XLI РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
4.3.2023 година

IV ОДДЕЛЕНИЕ

Напомена: Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата. **Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.**
Грешка во пресметување при правилно поставено решение не се казнува со одземање на сите поени за соодветниот чекор туку се предвидува намалување на поените и тоа истоветно се применува при вреднување на решенијата на сите натпреварувачи.

---

1. После празниците, брат и сестра добиле 2000 денари од родителите. Тие направиле план да оставaт една четвртина од парите за топка, а една третина од остатокот за кукла. Колку пари ќе им останат, откако ќе ги купат топката и куклата?

Решение. За купување на топка оставиле $2000:4=500$ денари. (Или: $\frac{1}{4}$ од 2000 е 500.) **(7 поени)**

По купувањето на топката ќе им останат $2000-500=1500$ денари. **(6 поени)**

За купување кукла се наменети $1500:3=500$ денари. (Или: $\frac{1}{3}$ од 1500 е 500.) **(6 поени)**

Значи, ќе им останат $2000-500-500=1000$ денари. **(6 поени)**

2. (Нумерус 48-1, Конкурсни задачи, задача 3942) Одреди ги сите природни броеви од втората стотка кои се 13 пати поголеми од збирот на своите цифри.

Решение. Природен број што е 13 пати поголем од друг број може да се запише како 13 помножен со тој друг број, што значи е делив со 13, односно е содржател на бројот 13.
Содржатели на бројот 13 од втората стотка се: 104, 117, 130, 143, 156, 169, 182 и 195.
(броеви деливи со 13) **(по 1 поен за секој од броевите, вк. 8 поени)**

Продолжува на Прв начин:
Збирот на цифрите на секој од трицифрените броеви е: 5, 9, 4, 8, 12, 16, 11 и 15, соодветно.
(по 1 поен за секој од броевите, вк. 8 поени)
Трицифрените броеви при делење со 13 даваат количници: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 и 15, соодветно.
(по 1 поен за секој од броевите, вк. 8 поени)
Бараните броеви со даденото својство се: 117, 156 и 195. **(1 поен)**

Продолжува на Втор начин:
За секој од броевите 104, 117, 130, 143, 156, 169, 182 и 195 се проверува дали збирот на цифрите помножен со 13 е еднаков на бројот.

$(1+0+4)\cdot 13=5\cdot 13=65\neq 104$

$\underline{(1+1+7)\cdot 13=9\cdot 13=117}$

$(1+3+0)\cdot 13=4\cdot 13=61\neq 130$

$(1+4+3)\cdot 13=8\cdot 13=104\neq 143$

$\underline{(1+5+6)\cdot 13=12\cdot 13=156}$

$(1+6+9)\cdot 13=16\cdot 13=208\neq 169$

$(1+8+2)\cdot 13=11\cdot 13=143\neq 182$

$\underline{(1+9+5)\cdot 13=15\cdot 13=195}$ **(по 2 поени за проверка за секој од броевите, вк. 16 поени)**

Бараните броеви со даденото својство се: 117, 156 и 195. **(1 поен)**

3. (Нумерус 47-4, Конкурсни задачи, задача 3919) Периметарот на еден триаголник изнесува 34 cm. Ако едната од страните се зголеми за 3 cm, другата за 2 cm, а третата се намали за 3 cm, се добива нов триаголник кој е рамностран. Најди ја должината на страната на новодобиениот триаголник.

Решение. Прв начин: Со a ќе ја означиме страната на новодобиениот (рамностран) триаголник. Тогаш, страните на почетниот триаголник се $a-3$, $a-2$ и $a+3$. **(10 поени)**

Бидејќи периметарот на почетниот триаголник изнесува 34 cm, имаме:

$$(a-3)+(a-2)+(a+3)=34 \text{ cm}$$ **(10 поени)**

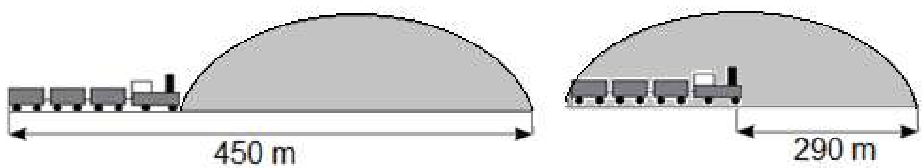
$$3\cdot a=36 \text{ cm} \qquad a=12 \text{ cm}.$$ **(5 поени)**

Втор начин: Кога ќе се зголеми или намали должината на некоја од страните на триаголникот за некој број, периметарот на триаголникот се менува. Со зголемување на едната страна за 3 cm со зголемување на втората страна за 2 cm, а со намалување на третата страна за 3 cm, периметарот на триаголникот ќе биде:

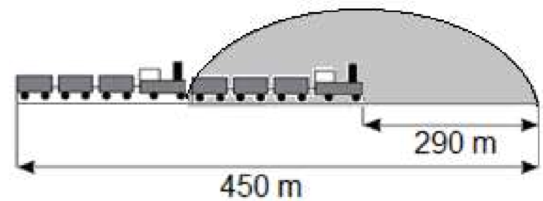
34 + 3 + 2 – 3 = 36 cm. **(15 поени)**

Бидејќи на тој начин се добива рамностран триаголник, должината на неговата страна ќе биде 36 : 3 = 12 cm. **(10 поени)**

4. Воз влегува во тунел, како на сликата. Која е должината на возот?



