XLVIII ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
14.5.2023 година

6 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Дрвен квадар со рабови $72\ \mathrm{dm}, 96\ \mathrm{dm}$ и $120\ \mathrm{dm}$ е поделен на еднакви коцки, со најголем раб, при што должината на работ е природен број. Добиените коцки се наредени една врз друга, во столб. Колку метри е висок така добиениот столб?

Решение. Страната на коцката е НЗД$(72,96,120)=24$ т.е. $24\ \mathrm{dm}$. **(5 поени)**

Секоја од страните ја делиме со заедничкиот делител, т.е. $72:24=3$, $96:24=4$ и $120:24=5$ **(10 поени),** па следува дека квадарот е поделен на $3\cdot4\cdot5=60$ коцки. **(5 поени)**

Висината на столбот ќе изнесува $60\cdot24=1440\ \mathrm{dm}$ т.е 144 метри. **(5 поени)**

2. Колку има трицифрени природни броеви такви што цифрата на стотките е еднаква на збирот на цифрите на десетките и единиците?

Решение. Ако бараните броеви ги запишеме од облик $\overline{abc}$, тогаш важи $a=b+c$. **(5 поени)**

Бидејќи a,b,c се цифри и $a\neq0$, ги добиваме следниве броеви:

101, 110,
211, 202, 220,
312, 321, 330, 303,
413, 431, 422, 404, 440,
... . **(15 поени)**

Значи, вкупниот број на бараните броеви е $2+3+4+5+6+7+8+9+10=54$. **(5 поени)**

3. Збирот на педесет различни природни броеви е 8 625. Вториот број е за 5 поголем од првиот, третиот број е за 5 поголем од вториот, четвртиот број е за 5 поголем од третиот, ... , педесеттиот број е за 5 поголем од четириесет и деветтиот број. Определи ги најголемиот и најмалиот собирок во дадениот збир.

Решение. Ако го означиме првиот собирок со x. Тогаш првиот број е x ,вториот е $x+5$, третиот $x+5+5=x+2\cdot5$, ... , 50-тиот број е $x+49\cdot5$ **(5 поени)**

$50x+(1+2+3+...+49)\cdot5=8\,625$ **(5 поени)**

$1+2+3+...+49=\frac{49\cdot50}{2}=1225$ **(5 поени)**

$50x+1225\cdot5=8\,625$

$50x+6125=8\,625$

$50x=2500$

$x=50$ **(5 поени)**

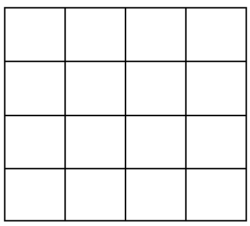
50 + 49 · 5 = 50 + 245 = 295

Најмалиот собирок е 50, а најголемиот 295. **(5 поени)**

4. Квадрат со страна 4 cm поделен е на 16 квадрати со страна 1 cm, како на цртежот.

а) Колку вкупно квадрати има на цртежот?

б) Пресметај го збирот на периметрите на сите тие квадрати.



Решение. а) На цртежот има 16 квадрати со страна 1 cm, 9 квадрати со страна 2 cm, 4 квадрати со страна 3cm и 1 квадрат со страна 4cm, т.е.$16+9+4+1=30$ квадрати. **(10 поени)**

б) 16 квадрати со страна 1 cm, периметарот е 16·4=64 cm, **(3 поени)**

9 квадрати се со страна 2 cm, периметарот е 9·8=72 cm, **(3 поени)**

4 квадрати со страна 3 cm, периметарот е 4·12=48 cm и **(3 поени)**

1 квадрат со страна 4 cm, периметарот е 1·16=16 cm. **(3 поени)**

Значи збирот на периметрите на сите квадрати на цртежот е 64+72+48+16=200 cm. **(3 поени)**

7 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Определи ги сите нескратливи дропки од облик $\frac{a}{b}$, ако a и b се природни броеви и $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=2\frac{71}{80}$.

