерираат 425 страници од една книга?

Решение: За првите девет страници употребуваме по една цифра, односно вкупно 9 цифри. Од 10-тата до 99-тата страница имаме 90 страници и за секоја од нив употребуваме по 2 цифри, односно вкупно 2·90=180 цифри. Од 100-тата до 425-тата страница имаме 326 страници со по 3 цифри, па за нив употребуваме 3·326=978 цифри. Вкупно за сите 425 страници употребуваме 9+180+978=1167 цифри, односно потребни се вкупно 1167 цифри за да се нумерира книга од 425 страници.

2. Дадена е дропката $\frac{2023}{2024}$. Еден број е одземен од броителот и е додаден на именителот на таа дропка. На тој начин е добиена дропка која по кратењето изнесува $\frac{1}{2}$. Кој е тој број?

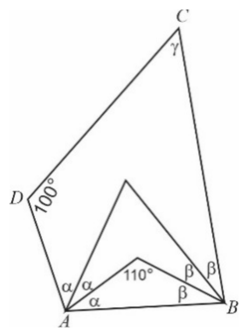
Решение: Нека бараниот број е x. Значи $\frac{2023-x}{2024+x}=\frac{1}{2}$. Тогаш

$$4046-2x=2024+x$$
$$\Rightarrow 3x=2022$$
$$\Rightarrow x=674.$$

3. (Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 6-7 одделение, задача 4067) Даден е правоаголник $ABCD$ на кој едната страна е долга 42 cm, а другата е пет пати пократка од првата. Пресметај ја плоштината на квадратот $EFGH$ чиј периметар е три пати помал од периметарот на зададениот правоаголник $ABCD$.

Решение: Нека a е должината на страната на правоаголникот $ABCD$, $a=42\,\text{cm}=420\,\text{mm}$. Должината на другата страна е $b=420:5=84$ mm. Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е $L=2\cdot(420\ +\ 84)=2\cdot 504=1008$ mm. Периметарот на квадратот $EFGH$ кој е три пати помал од периметарот на правоаголникот е $L=1008:3=336$ mm. Оттука, должината на страната на квадратот е еднаква на $336:4=84$ mm, а плоштината на квадратот е еднаква на $P=84\cdot 84=7056\text{ mm}^2$.

4. Даден е четириаголник означен како на цртежот. Одреди ја вредноста на аголот γ.



Решение: Според цртежот имаме: $3\alpha+3\beta+100^0+\gamma=360^0$

$$3(\alpha+\beta)+100^0+\gamma=360^0$$

$$3\cdot 70^0+100^0+\gamma=360^0 \quad \Rightarrow \gamma=50^0$$

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 48-2, Конкурсни задачи, задача 3986) Во едно училиште има точно три паралелки во 7 одделение: 7а, 7б и 7в. Во 7а одделение учат 36% од вкупниот број на учениците од сите три одделенија. Бројот на ученици во 7б одделение е еднаков на $\frac{5}{9}$ од бројот на ученици во 7а. Колку ученици учат во секое од одделенијата, ако во 7а има 6 ученици помалку од 7в одделение?

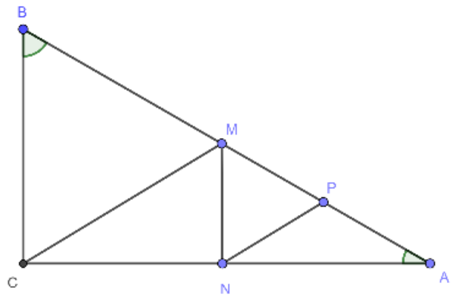
Решение. Нека x е вкупниот број на ученици од сите три одделенија. Во 7а одделение има $0,36=\frac{9}{25}$, во 7б има $\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{25}=\frac{1}{5}$, додека пак во 7в има $1-\left(\frac{9}{25}+\frac{1}{5}\right)=\frac{11}{25}$ од вкупниот број на ученици од сите три одделенија. Од условот на задачата дека во 7а има 6 ученици помалку од 7в одделение имаме дека $\frac{11}{25}x-\frac{9}{25}x=6$ односно $\frac{2}{25}x=6$, од каде следува дека $x=75$. Според тоа, добиваме дека во 7а одделение има 27 ученици, во 7б има 15 ученици, а во 7в има 33 ученици.