Решение. Може да се замислат двете слики една врз друга (првата – со возот точно пред влезот на тунелот и втората – кога возот е целосно влезен во тунелот и со својот крај е точно на крајот од тунелот):



Прв начин:

Две должини на возот заедно со останатите 290 m од тунелот се еднакви на 450 m. **(10 поени)**

Оттука, две должини на возот се еднакви на разликата $450 \text{ m}-290 \text{ m}=160 \text{ m}$. **(10 поени)**

Следи дека должината на возот е 160 m : 2 = 80 m. **(5 поени)**

Втор начин (со равенка): Ако со x ја означиме должината на возот, тогаш равенката $2x+290=450$ е модел на ситуацијата прикажана на сликата. **(15 поени)**

Со решавање на равенката:

$$2x+290=450$$

$$2x=450-290$$ **(3 поени)**

$$2x=160$$ **(3 поени)**

$$x=80$$ **(3 поени)**

се добива дека должината на возот е $x=80$ m. **(1 поен ако е запишан само резултатот)**

V ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 47-1, Конкурсни задачи, задача 3838) Во една паралелка има 24 ученици. Бројот на момчињата е $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата. Колку момчиња и колку девојчиња има во паралелката?

Прв начин: Бројот на момчињата е $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата.

Тоа значи дека на секои 3 момчиња има по 5 девојчиња, вкупно 8 ученици. **(10 поени)**
Во паралелка со 24 ученици има 3 групи по 8 ученици. (Или: 24 : 8 = 3) **(5 поени)**
Затоа, има $3\cdot 3=9$ момчиња и $3\cdot 5=15$ девојчиња. **(10 поени)**

<u>Втор начин:</u> Нека со x го означиме бројот на девојчиња во паралелката.

Тогаш бројот на момчиња е $\frac{3}{5}x$. **(5 поени)**

Во паралелката има вкупно 24 ученици, па го добиваме следново равенство:

$$x+\frac{3}{5}x=24.$$ **(5 поени)**

Оттука добиваме $\frac{8}{5}x=24$, односно $x=15$. Во паралелката има 15 девојчиња. **(10 поени)**

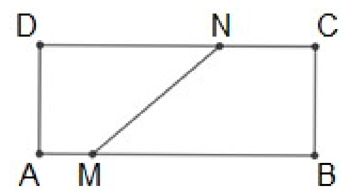
Добивме дека има $\frac{3}{5}\cdot 15=9$ момчиња. **(5 поени)**

<u>Трет начин:</u> Бројот на момчињата е $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата. Тоа значи бројот на девојчиња е делив со бројот 5. (**5 поени)** Бидејќи во паралелката има вкупно 24 ученици, бројот на девојчиња е 5, 10, 15 или 20. (**5 поени)** За секој од можните броеви на девојчиња се пресметува бројот на момчиња и дали вкупниот број ученици ќе биде 24.

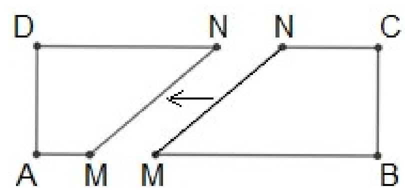
Број на девојчиња	5	10	**15**	20
Број на момчиња	3	6	**9**	12
Вкупен број ученици	8	16	**24**	32

(15 поени)

2. (Нумерус 47-3, Конкурсни задачи, задача 3895) Еден правоаголник со страни 8 cm и 5 cm е поделен со отсечката $\overline{MN}$ на два четириаголници со еднакви периметри од 20 cm како на цртежот. Одреди ја должината на отсечката $\overline{MN}$.



Решение. <u>Прв начин:</u>



Периметарот на правоаголникот ABCD е еднаков на $2\cdot(8+5)=2\cdot 13=26$ cm. **(5 поени)**
Збирот на периметрите на двата четириаголници од коишто е составен правоаголникот ABCD е $2\cdot 20=40$ cm. (**5 поени)** Разликата меѓу збирот на периметрите на двата четириаголници од коишто е составен правоаголникот ABCD и периметарот на правоаголникот ABCD е еднаква на удвоената должина на отсечката MN бидејќи таа се јавува по еднаш како собирок во периметарот на секој од двата четириаголници, но не се јавува како собирок во периметарот на правоаголникот *ABCD*. Затоа,

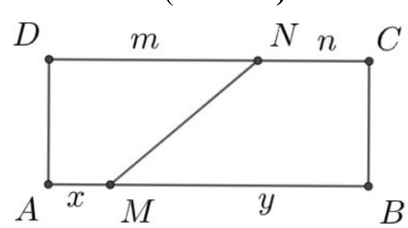
$$40-26=2\cdot\overline{MN}.$$ **(10 поени)**

Оттука, $2\cdot\overline{MN}=14$ cm и добиваме дека $\overline{MN}=7$ cm. **(5 поени)**