Решение. Од условот на задачата a и b се природни броеви и јасно $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$. Бидејќи $\frac{a}{b}$ е нескратлива дропка, следува дека $\text{НЗД}(a,b)=1$. Од тоа што $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=2\frac{71}{80}$, односно $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{231}{80}$, добиваме дека $80(a^2-b^2)=231ab$, односно $80(a^2-b^2)=3\cdot7\cdot11\cdot ab$. **(5 поени)** Бидејќи 3, 7 и 11 не се делители на 80 и $\text{НЗД}(a,b)=1$, следува дека a и b се делители на 80. **(10 поени)** Делители на 80 се 1,2,4,5,8,10,16,20,40,80. Со проверка добиваме дека единствената нескратлива дропка која ги задоволува условите на задачата е $\frac{16}{5}$. **(10 поени)**

2. Дедо Коста треба да ја изора и посее својата нива со семенски материјал-пченица. Тој нивата ја изорал за 3 дена. Првиот ден изорал 20% од целата нива и уште 16 декари, вториот ден 30% од остатокот од првиот ден и уште 20 декари, а третиот ден 75% од остатокот од претходниот ден и последните 30 декари. Колку тони семенски материјал-пченица треба да купи дедо Коста, ако за сеење на еден декар е потребно 3,5 kg пченица?

Решение. Нека x е бројот на декари што ги има нивата, $x>0$. Дедо Коста првиот ден изорал $0,2x+16$. После првиот ден останале за орање уште $x-(0,2x+16)=0,8x-16$ декари. **(5 поени)** Вториот ден тој изорал $0,3(0,8x-16)+20=0,24x+15,2$ декари. После вториот ден останале за орање уште $0,8x-16-(0,24x+15,2)=0,8x-16-0,24x-15,2=0,56x-31,2$. **(5 поени)** Третиот ден тој изорал $0,75(0,56x-31,2)+30$ декари**.** После третиот ден останале

$$0,56x-31,2-\left(0,75(0,56x-31,2)+30\right).$$ **(5 поени)**

Бидејќи нивата е изорана за три дена значи, останале за орање уште 0 декари, од каде што се добива равенството

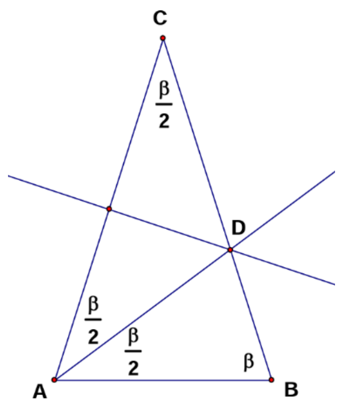
$$0,56x-31,2-\left(0,75(0,56x-31,2)+30\right)=0.$$ **(5 поени)**

Со решавање на оваа равенка добиваме дека

$$0,56x-31,2-\left(0,75(0,56x-31,2)+30\right)=0 \Leftrightarrow 0,56x-31,2-\left(0,42x-23,4+30\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$0,56x-31,2-0,42x-6,6=0 \Leftrightarrow 0,14x-37,8=0 \Leftrightarrow x=270.$$

Значи, бројот на декари што ги има нивата е 270, односно за три дена дедо Коста изорал 270 декари. Бидејќи за еден декар е потребно 3,5 kg од семенскиот материјал-пченица, следува дека дедо Коста треба да купи $3,5\,\text{kg}\cdot270=945\,\text{kg}$ семенски материјал-пченица, односно $0,945\,\text{t}$. **(5 поени)**

3. Во рамнокракиот триаголник ABC симетралата на кракот AC и симетралата на аголот BAC се сечат во точката D која што припаѓа на кракот BC. Одреди ја големината на аголот CDA.