2. Определи ги сите трицифрени природни броеви $\overline{abc}$ деливи со 4 и 17 и чиј збир на цифри е еднаков на 17.

Решение. ***Прв начин:*** Природниот број $\overline{abc}$ е делив со 4 ако неговиот двоцифрен завршеток е делив со 4. Добиваме дека можни завршетоци за $\overline{abc}$ се: 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92 и 96. Бидејќи a, b и c се цифри и важи $a+b+c=17$, заклучуваме дека мора да биде $b+c>7$, па така се намалуваат можностите на двоцифрените завршетоци на бројот $\overline{abc}$, односно остануваат следните можности: 08, 28, 36, 44, 48, 56, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92 и 96. Од условот $a+b+c=17$ следува дека можни решенија се броевите: 908, 728, 836, 944, 548, 656, 764, 368, 872, 476, 980, 584, 188, 692, 396. Од овие броеви, единствен број делив со 17 е бројот 476. Бараниот број делив со 4 и 17 и чиј збир на цифри е еднаков на 17 е бројот 476.

Втор начин: Ако бројот $\overline{abc}$ е делив со броевите 4 и 17, тогаш тој мора да е делив со бројот $4\cdot17=68$
Трицифрените броеви кои се деливи со бројот 68 се следниве: 136, 204, 272, 340, 408, 476, 544, 612, 680, 748, 816, 884 и 952.
Добиваме дека, единствен број кој го задоволува барањето на задачата е бројот 476.

3. За аглите во правоаголниот триаголник ABC важи: $\measuredangle ABC = 2\cdot\measuredangle CAB$, а за страните на триаголникот важи $\overline{AB}=2\cdot\overline{BC}$ и $\overline{BC}=8cm.$ Точката M е средина на хипотенузата AB, точката N е средина на катетата AC и точката P средина на AM. Пресметај ја должината на искршената линија $BCMNPA$.



Решение. Од условот на задачата, острите агли во триаголникот се $\measuredangle ABC=60°$, $\measuredangle CAB=30°$.
Го разгледуваме триаголникот MBC. Од $\measuredangle MBC=60^0$, $\overline{BC}=\overline{BM}$, триаголникот е рамнокрак со агол при врвот 60^0, па мора да е рамностран. Добиваме $\overline{CM}=8cm$.

За триаголникот ABC знаеме дека M е средина на AB, N е средина на AC, тогаш MN е средна линија на триаголникот ABC , па $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=4cm$.

Сега, го разгледуваме триаголникот AMC. Од $\overline{MC}=\overline{AM}$, значи триаголникот е рамнокрак. Од тоа што P е средина на AM и N е средина на AC, се добива дека NP е средна линија за триаголникот AMC, т.е. $\overline{NP}=\frac{1}{2}\overline{MC}=4cm$.

Јасно, $\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AM}=4cm$.

Добиваме $\overline{BC}+\overline{CM}+\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PA}=8+8+4+4+4=28cm$.

4. (Нумерус 46-4, Конкурсни задачи, задача 3819) Ги разгледуваме рамнокраките триаголници чии должини на страни во сантиметри се природни броеви. Одреди го бројот на сите такви триаголници чиј периметар изнесува 2021cm.

Решение. Нека a е должина на основата, а b е должина на кракот (во cm) на триаголникот кој го исполнува условот на задачата. Од условот L=2021 cm имаме дека a+2b е непарен број (по услов L=2021 cm), т.е. a е непарен број. Збирот од должините на двете страни е поголем од третата страна, па мора a < 2b. Од a+2b=2021, следува дека a < 1011, па a може да биде кој било елемент од множеството $\{1, 3, 5, \ldots, 1009\}$. Бидејќи множеството $\{1, 3, 5, \ldots, 1009\}$ има 505 елементи, следува дека бараниот број на триаголници е 505.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. За еден ракометен тим е познато дека минатата сезона одиграл неколку натпревари. На три натпревари постигнал 20 погодоци, на два натпревари постигнал 15 погодоци, а на сите останати по 30 погодоци. Колку натпревари одиграл тимот во сезоната, ако е познато дека просечниот број на постигнати погодоци на тимот во таа сезона бил 25?