<u>Втор начин:</u> Ги означуваме должините на добиените отсечки како на цртежот. Тогаш, имаме $a=x+y=m+n=8cm$ и $b=5cm$. **(4 поени)**
Понатаму,

$L_{AMND}=x+\overline{MN}+m+b=20cm$

$L_{MBCN}=y+b+n+\overline{MN}=20cm$ **(4 поени)**



од каде добиваме:

$x+\overline{MN}+m+b+y+b+n+\overline{MN}=20+20=40cm$ **(4 поени)**

$(x+y)+(m+n)+2b+2\overline{MN}=40$ **(4 поени)**

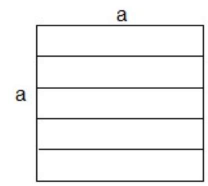
$8+8+2\cdot 5+2\overline{MN}=40$ **(4 поени)**

$2\overline{MN}=14$ **(2 поени)**

$\overline{MN}=7\text{cm}$ **(2 поени)**

Значи, должината на отсечката $\overline{MN}$ е 7 cm. (**1 поен ако само е напишан резултатот.)**

3. Квадрат е поделен на пет еднакви правоаголници со четири паралелни прави. Збирот на периметрите на тие правоаголници е 96 cm. Најди го периметарот на квадратот.



Решение. Нека страната на квадратот ја означиме со a. Таа е и една страна на секој од правоаголниците, а другата им е $\frac{1}{5}$ од a. (**5 поени)**

Збирот на периметрите на правоаголниците содржи 10 должини a и 10 должини по $\frac{1}{5}$ од a, што е еднакво на $2a$. (**5 поени)**

Може да запишеме дека $10\cdot a+2\cdot a=96.$ (**5 поени)**

$12\cdot a=96.$

$a=8$ cm. (**5 поени)**

Оттука, периметарот на квадратот е $L=4\cdot 8=32$ cm. (**5 поени)**

4. Осум последователни природни броеви имаат збир 92. Кои се тие броеви? Објасни како ги пронајде.

Решение. Прв начин: Нека најмалиот од нив е x.

Тогаш останатите се $x+1,\ x+2,\ x+3,\ x+4,\ x+5,\ x+6$ и $x+7$. **(5 поени)**

Нивниот збир е $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)=92.$ **(5 поени)**

Се добива равенката $8x+28=92$. **(5 поени)**

Оттука $8x=92-28$, па $8x=64$ и добиваме $x=8$. **(6 поени)**

Бараните броеви се: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. **(4 поени)**

Втор начин: Се пресметуваат збировите на осум последователни природни броеви, почнувајќи од првите осум. Во секој чекор од претходниот збир се испушта најмалиот собирок и се додава следбеникот на најголемиот собирок. **(5 поени)**

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 **(2 поени)**

2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 36 – 1 + 9 = 36 + 8 = 44 **(2 поени)**

3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 44 – 2 + 10 = 44 + 8 = 52 **(2 поени)**

4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 52 – 3 + 11 = 52 + 8 = 60 **(2 поени)**

5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 60 – 4 + 12 = 60 + 8 = 68 **(2 поени)**

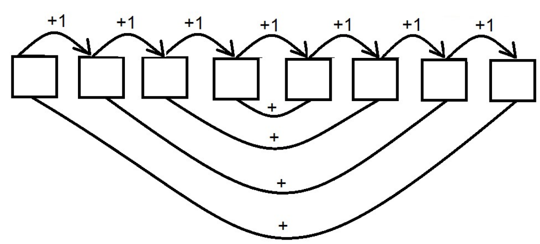
6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 68 – 5 + 13 = 68 + 8 = 76 **(2 поени)**

7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 76 – 6 + 13 = 76 + 8 = 84 **(2 поени)**

8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 84 – 6 + 13 = 84 + 8 = **92** **(2 поени)**

Бараните броеви се: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. **(4 поени)**

(За идејата се доделуваат 5 поени, за секој точно пресметан збир по 2 поени и за точно наведување на сите 8 броја се доделуваат 4 поени.)



Трет начин: Збирот на првиот и на осмиот број во низата од осум последователни броеви е еднаков на збирот на вториот и на седмиот. Тој е еднаков на збирот на третиот и на шестиот, односно на збирот на четвртиот и на петтиот број во оваа низа. **(5 поени)** Имаме 4 парови броеви такви што збирот на секој пар броеви е истиот број. Тоа значи дека 92 е збир на 4 еднакви собироци. Ќе го поделиме бројот 92 со 4, 92 : 4 = 23. **(10 поени)** Збирот на четвртиот и на петтиот број е 23. Тие се два последователни природни броеви.

Бидејќи 23 = 11 + 12, четвртиот и петтиот број се 11 и 12, соодветно. **(6 поени)**

Бараните броеви се: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. **(4 поени)**

VI ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 47-4, Конкурсни задачи, задача 3922) На шаховски натпревар со 12 натпреварувачи играат секој со секого по три партии. Колку партии се одиграни?

