XLI ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
4.2.2023 година

IV ОДДЕЛЕНИЕ

Напомена: Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата.

Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.

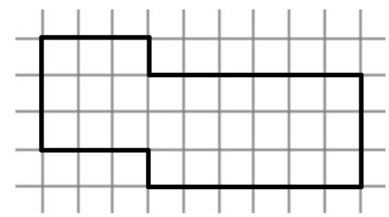
1. Дедото сега има 62 години, неговата ќерка има 36 години, внукот има 8 години, а внуката има 6 години. По колку години дедото ќе има толку години колку што ќе имаат заедно неговите ќерка, внук и внука?

Решение. (задача 3941 од Нумерус XLVIII-1)

Ќерката, внукот и внуката сега имаат 50 години, односно 12 години помалку. **(5 поени)**

За секоја наредна година бројот на годините на дедото ќе се зголемува за 1, а збирот на годините на останатите за 3, односно за 2 повеќе. **(10 поени)**

За да ги достигнат годините на дедото треба да поминат $12:2=6$ години. **(10 поени)**



2. Секое квадратче во мрежата има страна со должина 1 cm. Определи ги периметарот и плоштината на фигурата.

Решение. (задача 3970 од Нумерус XLVIII-2)

Периметарот на фигурата може да биде пресметуван на различни начини. Наведени се два од нив:

I начин: Периметарот на фигурата е збир на должините на сите страни. Бидејќи 4 страни имаат должина 3 cm, 2 страни имаат должина 6 cm и 2 страни имаат должина 1 cm, добиваме:

$$L=4\cdot 3+2\cdot 6+2\cdot 1=26\text{ cm}.$$

II начин: Периметарот на фигурата е еднаков на периметарот на минималниот правоаголник во кој може да се смести фигурата. Тој правоаголник има страни со должини 9 cm и 4 cm, па $L=2\cdot 9+2\cdot 4=26\text{ cm}$.

Плоштината на фигурата може да биде пресметувана на различни начини. Наведени се 4 од нив:

I начин: Со пребројување на квадратчињата од кои е составена фигурата, $P=27\text{ cm}^2$.

II начин: Со собирање на плоштините на квадратот со страна 3 cm и правоаголникот со страни 3 cm и 6 cm од кои е составена фигурата, $P=3\cdot 3+3\cdot 6=27\text{ cm}^2$.

III начин: Со одземање на плоштините на двете правоаголничиња од плоштината на минималниот правоаголник во кој може да се смести фигурата, $P=4\cdot 9-(1\cdot 3+1\cdot 6)=27\text{ cm}^2$.

IV начин: Со транслација на трите горни квадратчиња за 3 единици надолу и формирање правоаголник чија плоштина останува еднаква на плоштината на фигурата, $P=3\cdot 9=27\text{ cm}^2$.

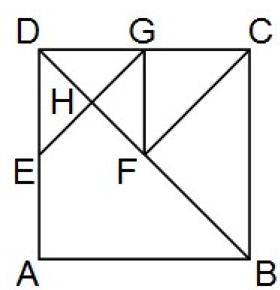
(15 п. за точно пресметана една величина, вкупно 25 п. за точно пресметани и двете, L и P.)

3. Запиши ги сите правилни дропки чиј броител е непарен едноцифрен број, а именителот е парен едноцифрен број.

Решение. Броителот може да биде 1, 3, 5 и 7. **(5 бода)**

Не може да биде 9 заради правилноста на дропката. **(5 бода)**

Имајќи предвид дека именителите треба да бидат парни цифри поголеми од броителите, ги добиваме дропките: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$. **(15 бода)**



4. Запиши ги сите триаголници што се гледаат на цртежот.

Решение. Има 10 триаголници:

ΔABD, ΔBCD,
ΔBCF, ΔCDF,
ΔCGF, ΔGDF, ΔGDE,
ΔFGH, ΔGDH, ΔDEH.

Напомена: Редоследот на запишување на темињата и на триаголниците не е важен. За точни се вреднуваат и одговори во кои не е запишан знакот за триаголник.

(По 2 поени за секој од првите 5 запишани триаголници, по 3 поени за секој следен триаголник; вкупно 25 поени за сите 10 триаголници).

V ОДДЕЛЕНИЕ

Напомена:

Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата.

Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.

1. Одреди го аголот што го формираат стрелките на часовникот во 13 часот и 20 минути.