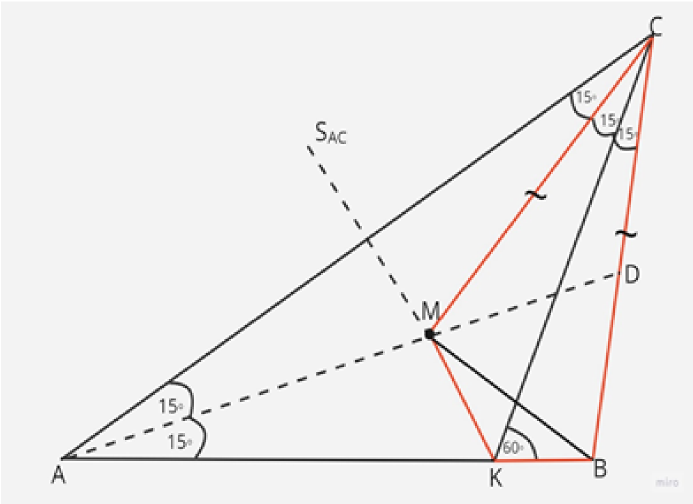


Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак, па важи $\measuredangle BAC=\measuredangle CBA=\beta$. Правата AD е симетрала на аголот $\measuredangle BAC$, па $\measuredangle BAD=\measuredangle DAC=\frac{\beta}{2}$. **(5 поени)** Точката D припаѓа на симетралата на страната AC, па е еднакво оддалечена од точките A и C, односно важи $\overline{AD}=\overline{DC}$. **(5 поени)**

Триаголникот ADC е рамнокрак таков што $\measuredangle DAC=\measuredangle ACD=\frac{\beta}{2}$. **(5 поени)**

Во триаголникот ABC големините на внатрешните агли се β,β и $\frac{\beta}{2}$, па важи $\beta+\beta+\dfrac{\beta}{2}=180°$, т.е. $\beta=72°$. **(5 поени)** Во рамнокракиот триаголник ADC аголот $\measuredangle CDA$ е агол помеѓу краците. Следува $\measuredangle CDA=180°-2\cdot\dfrac{\beta}{2}=180°-72°=108°$. **(5 поени)**

4. За внатрешните агли на ΔABC важи следново: аголот во темето B е $\dfrac{7}{2}$ од аголот во темето A, а аголот во темето C е $\dfrac{3}{2}$ од аголот во темето A. Симетралата на страната AC од ΔABC ги сече симетралата на аголот во темето A и страната AB во точките M и K, соодветно. Докажи дека ΔBCM е рамнокрак и пресметај го периметарот на четириаголникот $BCMK$ ако $\overline{AM}+\overline{MK}=6\,cm$.



Решение: Од условот на задачата за внатрешните агли на ΔABC важи следново,

$\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=\measuredangle A+\dfrac{7}{2}\cdot\measuredangle A+\dfrac{3}{2}\cdot\measuredangle A=6\cdot\measuredangle A=180^0$ од каде што за аглите во $\triangle ABC$ добиваме $\measuredangle A=30^0$, $\measuredangle B=105^0$ и $\measuredangle C=45^0$. **(5 поени).** Бидејќи $M\in s_{AC}$ и $K\in s_{AC}$, тогаш $\overline{AM}=\overline{CM}$ и $\overline{AK}=\overline{CK}$ што значи дека $\triangle ACM$ и $\triangle AKC$ се рамнокраки, а од тоа што AD е симетрала на $\measuredangle A=30^0$ следува дека

$\measuredangle MAC=\measuredangle MAB=\measuredangle ACM=\measuredangle MCK=15^0$.

Од последново следува дека

$\measuredangle BCK=\measuredangle BCA-\measuredangle KCA=45^0-30^0=15^0$. **(5 поени)** Бидејќи MK лежи на симетралата на страната AC и на симетралата на $\measuredangle AKC$, тогаш важи

$\measuredangle AKM=\measuredangle CKM=\dfrac{1}{2}\cdot\measuredangle AKC=\dfrac{180^0-4\cdot15^0}{2}=\dfrac{180^0-60^0}{2}=60^0$. Па така за $\measuredangle BKC$ добиваме $\measuredangle BKC=180^0-\measuredangle AKC=180^0-120^0=60^0$ (или $\measuredangle BKC$ е надворешен агол за $\triangle AKC$ и $\measuredangle BKC=30^0+30^0=60^0$). **(5 поени)**

Бидејќи $\measuredangle BKM=180^0-\measuredangle AKM=180^0-60^0=120^0$, а од тоа што $\measuredangle BKC=60^0$ следува дека $\measuredangle MKC=60^0$ исто така, тогаш $\triangle KMC$ и $\triangle KBC$ се складни т.е. $\triangle KMC\cong\triangle KBC$ според признакот за складност ACA

$(1)\,\measuredangle MCK=\measuredangle BCK=15^0$;

$(2)\,CK$ – им е заедничка страна;

$(3)\,\measuredangle MKC=\measuredangle BKC=60^0$.