Решение. Ако играат секој со секого по една партија ќе се одиграат

$$\frac{12\cdot(12-1)}{2}=\frac{12\cdot 11}{2}=\frac{132}{2}=66 \text{ партии.}$$ **(15 поени)**

Бидејќи играат секој со секого по три партии ќе се одиграат $3\cdot 66=198$ партии. **(10 поени)**

2. (Нумерус 47-3, Конкурсни задачи, задача 3894) Со кој најмал природен број треба да се помножи бројот 63000 така што производот да биде полн квадрат?

Решение. Со разложуваме бројот 63000 на прости множители, добиваме:

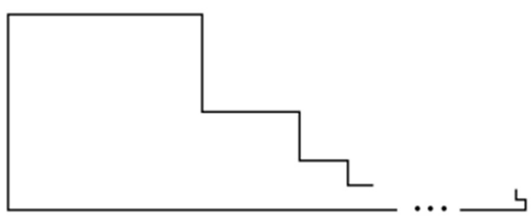
$$63000=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 7$$ **(10 поени)**

Множејќи со $70=2\cdot 5\cdot 7$ од двете страни, **(10 поени)** добиваме дека $4410000=2100^2$. **(5 поени)**

3. Даден е правоаголник со страни $2023\,\text{cm}$ и $1309\,\text{cm}$. Правоаголникот е поделен на еднакви квадрати со најголема можна страна чија должина е природен број. Одреди го збирот на периметрите на квадратите.

Решение. Најголемиот заеднички делител на броевите 2023 и 1309 е бројот 119, односно $\text{НЗД}(2023,1309)=119$. **(10 поени)** Притоа, $2023:119=17$ и $1309:119=11$. **(5 поени)** Според тоа, добиваме дека $L_1=4\cdot 119=476\,\text{cm}$ **(5 поени)** и $L=11\cdot 17\cdot 476=89012\,\text{cm}$. **(5 поени)**

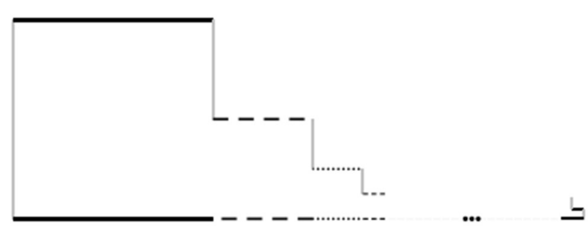
4. Во рамнина е даден квадрат со должина на страната 1024cm, до него е нацртан следниот квадрат со страна два пати покуса и така се продолжува со цртање на квадрати се додека должините на страните се природни броеви, како што е претставено на цртежот.



А) Пресметај го периметарот на фигурата добиена на погоре опишаниот начин.

Б) Пресметај ја плоштината на квадратот кој се наоѓа во средината на таа низа од квадрати.

Решение:



А) Ако ги собереме должините на „десните вертикални“ должини, ќе ја добиеме должината на страната на почетниот квадрат. Затоа периметарот на фигурата се состои од двете должини на страната на најголемиот квадрат (левата и десната вертикална страна) и двојниот збир на должините на сите (хоризонтални) страни на квадратот. Според тоа, бараниот периметар е еднаков на

$L=2\cdot 1024+2\cdot(1024+512+256+128+64+32+16+8+4+2+1)$, **(15 поени)**

односно $L=2048+4094$, $L=6142\,\text{cm}$. **(5 поени)**

Б) Затоа што во низата има 11 квадрати, квадратот кој се наоѓа во средината на таа низа од квадрати е шести по ред. Должината на страната на тој квадрат е $36\,\text{cm}$, па неговата плоштина е еднаква на $P=32\cdot 32=1024\,\text{cm}^2$. **(5 поени)**

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 48-2, Конкурсни задачи, задача 3981) Пресметај ја вредноста на изразот

$$1-\frac{100}{101}+\frac{99}{101}-\frac{98}{101}+\frac{97}{101}-...-\frac{2}{101}+\frac{1}{101}.$$

Решение. Бидејќи $1=\frac{101}{101}$ **(5 поени)**, изразот може да се запише во следниот облик

$$\left(\frac{101}{101}-\frac{100}{101}\right)+\left(\frac{99}{101}-\frac{98}{101}\right)+\left(\frac{97}{101}-\frac{96}{101}\right)+\cdots+\left(\frac{3}{101}-\frac{2}{101}\right)+\frac{1}{101}=$$ **(10 поени)**

$$=\underbrace{\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{101}}_{50\,\text{пати}}+\frac{1}{101}=\frac{51}{101}.$$ **(5 поени)**

Добиваме дека вредноста на изразот е еднаква на $\frac{51}{101}$. **(5 поени)**

2. Одреди ја 2023-та цифра после децималната запирка во децималниот запис на $\frac{35}{37}$.

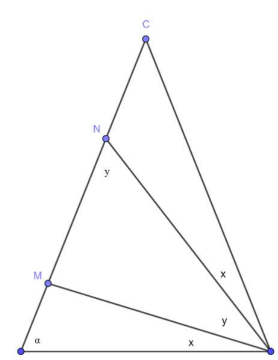
Решение. Од $\frac{35}{37}=0,(945)$ **(8 поени)** и $2023=674\cdot 3+1$, **(10 поени)** заклучуваме дека на 2023-то место после децималната запирка се наоѓа цифрата **9. (7 поени)**

3. (Нумерус 47-2, Конкурсни задачи, задача 3873) Во еден магацин во моментов има 360 гајби со јаболка и 384 гајби со круши. Гајбите со овошје треба да се испорачаат во различни градови од државата, во пратки во кои секогаш има еднаков број на гајби со овошје, така што бројот на гајби со јаболка е еднаков во секоја пратка. Камионите со кои се пренесуваат пратките со овошје можат да прифатат најмногу 60 гајби. По колку гајби со јаболка и круши има во секоја пратка?