Решение. (задача 3951 од Нумерус XLVIII-1)

Во 13 часот малата стрелка е точно на бројот 13.

За 20 минути ќе помине уште $\frac{1}{3}$ од 30° $(=360^\circ:12)$, аголот меѓу 13 ч. и 14 ч. **(15 поени)**

Оттука, имаме дека аголот е $30^\circ+30^\circ+\frac{2}{3}\cdot 30^\circ=80^\circ$. **(10 поени)**

2. За првенство во фудбал во едно училиште формирани се 10 екипи. Колку натпревари ќе се одиграат во текот на првенството ако секоја екипа со секоја друга екипа одигра четири натпревари?

Решение. (задача 3922 од Нумерус XLVII-4)

Првата од десетте екипи со останатите 9 ќе одигра $4\cdot 9=36$ натпревари. **(5 поени)**

Втората со останатите 8 екипи ќе одигра $4\cdot 8=32$ натпревари (четирите натпревари што ќе ги одигра со првата екипа не ги броиме бидејќи се веќе избројани).

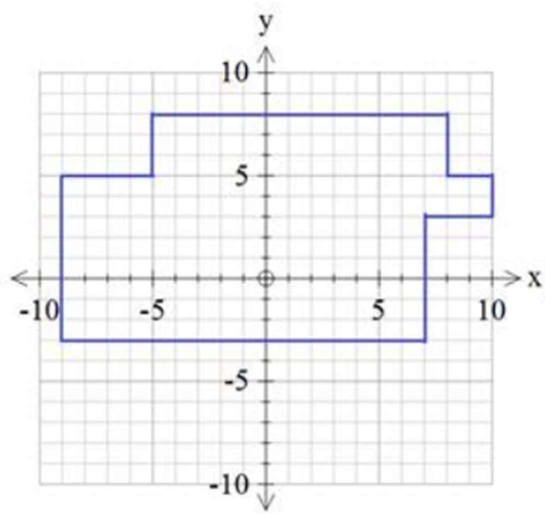
Третата со останатите 7 екипи ќе одигра $4\cdot 7=28$ (четирите натпревари што ќе ги одигра со првата и четирите со втората екипа се веќе пребројани), итн. **(10 поени)**

Така добиваме дека вкупно ќе се одиграат:

$$4\cdot9+4\cdot8+4\cdot7+4\cdot6+4\cdot5+4\cdot4+4\cdot3+4\cdot2+4\cdot1=$$
$$4\cdot(9+8+7+6+5+4+3+2+1)=4\cdot 45=180$$

натпревари. **(10 поени)**

3. Пресметај ги плоштината и периметарот на следната фигура. Секое квадратче во мрежата има должина на страна $1\ \mathrm{cm}$.



Решение.

Периметарот може да се пресмета на повеќе различни начини. Наведени се два од нив:

I начин: Периметарот е збир на должините на страните,

$L=16+6+3+2+2+3+13+3+4+8=60\ \mathrm{cm}$.

II начин: Периметарот на фигурата е еднаков на периметарот на минималниот правоаголник во кој може да се смести фигурата. Тој правоаголник има страни со должини 19 cm и 11 cm, па $L=2\cdot(19+11)=60$ cm.

Плоштината може да се пресмета на повеќе различни начини. Наведени се три од нив:

I начин: Со пребројување на квадратчињата во нејзината внатрешност, $P=173\ \mathrm{cm}^2$.

II начин: Со поделба на фигурата на правоаголници и собирање на плоштините на правоаголниците од кои е составена фигурата. На пример:

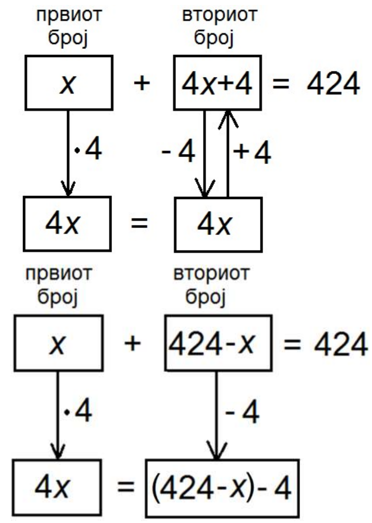
$$P=3\cdot13+2\cdot19+6\cdot16=39+38+96=173\ \mathrm{cm}^2.$$

III начин: Од минималниот правоаголник кој ја содржи целата фигура (неговата плоштина е $19\cdot 11=209\ \mathrm{cm}^2$), ги одземеме плоштините на правоаголниците со страни $6\ cm$ и 3 cm; 2 cm и 3 cm; 3 cm и 4 cm. Плоштината на дадената фигура е:

$$P=19\cdot11-6\cdot3-2\cdot3-3\cdot4=209-36=173\ \mathrm{cm}^2.$$

(15 поени за точно пресметување на една од величните, L или P; вкупно 25 поени за точно пресметани двете.)