Решение. Нека x е бројот на натпревари на кои ракометниот тим постигнал 30 погодоци. Според тоа, вкупниот број на натпревари кои ги одиграл тимот во сезоната е еднаков на $3+2+x=5+x$ натпревари, а вкупниот број на погодоци кои ги постигнал тимот со таа сезона е еднаков на $3\cdot20+2\cdot15+30x=90+30x$ погодоци. Бидејќи просечниот број на постигнати погодоци на тимот во таа сезона бил 25, добиваме дека

$$\frac{90+30x}{5+x}=25 \Leftrightarrow 90+30x=25\cdot(5+x) \Leftrightarrow 90+30x=125+25x \Leftrightarrow 30x-25x=125-90 \Leftrightarrow 5x=35 \Leftrightarrow x=7 .$$

Тогаш $5+x=5+7=12$, односно ракометниот тим одиграл 12 натпревари минатата сезона.

2. (Нумерус 48-3, Конкурсни задачи, 7-8 одделение, задача 4016) Група работници за 4 дена ја провериле сообраќајната сигнализација на еден магистрален пат. Првиот ден провериле вдолж $\frac{1}{17}$ од патот, вториот ден трипати повеќе од првиот ден, третиот ден за $60\,\text{km}$ повеќе од вториот ден, а четвртиот ден провериле онолку километри од патот колку што провериле првиот и вториот ден заедно. Определи ја должината на магистралниот пат.

Решение. Нека со x ја означиме должината на магистралниот пат. Од условите на задачата, првиот ден работниците провериле $\frac{1}{17}x$, вториот ден $\frac{3}{17}x$, третиот ден $\frac{3}{17}x+60$ и четвртиот ден $\frac{1}{17}x+\frac{3}{17}x=\frac{4}{17}x$. Според тоа добиваме дека

$$\frac{1}{17}x+\frac{3}{17}x+\frac{3}{17}x+60+\frac{4}{17}x=x \Leftrightarrow \frac{11}{17}x+60=x \Leftrightarrow$$

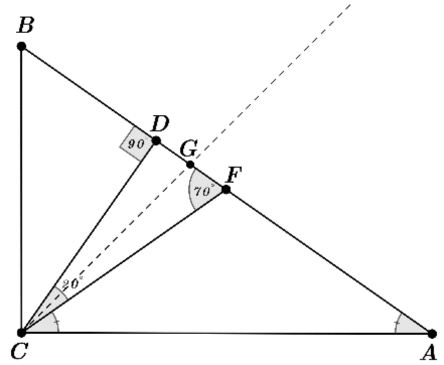
$$\Leftrightarrow x-\frac{11}{17}x=60 \Leftrightarrow \frac{6}{17}x=60 \Leftrightarrow x=\frac{17}{6}\cdot 60 \Leftrightarrow x=170 .$$

Значи, должината на магистралниот пат е $170\,\text{km}$.

3. Најди ги сите прости броеви кои можат да се претставaт како збир на два последователни природни броја.

Решение. Нека p е прост број. За $p=2$, единственото претставување како збир на два природни броја е претставувањето $2=1+1$, па не може да се претстави како збир на два последователни природни броја. За $p=3$ имаме дека $3=1+2$, од каде следува дека $p=3$ е прост број кој може да се претстави како збир на два последователни природни броја. Сега, нека p е прост број и $p>3$. Тогаш тој може да се претстави во еден од следните облици $p=6k-1$ или $p=6k+1$ за некој природен број $k\in\mathbb{N}$. Ако $p=6k-1$, $k\in\mathbb{N}$, тогаш $p=(3k-1)+3k$. Ако $p=6k+1$, $k\in\mathbb{N}$, тогаш $p=3k+(3k+1)$. Добиваме дека секој прост број $p>3$ може да се претстави како збир на два последователни природни броја. Значи, секој прост број p, $p\geq 3$ може да се претстави како збир на два последователни природни броја.