Решение. Со x го означуваме бројот на пратки што треба да се испорачаат. Бидејќи, во секоја од пратките има по еднаков број на гајби со јаболка, следува дека во секоја од пратките ќе има и по еднаков број на гајби со круши. Бројот на гајби со јаболка во секоја пратка е $j=360:x$, а бројот на гајби со круши во секоја пратка е $k=384:x$. **(5 поени)** Од последново следува дека x е делител на 360 и на 384. Од разложувањето на 360 и 384 имаме $360=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$ и $384=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$, од каде што за x важи следново, $x\in\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$. **(8 поени)**

Бидејќи, камионот со кој се пренесуваат пратките може да прифати најмногу 60 гајби, тогаш мора да важи $j+k\le 60$, од каде пак следува $j\le 60$ и $k\le 60$. Оттука, следува дека $x>6$, (имено ако $x\le 6$, имаме $j\ge 360:6=60$ и $k\ge 384:6=64$), значи останува $x\in\{8,12,24\}$. **(5 поени)** Ако $x=8$, тогаш $j=360:8=45$, $k=384:8=48$ и $j+k=45+48=93>60$. **(2 поени)** Ако $x=12$, тогаш $j=360:12=30$, $k=384:12=32$ и $j+k=62>60$. **(2 поени)** Ако $x=24$, тогаш $j=360:24=15$, $k=384:24=16$ и $j+k=15+16=31<60$. **(2 поени)** Значи, во секоја од пратките има по 15 гајби со јаболка и 16 гајби со круши. **(1 поен)**

4. Даден е рамнокрак триаголник ABC, при што $\overline{AC}=\overline{BC}$. На кракот AC одбрани се точки M и N така што аголот MBA е еднаков на CBN и $\overline{MN}=\overline{MB}$, при што точката е M поблиску до A отколку до N. Колку изнесува аголот NBA?



Решение. Нека $\angle BAC=\angle CBA=\alpha$, $\angle MBA=\angle CBN=x$ и $\angle NBM=y$. Тогаш $\alpha=2x+y$. **(5 поени)**

Триаголникот BNM е рамнокрак, па следува дека $\angle NBM=\angle MNB=y$. **(5 поени)**

Во триаголникот ABN аглите се $2x+y, x+y, y$ и важи следното равенство $(2x+y)+(x+y)+y=180^\circ$, односно $3x+3y=180^\circ$, односно $x+y=60^\circ$. **(10 поени)**
Тогаш $\angle NBA = x+y$, од каде следува дека $\angle NBA = 60^\circ$. **(5 поени)**

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 48-2, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 3976)
Мартин е постар од своите три сестри Ана, Ивана и Елена за 8, 10 и 13 години, соодветно. После една година, збирот на годините на сестрите на Мартин ќе биде за 39 поголем од годините на Мартин. Колку години има Мартин денес?
Решение. Со x ги означуваме годините на Мартин денес. Тоа значи дека неговите сестри, денес имаат $x-8, x-10$ и $x-13$ години, соодветно. **(10 поени)** По една година, Мартин ќе има $x+1$ година и неговите сестри соодветно ќе имаат $x-7, x-9$ и $x-12$ години. **(5 поени)** Од условот на задачата имаме

$$x-7+x-9+x-12=x+1+39 \Leftrightarrow 2x-28=40 \Leftrightarrow 2x=68 \Leftrightarrow x=34.$$ **(10 поени)**

Значи, Мартин денес има 34 години.

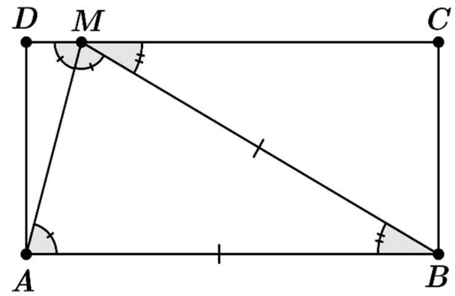
2. На еден натпревар се натпреварувале вкупно 2400 ученици во пет различни категории. Вкупниот број на ученици од првата и втората категорија е еднаков на $\frac{3}{5}$ од вкупниот број на ученици од третата, четвртата и петтата категорија. Односот на бројот на ученици од првата и втората категорија е $2:3$, а односот на бројот на ученици од третата, четвртата и петтата е $5:4:6$. По колку ученици се натпреварувале во секоја од категориите?
Решение 1. Нека со a, b, c, d и e е означен бројот на ученици кои се натпреварувале во првата, втората, третата, четвртата и петтата категорија, соодветно. Нека $A=a+b$ и $B=c+d+e$. Тогаш $A=\frac{3}{5}B$ и $A+B=2400$. **(5 поени)** Според тоа со замена на $A=\frac{3}{5}B$ во $A+B=2400$ добиваме дека

$$\frac{3}{5}B+B=2400 \Leftrightarrow \frac{8}{5}B=2400 \Leftrightarrow B=2400\cdot\frac{5}{8} \Leftrightarrow B=1500,$$