Од последново следува дека $\overline{CB}=\overline{CM}$, т.е. $\triangle BCM$ е рамнокрак. **(5 поени)**

Од условот на задачата исто така имаме $\overline{AM}+\overline{MK}=6\,cm$, тогаш од $\overline{AM}=\overline{CM}$ следува $\overline{CM}+\overline{MK}=6\,cm$. Од складноста на $\triangle KMC$ и $\triangle KBC$ пак за периметарот L_{BCMK} го добиваме следново,

$$L_{BCMK}=\overline{CM}+\overline{MK}+\overline{CB}+\overline{BK}=2\left(\overline{CM}+\overline{MK}\right)$$
$$=2\left(\overline{AM}+\overline{MK}\right)=2\cdot6=12\,cm.$$
(5 поени)

8 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Нека a, b, c и d се меѓусебно различни природни броеви. Ако $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$, тогаш $\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2}+\frac{b^6c^6}{2a^2d^2}}$ е квадрат на природен број. Докажи!

Решение. Од $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ имаме дека

$$\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2-d^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2+a^2d^2-b^2c^2-b^2d^2=a^2c^2-a^2d^2+b^2c^2-b^2d^2\Leftrightarrow 2a^2d^2=2b^2c^2\Leftrightarrow a^2d^2=b^2c^2,$$

односно $a^2d^2=b^2c^2$. **(10 поени)** Според тоа добиваме дека $a^6d^6=\left(a^2d^2\right)^3=\left(b^2c^2\right)^3=b^6c^6$, односно $a^6d^6=b^6c^6$. **(5 поени)** Со замена на $a^2d^2=b^2c^2$ и $a^6d^6=b^6c^6$ во $\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2}+\frac{b^6c^6}{2a^2d^2}}$ добиваме дека

$$\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2}+\frac{b^6c^6}{2a^2d^2}}=\sqrt{\frac{b^6c^6}{2b^2c^2}+\frac{b^6c^6}{2b^2c^2}}=\sqrt{\frac{2b^6c^6}{2b^2c^2}}=\sqrt{b^4c^4}=b^2c^2=\left(bc\right)^2,$$

од каде следува дека $\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2}+\frac{b^6c^6}{2a^2d^2}}$ е квадрат на природен број. **(10 поени)**

2. Збирот на еден двоцифрен број и двоцифрениот број запишан со истите цифри земени во обратен редослед, при делење со 5 дава остаток 2. Определи ги сите такви двоцифрени броеви.

Решение. Нека $\overline{ab}$ е бараниот двоцифрен број. Јасно $a,b\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Збирот на $\overline{ab}$ и бројот запишан со истите цифри во обратен редослед $\overline{ba}$ е еднаков на

$$\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11\left(a+b\right).$$ **(3 поени)**

Од тоа што $\overline{ab}+\overline{ba}$ при делење со 5 дава остаток 2, следува дека

$$11\left(a+b\right)=5q+2,\ q\in\mathbb{N}_0.$$ **(4 поени)**

Од тоа што

$$11\left(a+b\right)=5q+2\Leftrightarrow 10\left(a+b\right)+\left(a+b\right)=5q+2\Leftrightarrow 10\left(a+b\right)+\left(a+b-2\right)=5q,$$

следува дека $a+b-2$ мора да е делив со 5, односно $a+b-2=5k$, $k\in\mathbb{N}_0$. **(10 поени)** Бидејќи $a,b\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, имаме дека $a+b\le 18$. Според тоа, добиваме дека $5k+2\le 18$, односно $5k\le 16$. Но, $k\in\mathbb{N}_0$, па $k\in\{0,1,2,3\}$. **(3 поени)**