4. (Нумерус 48-3, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 4019) Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C . Нека D е подножјето на висината спуштена од темето C кон страната AB и точката F е пресек на страната AB со тежишната линија повлечена од темето C . Ако аголот помеѓу висината CD и тежишната линија CF е 20° , одреди ја големината на аголот помеѓу симетралата на аголот во темето C и тежишната линија CF .



Решение. Нека важат условите на задачата. Нека G е пресечната точка на симетралата на аголот во темето C и страната AB. Триаголникот FDC е правоаголен триаголник со прав агол во темето D и $\angle DCF=20^\circ$, па $\angle CFD=70^\circ$. Тогаш,

$$\angle CFA=180^\circ-\angle CFD=180^\circ-70^\circ=110^\circ .$$

Триаголникот CAF е рамнокрак триаголник со агол при врвот $\angle CFA=110^\circ$, па $\angle ACF=\angle FAC=35^\circ$. Од тоа што $\angle ACG=45^\circ$, добиваме дека $\angle FCG=\angle ACG-\angle ACF=45^\circ-35^\circ=10^\circ$, односно аголот помеѓу симетралата на аголот во темето C и тежишната линија CF изнесува 10°.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ

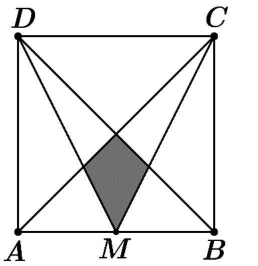
1. Одреди ја последната цифра на бројот $\left(\left(\left(\left(3^2\right)^3\right)^4\right)^5\right)^6$.

Решение: Бидејќи $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ завршува на цифрата 1, тоа важи и за секој степен на бројот 3^4. Следува дека последната цифра на бројот (за $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 180$)

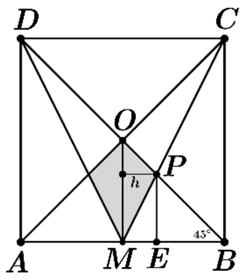
$$((((3^2)^3)^4)^5)^6 = 3^{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = (3^4)^{180}$$

е еднаква на 1.

2. (Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 9 одделение, задача 4078) Квадратот $ABCD$ даден на цртежот има страна со должина 1m. Точката M е средишна точка за страната AB. Пресметај ја плоштината на исенчениот дел на сликата.



Решение. Нека точката O е центар на квадратот и P е пресечна точка на MC и BD. Нека h е висината на ΔOMP. Нека E е подножје на нормалата спуштена од точката P кон страната AB. Значи, $\overline{ME} = h$. Од друга страна ΔMPE е сличен со ΔMCB, па имаме дека



$$\overline{ME} : \overline{PE} = \overline{MB} : \overline{BC} \ ,$$

$$\overline{ME} \cdot \overline{BC} = \overline{PE} \cdot \overline{MB} \ ,$$

односно $\overline{ME} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PE}$. Оттука $h = \frac{1}{2} \cdot \overline{PE}$, односно $\overline{PE} = 2h$. Бидејќи $\angle PBE = 45^\circ$ имаме дека $\overline{EB} = \overline{PE} = 2h$. Следува дека

$$\overline{MB} = \overline{ME} + \overline{EB} \ ,$$

$$\frac{1}{2} = h + 2h \ ,$$

односно $h = \frac{1}{6}$. Тогаш $P_{\Delta OPM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OM} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$, односно $P_{\Delta OPM} = \frac{1}{24}\text{m}^2$. Бараната плоштина е

$$P = 2 \cdot P_{\Delta OPM} = 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{12}\text{m}^2 .$$