4. Збирот на два природни броја е 424. Ако првиот број се зголеми четири пати, а вториот се намали за 4, тогаш тие два новодобиени броеви ќе бидат еднакви меѓу себе. Кои се тие броеви?



Решение.

<u>I начин:</u> Може да го означиме првиот број со x.
Зголемен 4 пати тој е еднаков на $4x$.
Вториот број намален за 4 е еднаков на $4x$.
Оттука вториот број е еднаков на $4x+4$. **(5 поени)**
Збирот на првиот и на вториот број е еднаков на 424, односно
$x+(4x+4)=424$. **(10 поени)**
$5x+4=424$, $5x=420$, $x=84$. Првиот број е 84. **(5 поени)**
Вториот број $4\cdot 84+4=336+4=340$. **(5 поени)**

<u>II начин:</u>
Нека првиот број е x. Тогаш вториот број е $424-x$. **(5 поени)**
Од условот на задачата се добива равенката:
$4x=(424-x)-4$. **(10 поени)**
Оттука, $4x+x=420$, $5x=420$.
Првиот број е $x=84$. **(5 поени)** Вториот број е $424-84=340$. **(5 поени)**

VI ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 47/2 зад 3865) Определи ги должините на страните на рамнокрак триаголник со периметар $168cm$ ако должината на основата е три пати помала од должината на кракот.
Решение: Ако должината на основата ја означиме со x, тогаш должината на кракот е $3x$. (5б)
Значи $7x=168$ т.е. $x=24$. (10б)
Основата е $24cm$,а кракот е $72cm$. (10б)
2. (Нумерус 48/1 зад 3951) Одреди го помалиот агол кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 13 часоот и 30 минути.
Решение: Бидејќи 5 минути од времето одговара на агол од 30^0 (10б) добиваме дека аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 13 часот и 30 минути изнесува 135^0. (15б)
3. Ако еден ученик купи 11 тетратки со парите што ги има, ќе му преостанат 140 денари, а за да купи 15 тетратки му се потребни уште 100 денари. Колку денари имал ученикот?
Решение: Нека ученикот има x денари,тогаш според текстот ја формираме равенката:
$11x+140=15x-100$ (10б)
од каде се добива $x=60$ денари. (10б)
Значи ученикот имал 800 денари. (5б)
4. За подготовка на 25 мафини по својот рецепт, на тетка Маре ѝ се потребни 1 чаша какао, 2 чаши масло, 3 чаши шеќер и 4 чаши брашно. Колку најмногу мафини може да подготви тетка Маре по тој рецепт, ако има 13 чаши какао, 14 чаши масло, 15 чаши шеќер и 16 чаши брашно?
Решение: Од 13 чаши какао тетка Маре има 13 пати повеќе какао од почетниот рецепт, има 7 пати повеќе чаши масло, 5 пати повеќе чаши шеќер и 4 пати повеќе брашно. (15б)
Бидејќи брашно има најмалку, таа може да направи $4\cdot 25=100$ мафини најмногу. (10б)

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Одреди го природниот број n, за кој збирот $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{n}$ е природен број.