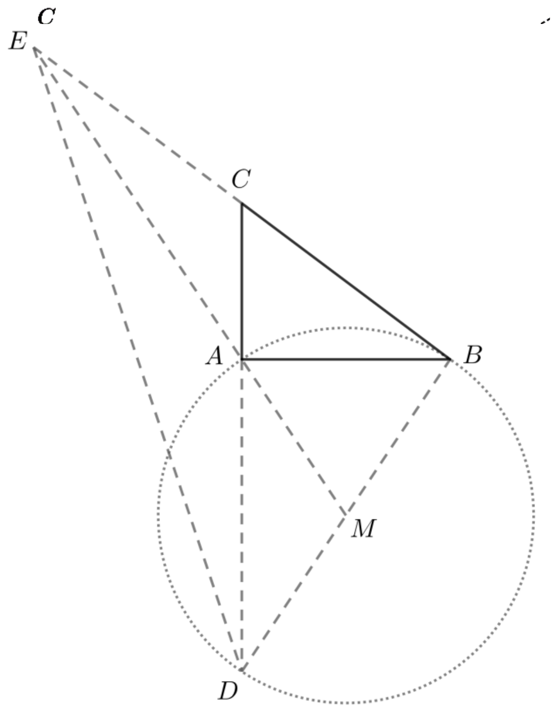
Значи,

- за $k=0$, добиваме дека $a+b=2$, од каде следува дека $\overline{ab}\in\{11\}$;
- за $k=1$, добиваме дека $a+b=7$, од каде следува дека $\overline{ab}\in\{16,25,34,43,52,61\}$;
- За $k=2$, добиваме дека $a+b=12$, од каде следува дека $\overline{ab}\in\{39,48,57,66,75,84,93\}$;
- За $k=3$, добиваме дека $a+b=17$, од каде следува дека $\overline{ab}\in\{89,98\}$.

Според тоа, добиваме дека $\overline{ab}\in\{11,16,25,34,39,43,48,52,57,61,66,75,84,89,93,98\}$. **(5 поени)**

3. Даден е триаголникот ABC со агол во темето A трипати поголем од аголот во темето B. Нека L е пресечната точка на симетралата на аголот ACB со AB и нека $P_{\Delta ALC}:P_{\Delta LBC}=1:2$, каде $P_{\Delta ALC}$ и $P_{\Delta LBC}$ се плоштините на триаголниците ALC и LBC, соодветно. Определи ја големината на аглите во ΔABC.

Решение. Нека со α, β и γ ги означиме аглите на триаголникот ABC во темињата A, B и C, соодветно. Нека L е пресечната точка на страната AB со симетралата на аголот ACB. Од условите на задачата имаме дека $\alpha = 3\beta$ и $P_{\Delta ALC} : P_{\Delta LBC} = 1:2$. На страната BC избираме точка M, така што $\angle BAM = \beta$. Според тоа, триаголникот ABM е рамнокрак триаголник, па $\overline{AM} = \overline{BM}$. **(*) (7 поени)**



Од $\alpha = 3\beta$ имаме дека $\angle BAC = 3\angle CBA$. Бидејќи $\angle BAM = \beta$ и $\angle BAC = \angle BAM + \angle MAC$, добиваме дека $3\beta = \beta + \angle MAC$, од каде следува дека $\angle MAC = 2\beta$. Од друга страна $\angle CMA = 2\beta$ како надворешен агол на триаголникот ABM. Според тоа, $\angle MAC = 2\beta = \angle CMA$ што значи дека ΔAMC е рамнокрак триаголник, па $\overline{AC} = \overline{MC}$. **(**) (3 поени)**

Нека S е пресечната точка на AM со CL. Од тоа што ΔAMC е рамнокрак триаголник и CL е симетрала на аголот ACB, $\angle ACB = \gamma$, добиваме дека S е средина на отсечката AM, односно $\overline{AS} = \overline{SM}$. Значи, точката L лежи на симетралата на страната AM во ΔMAL, па $\overline{AL} = \overline{ML}$, односно триаголникот MAL е рамнокрак триаголник и $\angle AML = \angle LAM = \angle BAM = \beta$. **(3 поени)**