Второ решение: Точката O е центар на квадратот, што значи дека е средишна точка за AC. Точката M е средишна точка за страната AB. Следува дека точката P е тежиште на триаголникот ABC. Значи $BP{:}\,PO = 2{:}\,1$. Плоштината на ΔABO е $\frac{1}{4}$ од плоштината на квадратот, а плоштината на ΔMBO е $\frac{1}{8}$ од плоштината на квадратот, и поради $BP{:}\,PO = 2{:}\,1$, плоштината на ΔMOP е $\frac{1}{24}$ од плоштината на квадратот. Бараната плоштина е двапати по плоштината на ΔMOP, т.е. е еднаква на $\frac{1}{12}\ m^2$.

3. (Нумерус 48-1, Конкурсни задачи, 9 одделение, задача 3967) Аце, Боби и Симе заедно работат на училишен проект. Ако Аце не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 2 часа. Ако Боби не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 3 часа. Ако Симе не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 4 часа. Случајно дознале дека Даре ќе им помогне. Ако Даре работи сам на проектот, тогаш ќе му требаат 12 часа да го заврши проектот. Кое е најмалото потребно време што е потребно за да го завршат проектот?

Решение: Нека a, b, c и d се времињата што им се потребни на Аце, Боби, Симе и Даре соодветно, самостојно да го завршат проектот. Тоа значи дека за 1 час, Аце сам би завршил $\frac{1}{a}$ од проектот, Боби $\frac{1}{b}$ од проектот, Симе $\frac{1}{c}$ од проектот, а Даре $\frac{1}{d}$ од проектот. Ги добиваме следниве равенки:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3},\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4} \text{ и } \frac{1}{d}=\frac{1}{12}.$$

Најмалото потребно време x за да го завршат проектот се добива ако работат заедно сите четири ученици. За 1 час заедно ќе завршат:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{d},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{d},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]+\frac{1}{d},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{12}+\frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{8}.$$

Оттука добиваме дека најмалото потребно време е $x=\frac{8}{5}$ часа, односно 96 минути.

4. Даден е четириаголник $ABCD$, така што збирот од должините на страните AB и AD е 10 cm, $BC=CD$ и аглите BAD и BCD се прави. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Решение: Нека $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{BC}=\overline{CD}=c$, $\overline{BD}=d$ и $P_{ABCD}=P$. Тогаш

$$P_{ABCD}=P_{\Delta BAD}+P_{\Delta BCD}, \text{ т.е.}$$

$$P=\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}.$$

Со примена на Питагоровата теорема на триаголниците BCD и BAD добиваме соодветно

$$d^2=2c^2 \text{ и } d^2=a^2+b^2.$$

Со изедначување на десните страни имаме

$$2c^2=a^2+b^2,$$

т.е. по делење со 4,

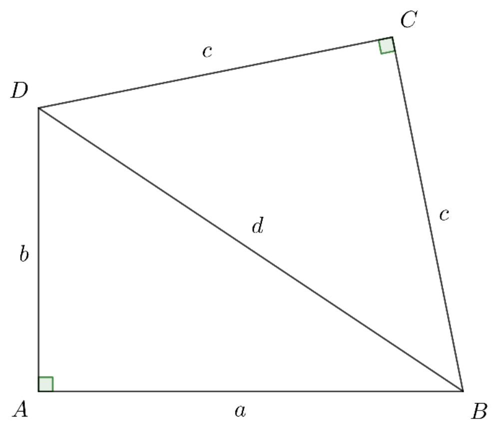
$$\frac{c^2}{2}=\frac{a^2+b^2}{4}.$$

Со замена во равенството $P=\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}$ добиваме

$$P=\frac{ab}{2}+\frac{a^2+b^2}{4},$$

$$P=\frac{2ab+a^2+b^2}{4}, \text{ т.е.}$$

$$P=\frac{(a+b)^2}{4}.$$



Но, $a+b=10$, па се добива дека

$$P=\frac{10^2}{4}=\frac{100}{4}=25.$$

Значи бараната плоштина е $P_{ABCD}=P=25\ cm^2$.