Решение: За збирот $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{n}$ важи $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{n}=\frac{19}{20}+\frac{1}{n}$. (8 бода)

Од $\frac{19}{20}<1$ и $\frac{1}{n}\leq 1$ следува дека $\frac{19}{20}+\frac{1}{n}<2$, тогаш $\frac{19}{20}+\frac{1}{n}=1$. (10 бода)

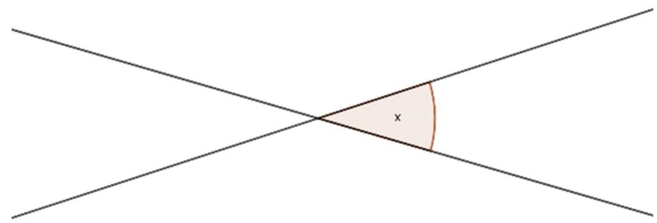
Од последнто равенство следува дека $n=20$, т.е. $\frac{19}{20}+\frac{1}{20}=\frac{20}{20}=1$. (7 бода)

---

2. (Нумерус 46-4 3813 2020/2021). Колку најмалку треба да биде ширината на еден автопат за да може паралелно да се движат три коли, ако секоја од тие коли има ширина од 2,75 m, а страничното растојание меѓу колите да биде најмалку по 0,75 m и оддалеченоста од страните на автопатот да е најмалку по 0,5 m?

Решение: Ширината на трите коли е $2,75\cdot 3=8,25m$. (7 бода) Потребното растојание меѓу колите (меѓу првата и втората, и втората и третата) е $0,75\cdot 2=1,50m.$ (7 бода) Потребното растојание на краевите од автопатот е $0,5\cdot 2=1m.$ (7 бода) Значи вкупната најмала ширина на автопатот е $8,25+1,50+1=10,75m.$ (4 бода)

3. Збирот на три од четирите агли кои се формираат при пресекот на две дадени прави е еднаков на 332°. Определи ја големината на секој од тие четири агли.



Решение: Нека големината на острите агли е x°. Големината на четвртиот агол е

360° – 332° = 28° = x. (11 бода)

Големината на тапиот агол е 180° – 28° = 152° (10 бода)

Значи, големини на бараните агли се:

28°, 152°, 28° и 152°. (4 бода)

4. (Нумерус 45-2 3648 2019/2020) Во спортска продавница пар патики се продавал за 900 денари поевтино од една тренерка . На акција патиките биле намалени за 10%, а тренерките за 5%. Габи купила пар патики и тренерка на намаление и за нив платила вкупно 5480 денари. Колку чинеле парот патики, а колку тренерката пред намалувањето?

Решение: Нека цената на патиките пред намалувањето била p денари. Тогаш цената на тренерката пред намалувањето била $p+900$ денари. (5 бода) После намалувањето важи:

$$\frac{90}{100}p+\frac{95}{100}\left(p+900\right)=5480.\text{ (10 бода)}$$

Со решавање на оваа равенка добиваме дека $p=2500,$ (5 бода) односно пред намалувањеро патиките чинеле 2500 денари, а тренерката 2500+900=3400 денари. (5 бода)

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 47-2, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 3877)

Во триаголникот ABC со агол во темето C од 60°, симетралата на страната AC ја сече страната AB во точката D. Ако аголот ACD е двапати поголем од аголот DCB, определи ги другите агли на тој триаголник.

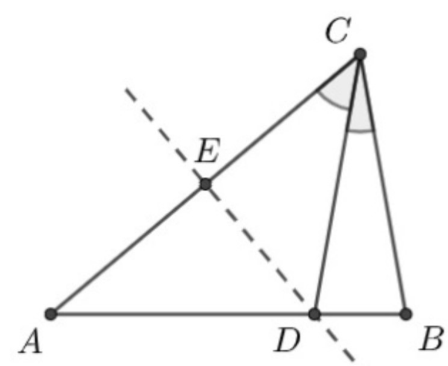
Решение. Нека $\angle DCB=\phi$. Тогаш $\angle ACD=2\phi$. Од $\angle ACB=60^\circ$ се добива $\phi+2\phi=60^\circ$, од каде следува $\phi=20^\circ$, односно $\angle ACD=40^\circ$, $\angle DCB=20^\circ$. (10 бода) Нека симетралата на страната AC ја сече страната AC во точката E . Тогаш

$$\angle AED=\angle CED=90^\circ \text{ и } \overline{AE}=\overline{CE}\text{ . (5 бода)}$$

Притоа, ED е заедничка страна на ΔAED и ΔCED. Од тука, според признакот САС, $\Delta AED\cong\Delta CED$. Се добива дека

$$\angle EAD = \angle ECD = 40^\circ\text{. (5 бода)}$$

Од тоа што збирот на аглите во ΔABC е $180°$, се добива:



$$\angle ABC = 180^\circ-(\angle CAB + \angle ACB) = 180^\circ-(40^\circ + 60^\circ) = 180^\circ-100^\circ = 80^\circ$$

Значи аголот во темето A е $40°$, а аголот во темето B е $80°$. (5 бода)

2. Во една кутија со чоколади $\frac{1}{5}$ од вкупниот број на чоколади се само со бадем, 30% се само со брусница и 20% се само со кикиритки. Колку вкупно чоколади има во кутијата, ако девет од чоколадите во кутијата се само со лешник?