односно $B=1500$, па $A=2400-B=2400-1500=900$. **(7 поени)** Бидејќи $a:b=2:3$ и $a+b=A=900$, следува дека $a=\frac{900}{2+3}\cdot 2=360$ и $b=\frac{900}{2+3}\cdot 3=540$. **(5 поени)** Од $c:d:e=5:4:6$ и $c+d+e=B=1500$, следува дека $c=\frac{1500}{5+4+6}\cdot 5=500$, $d=\frac{1500}{5+4+6}\cdot 4=400$ и $e=\frac{1500}{5+4+6}\cdot 6=600$. **(8 поени)** Заклучуваме дека во првата категорија се натпреварувале 360 ученика, во втората 540 ученика, во третата 500 ученика, во четвртата 400 ученика и во петтата 600 ученика.

Решение 2. Нека со a, b, c, d и e е означен бројот на ученици кои се натпреварувале во првата, втората, третата, четвртата и петтата категорија, соодветно. Од условите на задачата имаме дека $a+b+c+d+e=2400$, $a+b=\frac{3}{5}(c+d+e)$, $a:b=2:3$ и $c:d:e=5:4:6$. **(5 поени)** Од $a:b=2:3$ и $c:d:e=5:4:6$ имаме дека $a=2k$, $b=3k$, $c=5m$, $d=4m$ и $e=6m$, за $k,m\in\mathbb{N}$. **(7 поени)** Со замена во $a+b+c+d+e=2400$ и $a+b=\frac{3}{5}(c+d+e)$ добиваме дека $5k+15m=2400$ и $5k=\frac{3}{5}\cdot 15m$, односно $5k+15m=2400$ и $5k=9m$. **(6 поени)** Со замена на $5k=9m$ во $5k+15m=2400$ добиваме дека $24m=2400$, односно $m=100$, па $k=\frac{9}{5}m=\frac{9}{5}\cdot 100=180$. **(5 поени)** Според тоа, $a=360$, $b=540$, $c=500$, $d=400$ и $e=600$. **(2 поени)** Заклучуваме дека во првата категорија се натпреварувале 360 ученика, во втората 540 ученика, во третата 500 ученика, во четвртата 400 ученика и во петтата 600 ученика.

3. Даден е правоаголникот $ABCD$ каде $\overline{AB}=2\overline{BC}$. На страната CD е избрана точката M, така што симетралата на $\angle DMB$ минува низ темето A. Определи ја големината на $\angle AMB$.



Решение. Нека $\overline{BC}=x$. Тогаш $\overline{AB}=2x$. Бидејќи AM е симетрала на $\angle DMB$, имаме дека $\angle AMB=\angle DMA$. **(2 поени)** Од друга страна $\angle BAM=\angle DMA$ како наизменични агли. **(5 поени)** Според тоа, $\angle BAM=\angle AMB$ од каде следува дека $\triangle AMB$ е рамнокрак триаголник и $\overline{AB}=\overline{BM}=2x$. **(5 поени)** Значи, во правоаголниот триаголник BCM едната катета $\overline{BC}=x$ е половина од хипотенузата $\overline{BM}=2x$. Следува дека $\triangle BCM$ е половина од рамностран триаголник со страна $\overline{BM}=2x$.

Па имаме дека $\angle CBM=60^\circ$ и $\angle BMC=30^\circ$. **(8 поени)** Од ова следува дека $\angle DMB=180^\circ-\angle BMC=180^\circ-30^\circ=150^\circ$, па $\angle AMB=\dfrac{\angle DMB}{2}=\dfrac{150^\circ}{2}=75^\circ$. **(5п поени)**

4. (Нумерус 47-2, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 3880)

Определи ги сите природни броеви $x,y\in\mathbb{N}$ за кои $\sqrt{\dfrac{x^2+20}{x^2-20}}$ и $\sqrt{\dfrac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ се природни броеви, а разликата $\sqrt{\dfrac{x^2+20}{x^2-20}}-\sqrt{\dfrac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ е полн квадрат на природен број.

Решение. Од условите на задачата и својствата на квадратниот корен имаме дека $\sqrt{\dfrac{x^2+20}{x^2-20}}>\sqrt{\dfrac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$.