Од признакот за складност ССС следува дека триаголниците ALC и LMC се складни триаголници, па $P_{\Delta ALC} = P_{\Delta LMC}$. **(2 поени)** Според тоа, и користејќи го условот дека, $P_{\Delta ALC} : P_{\Delta LBC} = 1:2$, односно $P_{\Delta LBC} = 2P_{\Delta ALC}$ добиваме дека

$$P_{\Delta LBC} = P_{\Delta LBM} + P_{\Delta LMC} \Leftrightarrow 2P_{\Delta ALC} = P_{\Delta LBM} + P_{\Delta ALC} \Leftrightarrow P_{\Delta ALC} = P_{\Delta LBM},$$

односно $P_{\Delta LMC} = P_{\Delta ALC} = P_{\Delta LBM}$. **(3 поени)** Бидејќи висината спуштена од точката L кон страната BC е заедничка висина за ΔLMC и ΔLBM, и од тоа што $P_{\Delta LMC} = P_{\Delta LBM}$, добиваме дека $\overline{BM} = \overline{MC}$. **(***) (3 поени)**

Од (*), (**) и (***) следува дека $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{MC} = \overline{AC}$, од каде заклучуваме дека ΔAMC е рамностран триаголник. **(2 поени)** Според тоа, $\angle MAC = \angle CMA = \angle ACM = 60^\circ$, па од $\angle MAC = 2\beta$ следува дека $\beta = 30^\circ$, од $\alpha = 3\beta$ следува дека $\alpha = 3\cdot 30^\circ = 90^\circ$, па $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Значи, триаголникот ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето A и агол од 30° и 60° во темето B и C, соодветно. **(2 поени)**

4. Филип, Кирил и Никола си испраќаат пратки меѓусебно при што не добиваат пратки од други лица, а ги запазуваат следниве правила:

- Филип му испраќа пратка на Кирил секој втор ден, а на Никола секој петти ден;
- Кирил му испраќа пратка на Филип веднаш после секои две добиени пратки, а на Никола секој четврти ден;
- Никола му испраќа пратка на Филип веднаш после секои четири добиени пратки, а на Кирил секој осми ден.

Секоја пратка патува по еден ден, односно секоја пратка стигнува следниот ден од испраќањето. По колку најмалку дена Филип ќе добие 68 пратки?

Решение. Нека со x го означиме бројот на денови за кои Филип ќе има добиено 68 пратки. Да забележиме дека вкупниот број на пратки кои му ги испратиле Кирил и Никола на Филип заклучно со $(x-1)$-от ден е еднаков на 68. Сега, нека со K_{x-1} и N_{x-1} го означиме бројот на пратките кои ги имаат добиено Кирил и Никола заклучно со $(x-1)$-от ден, соодветно. Од условите на задачата, имаме дека заклучно со $(x-1)$-от ден Кирил има испратено до Филип вкупно $\frac{K_{x-1}}{2}$ пратки, а Никола има испратено до Филип вкупно $\frac{N_{x-1}}{4}$ пратки. Според тоа $\frac{K_{x-1}}{2}+\frac{N_{x-1}}{4}=68$. **(10 поени)**

Од друга страна, заклучно со $(x-1)$-от ден Кирил вкупно има добиено онолку пратки колку што му испратиле Филип и Никола заклучно со $(x-2)$-от ден. Бидејќи, Филип му испраќа пратка на Кирил секој втор ден, а Никола му испраќа пратка на Кирил секој осми ден добиваме дека $K_{x-1}=\frac{x-2}{2}+\frac{x-2}{8}$. **(5 поени)**

Исто така, од тоа што Филип му испраќа пратка на Никола секој петти ден, а Кирил му испраќа пратка на Никола секој четврти ден добиваме дека