Решение. Нека во кутијата има x чоколади. Тогаш, од условите на задачата имаме дека $\frac{1}{5}x+\frac{30}{100}x+\frac{20}{100}x+9=x$. (15 бода) Со решавање на последната равенка по x добиваме дека

$$\frac{1}{5}x+\frac{3}{10}x+\frac{2}{10}x+9=x \Leftrightarrow \frac{7}{10}x+9=x \Leftrightarrow 9=\frac{3}{10}x \Leftrightarrow x=9:\frac{3}{10} \Leftrightarrow x=30. \text{ (10 бода)}$$

Значи, во кутијата има вкупно 30 чоколади.

3. (Нумерус 46-2, Конкурсни задачи, 7-8 одделение, задача 3762)
Должините на рабовите на еден квадар се $a\,\mathrm{cm}$, $b\,\mathrm{cm}$ и $c\,\mathrm{cm}$, каде a, b и c се различни природни броеви. Волуменот на квадарот е $70\,\mathrm{cm}^3$. Одреди ја најголемата можна плоштина на тој квадар.

Решение. Бидејќи $70=2\cdot5\cdot7$, (5 бода) рабовите на квадарот (во cm) може да бидат: 2, 5, 7 или 1, 10, 7 или 1, 5, 14 или 1, 2, 35, (5 бода) па плоштината на квадарот (во cm^2), соодветно е:

$$\begin{aligned}&2\cdot(2\cdot5+2\cdot7+5\cdot7)=118;\\&2\cdot(10+7+10\cdot7)=174;\\&2\cdot(5+14+5\cdot14)=178;\\&2\cdot(2+35+2\cdot35)=214.\end{aligned} \quad \text{(12 бода)}$$

Значи, најголемата плоштина на квадарот која ги задоволува условите е $214\,\mathrm{cm}^2$. (3 бода)

4. Во две одделенија имало 40 ученици. Минатата година поголем број од нив покажале одличен успех, додека во тековната учебна година, нивниот број значително се намалил. Дури и ако бројот на ученици кои во тековната година покажале одличен успех се зголеми за 5 ученици, тогаш тој број сепак ќе биде дури 3 пати помал од половината од бројот на ученици кои имале одличен успех во минатата година. Определи го бројот на ученици со одличен успех во тековната и минатата година, ако нивниот вкупен број изнесува 37. Колку ученици не покажале одличен успех во тековната година?
Решение. Нека x е бројот на ученици со одличен успех во минатата година и y е бројот на ученици со одличен успех во тековната година. Од условот на задачата, ако бројот на ученици кои во тековната година покажале одличен успех се зголеми за 5 ученици, тогаш тој број сепак ќе биде дури 3 пати помал од половината од бројот на ученици кои имале одличен успех во минатата година, имаме дека $3(y+5)=\frac{x}{2}$. (7 бода) Вкупниот број на ученици со одличен успех во тековната и минатата година е 37, па имаме дека $x+y=37$. (5 бода) Според тоа го добиваме следниот систем од две равенки со две непознати $\begin{cases}3(y+5)=\frac{x}{2}\\x+y=37\end{cases}$. Со решавање на последниот систем равенки добиваме

$$\begin{cases}3(y+5)=\frac{x}{2}\\x+y=37\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6(y+5)=x\\x+y=37\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6(y+5)=x\\6(y+5)+y=37\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6(y+5)=x\\6y+30+y=37\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6(y+5)=x\\7y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=36\\y=1\end{cases}, \text{ (10 бода)}$$

односно бројот на ученици со одличен успех во минатата година е 36, а бројот на ученици со одличен успех во тековната година е 1. Според тоа, бројот на ученици кои не покажале одличен успех во тековната година е еднаков на $40-1=39$, односно 39 ученика. (3 бода)

IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. Кој од следниве два броја е поголем: $\frac{10^{2023}+1}{10^{2022}+1}$ или $\frac{10^{2022}+1}{10^{2021}+1}$? Одговорот да се образложи.
Решение 1. Воведуваме ознака $n=10^{2021}$, тогаш јасно $n>0$ и важи:

$$10^{2022}=10^{1+2021}=10^1\cdot10^{2021}=10n$$
$$10^{2023}=10^{2+2021}=10^2\cdot10^{2021}=1 \quad \textbf{(5 поени)}$$

па дропките може да ги запишеме како:

$$\frac{10^{2023}+1}{10^{2022}+1}=\frac{100n+1}{10n+1}$$

и

$$\frac{10^{2022}+1}{10^{2021}+1}=\frac{10n+1}{n+1} \qquad \textbf{(5 поени)}$$

Нивната разлика е:

$$\frac{10^{2023}+1}{10^{2022}+1}-\frac{10^{2022}+1}{10^{2021}+1}=\frac{100n+1}{10n+1}-\frac{10n+1}{n+1}= \qquad \textbf{(5 поени)}$$

$$=\frac{(100n+1)(n+1)-(10n+1)^2}{(10n+1)(n+1)}=$$

$$=\frac{100n^2+100n+n+1-100n^2-20n-1}{(10n+1)(n+1)}=$$

$$=\frac{81n}{(10n+1)(n+1)}$$

Бидејќи $81n>0$ и $(10n+1)(n+1)>0$, заклучуваме дека разликата е позитивна **(5 поени)**, од каде следува дека бројот определен со дропката $\frac{10^{2023}+1}{10^{2022}+1}$ е поголем. **(5 поени)**

Решение 2. Пресметуваме разлика **(5 поени)**:

$$\frac{10^{2023}+1}{10^{2022}+1}-\frac{10^{2022}+1}{10^{2021}+1}=\frac{(10^{2023}+1)(10^{2021}+1)-(10^{2022}+1)^2}{(10^{2022}+1)(10^{2021}+1)}=$$

$$=\frac{10^{2023}\cdot 10^{2021}+10^{2023}+10^{2021}+1-(10^{2022})^2-2\cdot 10^{2022}-1}{(10^{2022}+1)(10^{2021}+1)}=$$

(5 поени)

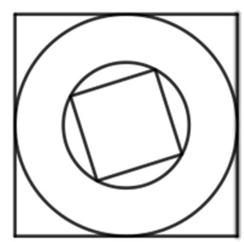
$$=\frac{10^{4044}+10^{2023}+10^{2021}-10^{4044}-2\cdot 10^{2022}}{(10^{2022}+1)(10^{2021}+1)}=$$

$$=\frac{10^{2023}+10^{2021}-2\cdot 10^{2022}}{(10^{2022}+1)(10^{2021}+1)}=\frac{100\cdot 10^{2021}+10^{2021}-20\cdot 10^{2021}}{(10^{2022}+1)(10^{2021}+1)}=$$

$$=\frac{81\cdot 10^{2021}}{(10^{2022}+1)(10^{2021}+1)}$$

Во добиената дропка и броителот и именителот се позитивни, па значи и разликата е позитивна **(5 поени)**. Оттука заклучуваме дека $\frac{10^{2023}+1}{10^{2022}+1}>\frac{10^{2022}+1}{10^{2021}+1}$. **(5 поени)** **(5 поени)**

2. Дадени се две концентрични кружници $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ со радиуси R и r $(R>r)$. Околу поголемата кружница е опишан квадрат, а во помалата кружница е впишан квадрат како на цртежот десно. Односот од плоштините на кружниот прстен и квадратниот прстен (геометриската фигура меѓу двата квадрати) е $\frac{\pi}{10}$.



а) Пресметај го односот од плоштините на помалиот и поголемиот круг.

б) Докажи дека постои правилен многуаголник таков што $\mathcal{K}_1$ е негова опишана, а $\mathcal{K}_2$ е негова впишана кружница.

