27. ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

Задача 1. Една група деца се состои од 2022 момчиња и 2023 девојчиња. Секое девојче познава точно 2021 момче. (Познанствата се симетрични: ако A го познава B, тогаш и B го познава A.) Докажете дека не е возможно секое момче да познава еднаков број девојчиња.

Решение. Да забележиме дека вкупниот број на познанства е $2023 \cdot 2021$, затоа што секое девојче познава по точно 2021 момче. (**2п**) Ако секое момче познава еднаков број девојчиња, на пример d, тогаш вкупниот број познанства би изнесувал $2022 \cdot d$. (**3п**) Но, тоа би значело дека $2023 \cdot 2021 = 2022 \cdot d$, што е противречност (имено, левата страна е непарна, а десната парна). (**3п**) □

Задача 2. Природен број n е **суперпрост** доколку разликата меѓу секои два последователни позитивни делители на n е прост број. Определете ги сите суперпрости броеви.

Решение. Сите суперпрости броеви се: $n = 1$ и $n = 3$. Со директна проверка, забележуваме дека овие два броја го задоволуваат условот на задачата. (**1п**)
Ќе докажеме дека нема други решенија. Нека $n \geq 2$ е суперпрост број. Нека d е најмалиот природен делител на n кој е различен од 1. Ако d не е прост, тогаш $d = ab$, каде $1 < a < d$; следствено, a е делител на n кој е различен од 1, и е строго помал од d, што е невозможно заради минималноста на d. Заклучуваме дека $d = p$ за некој прост број p. (**2п**)

Тогаш 1 и p се последователни делители на n, па $p - 1$ е некој прост број q. (**1п**) Ако $q \geq 3$, тогаш q е непарен број, па p е парен број поголем од 2, што значи не е прост број, а тоа е контрадикција. Следува $q = 2$ и $p = 3$. (**1п**) Бидејќи p е најмалиот делител на n различен од 1, бројот $\frac{n}{3}$ е втор најголем делител на n, што значи дека $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ мора да е прост број, да го означиме со r. Ова значи дека $2n = 3r$. (**2п**) Но, r прост број, па мора $r = 2$ и $n = 3$. (**1п**) □

Задача 3. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c = 1$. Докажете дека

$$\left(\frac{1+c}{a} + 2\right)\left(\frac{1+a}{b} + 2\right)\left(\frac{1+b}{c} + 2\right) \geq 216.$$

Кога важи равенство?

Решение: Ако се помножат двете страни на почетното неравенство со abc, неравенството се трансформира во

$$(1 + c + 2a)(1 + a + 2b)(1 + b + 2c) \geq 6^3 abc. \qquad (\mathbf{1п})$$

Од условот на задачата, последното неравенство е еквивалентно со

$$(3a + b + 2c)(2a + 3b + c)(a + 2b + 3c) \geq 6^3 abc. \qquad (\mathbf{1п})$$

Да забележиме дека од АМ-ГМ се добива:

$$b + c + c + a + a + a \geq 6 b^{\frac{1}{6}} c^{\frac{2}{6}} a^{\frac{3}{6}}. \qquad (\mathbf{1п})$$

$$c + a + a + b + b + b \geq 6 c^{\frac{1}{6}} a^{\frac{2}{6}} b^{\frac{3}{6}}, \qquad (\mathbf{1п})$$

$$a + b + b + c + c + c \geq 6 a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{2}{6}} c^{\frac{3}{6}}, \qquad (\mathbf{1п})$$

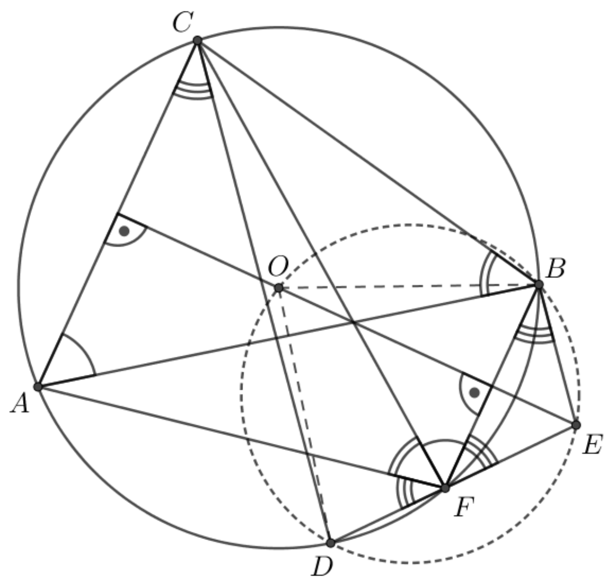
Со множење на претходните три неравенства, добиваме

$$(3a+b+2c)(2a+3b+c)(a+2b+3c) \geq 6^3 abc\,, \qquad \textbf{(2п)}$$

што и требаше да се докаже. Равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$. **(1п)**

Задача 4. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на опишана кружница O и $BC < AB$. Симетралата на $\angle ACB$ ја сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката D. Симетралата на страната AC ја сече опишаната кружница на $\triangle BOD$ во точката E. Правата DE по втор пат ја сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката F. Докажете дека правите CF, OE и AB се сечат во една точка.

Решение.