Според тоа, треба да ги определиме оние вредности за $x,y\in\mathbb{N}$ за кои изразите $\dfrac{x^2+20}{x^2-20}$ и $\dfrac{5y^3+24}{5y^3-24}$ се полни квадрати на природни броеви. Изразот $\dfrac{x^2+20}{x^2-20}$ можеме да го запишеме како

$$\frac{x^2+20}{x^2-20}=\frac{x^2-20+40}{x^2-20}=\frac{x^2-20}{x^2-20}+\frac{40}{x^2-20}=1+\frac{40}{x^2-20},$$ **(5 поени)**

па за да биде природен број треба да ги одредиме оние вредности на $x\in\mathbb{N}$ за кои x^2-20 е делител на бројот 40. Делители на бројот 40 се броевите 1,2,4,5,8,10,20 и 40, па бараната вредност на $x\in\mathbb{N}$ е решение на равенката $x^2-20=k$, односно $x^2=k+20$, каде што $k\in\{1,2,4,5,8,10,20,40\}$. Со замена на $k\in\{1,2,4,5,8,10,20,40\}$ во $x^2=k+20$ ги добиваме следните равенки

$$x^2=21,\ x^2=22,\ x^2=24,\ x^2=25,\ x^2=28,\ x^2=30,\ x^2=40 \text{ и } x^2=60.$$ **(5 поени)**

Единствениот природен број кој е полн квадрат на природен број и се појавува на десната страна на равенките е бројот 25, па бараната вредност на $x\in\mathbb{N}$ е единствена и $x=5$. Тогаш, за $x=5$ имаме $\dfrac{x^2+20}{x^2-20}=9$, односно е полн квадрат. **(2 поени)**

Од друга страна, изразот $\dfrac{5y^3+24}{5y^3-24}$ можеме да го запишеме како

$$\frac{5y^3+24}{5y^3-24}=\frac{5y^3-24+48}{5y^3-24}=\frac{5y^3-24}{5y^3-24}+\frac{48}{5y^3-24}=1+\frac{48}{5y^3-24}$$, **(5 поени)**

па за да биде природен број треба да ги одредиме оние вредности на $y\in\mathbb{N}$ за кои $5y^3-24$ е делител на бројот 48. Делители на бројот 48 се броевите 1,2,3,4,6,8,12,16,24 и 48, па бараната вредност на $y\in\mathbb{N}$ е решение на равенката $5y^3-24=m$, односно $y^3=\frac{m+24}{5}$, каде што $m\in\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$. Со замена на $m\in\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$ во $y^3=\frac{m+24}{5}$ ги добиваме следните равенки

$y^3=5$, $y^3=\frac{26}{5}$, $y^3=\frac{27}{5}$, $y^3=\frac{28}{5}$, $y^3=6$, $y^3=\frac{32}{5}$, $y^3=\frac{36}{5}$, $y^3=8$, $y^3=\frac{48}{5}$ и $y^3=\frac{72}{5}$. **(5 поени)**

Според тоа, единствен природен број за којшто $\frac{5y^3+24}{5y^3-24}$ е полн квадрат на природен број е $y=2$, односно за $y=2$ имаме $\frac{5y^3+24}{5y^3-24}=4$. **(2 поени)** Притоа е исполнето дека $\sqrt{9}-\sqrt{4}=1$, па за $x=5$ и $y=2$ добиваме дека $\sqrt{\frac{x^2+20}{x^2-20}}-\sqrt{\frac{y^3+\frac{24}{5}}{y^3-\frac{24}{5}}}$ е полн квадрат на природен број, и тие се единствени. **(1п.)**

IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. Се формираат сите различни производи од по два различни множители од првите пет прости броеви $(2\cdot 3, 2\cdot 5, \cdots)$. Колку е квадратен корен од производот на квадратните корени на сите вакви производи?

Решение. (Нумерус 45-2, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 3653)

Ќе ја решиме задачата поопшто – за произволни ненегативни броеви a, b, c, d, e, такви што кои било два различни парови што можат да се формираат даваат различен производ.

Сите производи со по 2 множители од дадените броеви се $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$ – вкупно 10. (Производите xy и yx не ги броиме два пати, како различни, бидејќи $xy=yx$.) **(10 поени)**

За бараниот квадратен корен од производи имаме:

$$\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{ac}\sqrt{ad}\sqrt{ae}\sqrt{bc}\sqrt{bd}\sqrt{be}\sqrt{cd}\sqrt{ce}\sqrt{de}}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{a}\sqrt{c}\sqrt{a}\sqrt{d}\sqrt{a}\sqrt{e}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{b}\sqrt{d}\sqrt{b}\sqrt{e}\sqrt{c}\sqrt{d}\sqrt{c}\sqrt{e}\sqrt{d}\sqrt{e}}=\sqrt{(abcde)^2}=abcde.$$ **(10 поени)**

За $a=2, b=3, c=5, d=7, e=11$, резултатот е $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=30\cdot 77=2310$. **(5 поени)**

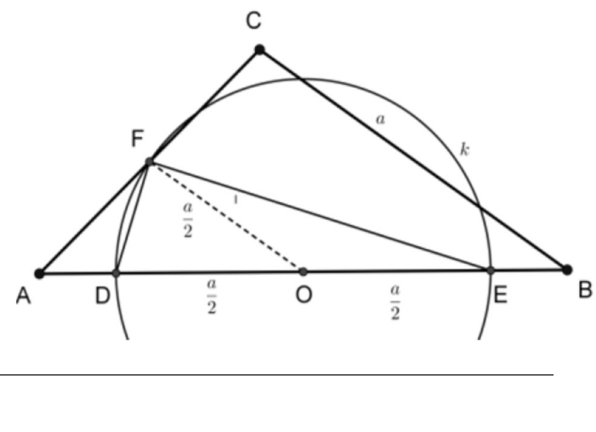
2. На страната AB на триаголникот ABC се избрани две точки D и E такви што $\overline{DE}=\overline{BC}$. Нека точката F е средина на страната AC и $\overline{AD}=\overline{BE}$. ($D$ е помеѓу A и E). Докажи дека аголот DFE е прав.