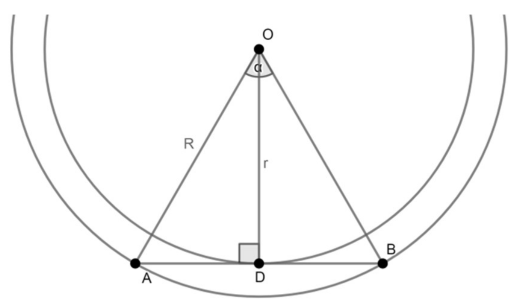
Решение. а) Јасно е дека опишаниот квадрат има страна $2R$ **(2 бода)**, а впишаниот има страна $\sqrt{2}r$ **(3 бода)**. Според тоа:

$$\frac{P_{\text{кружен прстен}}}{P_{\text{квадратен прстен}}}=\frac{\pi R^2-\pi r^2}{(2R)^2-\left(\sqrt{2}r\right)^2}=\frac{\pi(R^2-r^2)}{4R^2-2r^2}=\frac{\pi}{10} \quad (\textbf{5}\text{ бода})$$

Добиваме $10(R^2-r^2)=4R^2-2r^2$, што е еквивалентно со $3R^2=4r^2$, па за бараниот однос на плоштини имаме:

$$\frac{P_{\mathcal{K}_2}}{P_{\mathcal{K}_1}}=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{3}{4} \quad (\textbf{5}\text{ бода}).$$

б) Да го означиме центарот на кружниците со O. Нека AB е отсечка со крајни точки на $\mathcal{K}_1$ што ја допира $\mathcal{K}_2$ во точка D. Тогаш $OD\perp AB$, па OD е висина во рамнокракиот триаголник ABO $(\overline{OA}=\overline{OB}=R)$, а со тоа OD истовремено е и симетрала на аголот при врвот $\alpha=\angle AOB$.



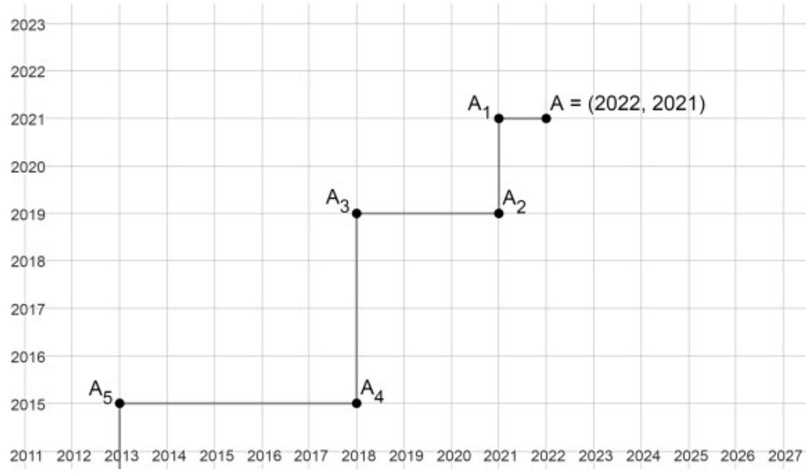
Од Питагорова теорема за правоаголниот $\triangle ADO$:

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OD}^2}=\sqrt{R^2-\frac{3}{4}R^2}=\frac{1}{2}R$. **(5 бода)**

Значи, катетата AD е половина од хипотенузата OA. Следува дека $\angle AOD=30°$, од каде

$\alpha=\angle AOB=2\angle AOD=60°$, што значи дека α е централен агол на правилен шестаголник. **(5 бода)**

3. (Нумерус 47-2, задача 3882) Вонземјанинот Грини (лево) почнал да се движи од $A(2022, 2021)$ во координатната рамнина, како што е опишано на цртежот (десно): еден чекор лево, па два долу, па три лево, па четири долу, па пет лево итн. Точките во кои го менува правецот на движење се означени редоследно со A_1, A_2, A_3, …, и во нив кратко се одмара. Ако Грини се одморил во точката $A_l(86, 41)$, кои се координатите на следната точка A_{l+1} за одмор?



Решение. Случај 1. Нека l е непарен, т.е. $l = 2m - 1$ за некој $m \in \mathbb{N}$. Тогаш, од A се стигнува во A_{2m-1} со движење $1 + 3 + \cdots + (2m - 1)$ единици лево и $2 + 4 + \cdots + (2m - 2)$ единици долу. **(5 бода)**

Се добива системот:

$$\begin{cases} 86 = 2022 - \big(1 + 3 + \cdots + (2m - 1)\big) \\ 41 = 2021 - \big(2 + 4 + \cdots + (2m - 2)\big) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 3 + \cdots + (2m - 1) = 1936 \\ 0 + 2 + \cdots + (2m - 2) = 1980 \end{cases}.$$