$N_{x-1}=\frac{x-2}{5}+\frac{x-2}{4}$. **(5 поени)**

Со замена на $K_{x-1}=\frac{x-2}{2}+\frac{x-2}{8}$ и $N_{x-1}=\frac{x-2}{5}+\frac{x-2}{4}$ во $\frac{K_{x-1}}{2}+\frac{N_{x-1}}{4}=68$ добиваме

$$\frac{K_{x-1}}{2}+\frac{N_{x-1}}{4}=68 \Leftrightarrow 2\cdot K_{x-1}+N_{x-1}=68\cdot 4 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x-2}{2}+\frac{x-2}{8}\right)+\frac{x-2}{5}+\frac{x-2}{4}=68\cdot 4$$

Решение на последнава равенка е $x=162$, па следува дека Филип ќе добие 68 пратки по најмалку 162 дена. **(5 поени)**

---

9 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Нека за целите броеви a, b и n важи $b\neq 0$ и $\frac{a}{b}=\frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$. Докажи дека геометриската средина на броевите a и b е цел број.

Решение. Дадениот израз е еквивалентен со

$$ab^2+an^2=ba^2+bn^2,$$ **(5 поени)**

$$ab^2-a^2b+an^2-bn^2=0,$$

$$ab(b-a)-n^2(b-a)=0, \text{ т.е.}$$

$$(b-a)(ab-n^2)=0.$$

Последното равенство е еквивалентно со $b-a=0$ или $ab-n^2=0$. **(10 поени)**

- Ако $b-a=0$, т.е. $b=a$, тогаш геометриската средина на броевите a и b е

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a\cdot a}=\sqrt{a^2}=|a|$$

и бидејќи a е цел број, следува дека и геометриската средина е цел број. **(5 поени)**

- Ако $ab-n^2=0$, т.е. $a\cdot b=n^2$, тогаш геометриската средина на броевите a и b е

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{n^2}=|n|$$

и бидејќи n е цел број, следува дека и геометриската средина е цел број. **(5 поени)**

2. Даден е триаголник ABC. На правата AC е избрана точка D така што $\overline{CD}=3\cdot\overline{CA}$ (точката A е меѓу точките C и D), а на правата BC е избрана точка E, различна од B, така што $\overline{CE}=\overline{BC}$. Ако $\overline{BD}=\overline{AE}$, докажи дека аголот $\angle BAC$ е прав.

Решение. Во ΔBED отсечката DC е медијана (C е средина на страната BE) и $\overline{DA}=2\cdot\overline{AC}$, што значи дека A е тежиште на ΔBED. **(5 поени)**

Нека $\{M\}=BD\cap AE$. Тогаш EM е медијана во триаголникот ΔBED (бидејќи минува низ A), па точката M е средина на страната BD. **(5 поени)**

Бидејќи

$$\overline{AM}=\frac{\overline{AE}}{2}=\frac{\overline{BD}}{2}=\overline{BM}=\overline{DM},$$

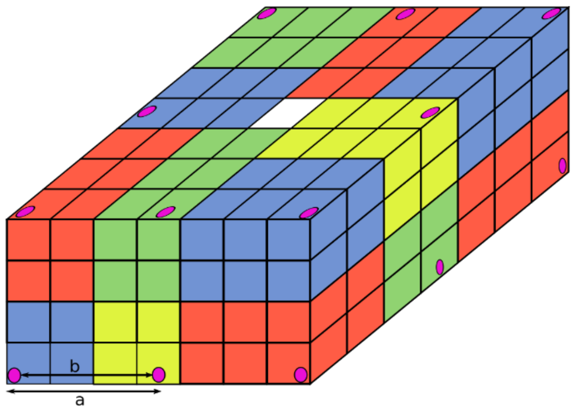
следува дека точката M е центар на опишаната кружница околу триаголникот ΔABD. **(10 поени)**

Значи аголот $\angle BAD=90°$ како периферен агол над дијаметар. Бидејќи аголот $\angle DAB=90°$ и аголот$\angle BAC$ образуваат рамен агол, следува дека $\angle BAC=90°$. **(5 поени)**