Решение. (Нумерус 45-4, Конкурсни задачи, 9 одделение, задача 3714)

Нека точката O е средина на страната AB, т.е. $\overline{AO}=\overline{BO}$, и нека $\overline{DE}=\overline{BC}=a$.

Заради $\overline{DO}=\overline{AO}-\overline{AD}=\overline{BO}-\overline{BE}=\overline{EO}$, точката O е средина и на DE, односно $\overline{DO}=\overline{EO}=\frac{a}{2}$. **(10 поени)**

Бидејќи O е средина на AB и F е средина на AC следува дека OF е средна линија во $\triangle ABC$, од каде $\overline{OF}=\frac{\overline{BC}}{2}=\frac{a}{2}$. **(5 поени)**



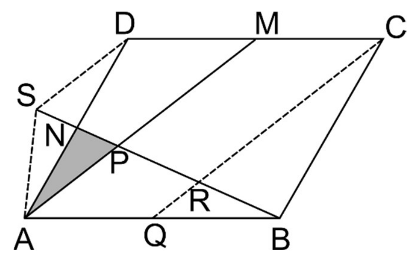
Нека k е кружница со центар во O и радиус $\frac{a}{2}$. Тогаш, заради $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = \frac{a}{2}$, мора и F да лежи на кружницата k. **(5 поени)**
Аголот DFE е периферен агол над дијаметарот DE, па според Талесовата теорема, $\angle DFE = 90°$. **(5 поени)**

3. Марко бил роден помеѓу 1300 и 1400 година, а Дарко помеѓу 1400 и 1500 година. И двајцата биле родени на 6-ти април, во години што се квадрати на природни броеви. Секој од нив живеел по 110 години. Во која година, додека биле живи, нивните години на 7-ми април биле квадрати на природни броеви?
Решение. Бидејќи $36^2 = 1296$, $37^2 = 1369$, $38^2 = 1444$, $39^2 = 1521$ јасно е дека единствен полн квадрат меѓу 1300 и 1400 е 1369, а меѓу 1400 и 1500 е 1444.
Значи, Марко бил роден во 1369 година, а Дарко во 1444 година. **(10 поени)**
Да претпоставиме дека на 7-ми април во некоја година, Марко имал $m^2 < 111$ а Дарко $n^2 < 111$ години (за некои природни броеви m и n). Марко наполнил m^2 години во $1369 + m^2$ година, а Дарко наполнил n^2 години во $1444 + n^2$ година, па бидејќи $1369 + m^2$ и $1444 + n^2$ определуваат иста година, добиваме

$$1369 + m^2 = 1444 + n^2, \text{ односно } m^2 - n^2 = 75.$$ **(10 поени)**

Полни квадрати помали од 111 се $1,4,9,16,25,36,49,64,81,$ и 100 а единствени меѓу нив со разлика 75 се $m^2 = 100$ и $n^2 = 25$. Бараната година, во која на 7-ми април Марко имал 10^2 а Дарко 5^2 години, е $1369 + 100 = 1444 + 25 = \boxed{1469}$ година. **(5 поени)**

4. Нека точката M е средина на страната CD, а точката N е средина на страната DA на паралелограмот $ABCD$. Правите AM и BN се сечат во точка P. Колкав дел од плоштината на паралелограмот претставува плоштината на триаголникот ANP?
Решение. (3 поени) за цртеж со сите неопходни елементи.
Нека S е точка од правата BN, така што N е средина на отсечката PS. Отсечките AD и PS се преполовуваат, па четириаголникот $APDS$ е паралелограм. **(4 поени)**



Нека Q е средина на страната AB. Бидејќи $\overline{AQ} = \overline{MC}$ и $AQ \parallel MC$, следува дека четириаголникот $AQCM$ е паралелограм. **(3 поени)**
Значи: $CQ \parallel MA \parallel DS$.
Од $\overline{BQ} = \overline{QA}$ следува $\overline{BR} = \overline{RP}$. Од $\overline{CM} = \overline{MD}$ следува $\overline{RP} = \overline{PS}$. Значи: $\overline{BR} = \overline{RP} = \overline{PS}$.
Бидејќи $\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{PS}$ следува дека $\overline{PN} = \frac{1}{5}\overline{BN}$. **(5 поени)**
Но тогаш, и висината h_P на триаголникот APN од темето P е еднаква на $\frac{1}{5}$ од висината h на паралелограмот $ABCD$ меѓу страните BC и AD. **(3 поени)**
Од условот $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AD}$ и од претходно докажаното равенство $h_P = \frac{1}{5}h$, за плоштината на $\triangle ANP$ добиваме

$$P_{ANP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \frac{1}{5}h = \frac{1}{20} \cdot \overline{AD} \cdot h = \frac{1}{20} \cdot P_{ABCD}.$$ **(7 поени)**