Нека $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Бидејќи DC е симетрала на аголот $\angle ACB$ и D е точка од опишаната кружница околу $\triangle ABC$ имаме

$$\angle AFD = \angle ACD = \frac{\gamma}{2}\,,$$

$$\angle CFA = \angle CBA = \beta$$

и

$$\angle BFC = \angle BAC = \alpha\,,$$

(1п)

од каде следува

(1) $$\angle EFB = \frac{\gamma}{2}\,.$$

(1п)

Од теоремата за централен и периферен агол имаме

$$\angle DOB = 2\angle DCB = \gamma\,.$$

(1п)

Од тетивноста на четириаголникот $DEBO$ следува

(2) $$\angle BED = 180^\circ - \angle DOB = 180^\circ - \gamma\,.$$

(1п)

Од (1) и (2) добиваме дека

$$\angle FBE = \frac{\gamma}{2}\,. \tag{3}$$

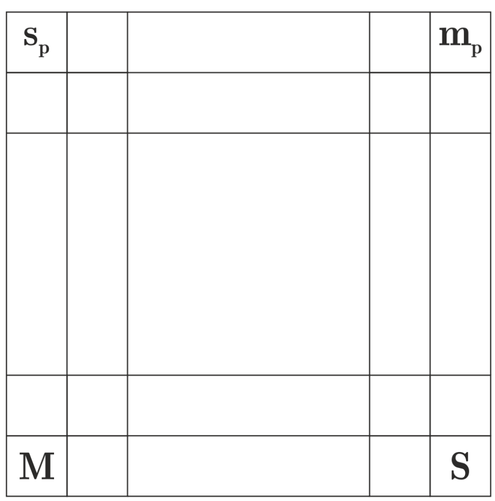
(1п)

Од (1) и (3) следува $\triangle FEB$ е рамнокрак.
Бидејќи BF е тетива следува $BF \perp OE$. Од ова и од $AC \perp OE$ следува $AC \parallel FB$, т.е. четириаголникот $AFBC$ е трапез. (**1п**) Бидејќи $AFBC$ е и тетивен, добиваме дека е рамнокрак трапез. (**1п**) Од AB и CF се негови дијагонали, а OE е симетрала на основите, јасно е дека сите три прави се сечат во една точка. (**1п**) □

Задача 5. Дадена е квадратна 2023×2023 табла. За две полиња (1×1 квадратчиња) велиме дека се соседни ако имаат заедничко теме. Малер и Среќко ја играат следната игра. На почетокот Малер има фигура во полето означено со **M**, а Среќко во полето означено со **S**. Тие наизменично повлекуваат потези со својата фигура следејќи ги следните правила:

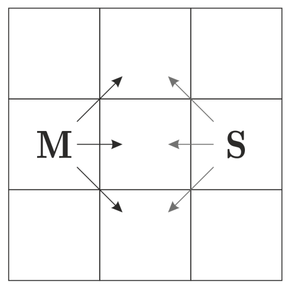
(1^0) Фигурата мора да се помести во поле соседно на полето во кое се наоѓа.
(2^0) Фигурата не смее да се помести во поле на кое претходно имало фигура (полињата во кои имало фигура не можат да се користат подоцна).
(3^0) Фигурата не смее да се постави во поле соседно на полето во кое е фигурата на противникот.

Играч победува ако ја постави својата фигура во полето што е дијаметрално спротивно на почетното (s_p за Среќко и m_p за Малер) или ако противникот е на ред да игра и нема дозволен потег за својата фигура. Малер ја почнува играта. Кој има победничка стратегија? (Образложете го одговорот.)



Решение. Најпрво забележуваме дека таблата е осносиметрична во однос на централната (1012-та) колона. (**1п**) Ќе докажеме дека вториот играч (Среќко) има победничка стратегија. Една победничка стратегија е „имитирање на потезите на противникот следејќи ја споменатата симетрија": „Среќко во секој потег ја поместува својата фигура во полето осносиметрично на полето во кое Малер ја поместил својата фигура во претходниот потег.". (**2п**)

Најпрво докажуваме дека со ваквата стратегија Среќко секогаш може да игра. На почетокот полињата во кои се фигурите се осносиметрични, па со оваа стратегија во секоја рунда (откако двата играчи повлекле потег) фигурите се на осносиметрични полиња. Според ова доволно е да докажеме дека ако потегот бил дозволен за Малер, тогаш симетричниот потег е дозволен за Срећко. Да претпоставиме дека полето во кое треба да се придвижи Срећко веќе е искористено; така би следувало дека полето во кое се придвижил Малер веќе било искористено (недозволено), што е противречност. Според ова условите (1^0) и (2^0) се задоволени. За условот (3^0) да не биде задоволен потребно е Малер да ја придвижил фигурата во поле кое е соседно со осносиметричното на него или во поле од централната колона. Лесно се забележува дека две резлични осносиметрични полиња не можат да бидат соседни. Освен ова ако Малер ја придвижил фигурата во централната колона (видете цртеж), тоа значи дека неговата фигура се наоѓала на поле соседно со новото; но тогаш и фигурата на Срећко се наоѓа на соседно поле, што значи дека Малер направил недозволен потег. Ова е посакуваната противречност. (**3п**)



Според ова Срећко секогаш може да направи потег (кога е на ред). Од друга страна, бидејќи таблата има конечно полиња после конечно многу рунди, Малер нема да може да направи дозволен потег. Освен ова, лесно може да забележиме дека со наведената стратегија фигурата на секој од играчите останува на својата половина од таблата. Следствено, не можат да стигнат до победничкото поле (кое е во спротивната половина). Значи, ова е победничка стратегија за Срећко. (**2п**) □

Забелешка. Очигледно Малер може директно да се движи кон победничкото поле за Срећко и да го искористи, но тоа не значи дека ја победил играта.