Ако од првата равенка на последниот систем се одземеме втората, се добива $(1 - 0) + (3 - 2) + \cdots + \big((2m - 1) - (2m - 2)\big) = 1936 - 1980$, односно $m = -44$. Последното не е можно бидејќи m е природен број. **(5 бода)**

Случај 2. Нека l е парен, т.е. $l = 2m$ за некој природен број m. Тогаш, во A_{2m} се стигнува поаѓајќи од A со движење $1 + 3 + \cdots + (2m - 1)$ единици лево и $2 + 4 + \cdots + 2m$ единици долу (двата збира имаат по m собироци). **(5 бода)**

$$\begin{cases} 86 = 2022 - \big(1 + 3 + \cdots + (2m - 1)\big) \\ \quad 41 = 2021 - (2 + 4 + \cdots + 2m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 3 + \cdots + (2m - 1) = 1936 \\ \quad 2 + 4 + \cdots + 2m = 1980 \end{cases}.$$

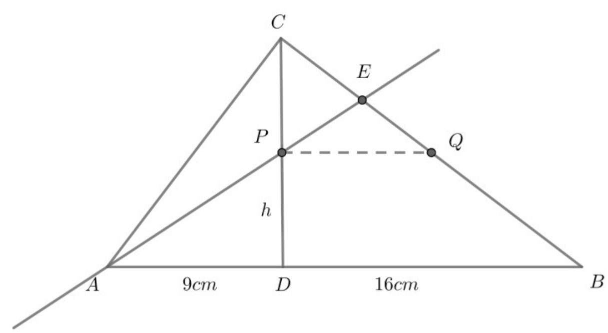
Одземајќи ја првата од втората равенка се добива $(2 - 1) + (4 - 3) + \cdots + \big(2m - (2m - 1)\big) = 1980 - 1936$, т.е. $m = 44$ и $l = 2 \cdot 44 = 88$. **(5 бода)**

Значи, Грини се одморил во A_{88}, а следната точка за одмор е 89 единици лево од неа – тоа е точката $A_{89}(86 - 89, 41)$, те. $A_{89}(-3, 41)$. **(5 бода)**

4. (Нумерус 46-3, задача 3800) Нека е даден правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C и нека $\angle BAC$ е поголем од $\angle CBA$. Висината h спуштена кон хипотенузата AB ја дели AB на две отсечки со должини $9\ \mathrm{cm}$ и $16\ \mathrm{cm}$. Од темето A повлечена е права која минува низ средината на висината h и ја сече страната BC во точка E. Пресметај ја должината на отсечката AE.

Решение. Нека D е подножјето на висината h. Нека P и Q се средишни точки на висината h и страната $\overline{BC}$, соодветно. Според Евклидовата теорема $h^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$, т.е. $h = \sqrt{9 \cdot 16} = 12\ \mathrm{cm}$. **(4 поени)** Според Питагоровата теорема:

- од ΔADC имаме дека $\overline{AC} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15\ \mathrm{cm}$;
- од ΔBDC имаме дека $\overline{BC} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20\ \mathrm{cm}$;
- од ΔADP имаме дека $\overline{AP} = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}\ \mathrm{cm}$. **(6 поени)**



Отсечката $\overline{PQ}$ е средна линија во ΔBDC, па затоа $PQ \parallel BD$ и $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{BD} = 8\ \mathrm{cm}$. **(3 поени)** Триаголниците ΔABE и ΔPQE се слични, па важи пропорцијата $\overline{AB} : \overline{PQ} = \overline{AE} : \overline{PE}$, т.е. $\overline{AB} : \overline{PQ} = (\overline{AP} + \overline{PE}) : \overline{PE}$. **(5 поени)** Оттука добиваме:

$$25 : 8 = \big(3\sqrt{13} + \overline{PE}\big) : \overline{PE}$$

$$25 \cdot \overline{PE} = 8 \cdot \big(3\sqrt{13} + \overline{PE}\big)$$

$17 \cdot \overline{PE} = 24\sqrt{13}$, т.е. $\overline{PE} = \frac{24}{17}\sqrt{13}\ \mathrm{cm}$. **(5 поени)**

Конечно, бараната должина е $\overline{AE} = \overline{AP} + \overline{PE} = 3\sqrt{13} + \frac{24}{17}\sqrt{13} = \frac{75}{17}\sqrt{13}\ \mathrm{cm}$. **(2 поени)**