3. Одреден број на момчиња и девојчиња отишле на кампување за време на летниот распуст. Тие испланирале еколошка акција, што би ја завршиле за 29 дена ако секое дете работи рамномерно – во кои било денови сработува ист дел од работата. Момчињата работеле нешто побрзо; за исто време 2 момчиња работат исто колку и 3 девојчиња. За среќа, по три дена според планираното, им се придружила поголема група деца, и тоа: момчиња – 8 пати повеќе од првичниот број на девојчиња, и девојчиња – 18 пати повеќе од првичниот број на момчиња. Новодојдените деца работат со иста динамика како и прводојдените.
Колку вкупно денови биле работни?
Решение. Да претпоставиме дека на почетокот биле a момчиња и b девојчиња. Дневно тие завршуваат $\frac{1}{29}$ –тина од работата. Затоа, првите три дена е завршено $\frac{3}{29}$ –тини од работата. **(5 поени)**
Бидејќи момчињата работат $1,5$ пати побрзо, ситуацијата е иста како наместо овие a момчиња да имало $1,5a$ девојчиња, или вкупно $1,5a+b$ девојчиња. Значи, секое девојче дневно завршува $\frac{1}{29(1,5a+b)}$ дел од работата. **(5 поени)**
Потоа доаѓаат уште $c=8b$ момчиња (што е идентично како да работат $1,5\cdot 8b=12b$ девојчиња), и $d=18a$ нови девојчиња. Да претпоставиме дека по трите дена ќе бидат потребни уште x дополнителни за да се заврши акцијата. Сите деца дневно завршуваат ист дел од работата како кога би биле $1,5a+b+12b+18a=19,5a+13b=13(1,5a+b)$ само девојчиња. **(5 поени)**
Според досегашната дискусија добиваме равенка

$$\frac{3}{29}+\frac{13(1,5a+b)}{29(1,5a+b)}\cdot x=1.$$ **(5 поени)**

Од тука $3+13x=29$, односно $x=2$. Вкупно, работни биле $3+2=5$ дена. **(5 поени)**
4. Една истражувачка лабораторија има специјална (бестежинска) просторија во која предметите лебдат онаму каде што се оставени. Просторијата има форма на квадар со висина $4\ \mathrm{m}$ и со основа квадрат со страна $7\ \mathrm{m}$. Во центарот на основата е поставен носечки столб во форма на квадар со основа квадрат со страна $1\ \mathrm{m}$ и висина $4\ \mathrm{m}$.
а) Во просторијата се расфрлани 16 балони во форма на топки со дијаметар 10 cm, кои лебдат. Дали мора да постои квадар со рабови $2\ \mathrm{m}$, $3\ \mathrm{m}$ и $2\ \mathrm{m}$ и ѕидови паралелни на зидовите на просторијата, во кој сигурно би имало делови од 2 различни балони во него?
б) Што ќе се случи кога би биле 17 балони? Дали, во овој случај, мора да постои квадар со рабови $2\ \mathrm{m}$, $3\ \mathrm{m}$ и $2\ \mathrm{m}$ и ѕидови паралелни на зидовите на просторијата, во кој сигурно би имало делови од 2 различни балони во него?
Одговрите да се образложат.
Решение. Волуменот на просторијата е 7x7x4 - 4 = 192. Во неа идеално може да се сместат 192/12 = 16 квадари со димензии 2x3x2, и паралелни ѕидови со ѕидовите на просторијата, како на цртежот. **(5 поени)**



а) Да ги поставиме балоните како на сликата. Балоните се на долната и горната основа од просторијата. Растојанието a=3.5m. Растојанието помеѓу било кои 2 соседни балони е
b=3.5m – 10cm – 5cm = 3.35m. Па било кои 2 балони не може да имаат делови во ист квадар со димензии 3x2x2. Според тоа одговорот е не. **(10 поени)**
б) Ако се 17 балони, тогаш нивните центри се седумнаесет точки, па според принципот на Дирихле, барем во еден од шеснаесетте квадари како на сликата, ќе има две од нив. Според тоа одговорот е да. **(10 поени)**