VI одделение

1. Марко, Жарко и Дарко собирале албум со сликички. Тие заедно собрале 1650 сликички. Жарко собрал $\frac{2}{3}$ од сликичките што ги собрал Марко, а Дарко собрал $\frac{3}{8}$ од сликичките кои заедно ги собрале Марко и Жарко. По колку сликички собрал секој од нив?

Решение: Марко собрал x сликички, Жарко собрал $\frac{2}{3}x$ сликички и Дарко собрал $\frac{3}{8}\left(x+\frac{2}{3}x\right)$.

$x+\frac{2}{3}x+\frac{3}{8}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=1650$; $x+\frac{2}{3}x+\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}x=1650$; $\frac{24x+16x+9x+6x}{24}=1650$; $\frac{55x}{24}=1650$; $x=720$.

Марко собрал 720 сликички. Жарко собрал $\frac{2}{3}\cdot 720=780$ сликички и Дарко собрал

$\frac{3}{8}(720+480)=450$ сликички.

2. Во областа на агол АОВ е повлечена полуправа ОС, така што аголот АОС е за 40^0 помал од аголот СОВ и е еднаков на една третина од аголот АОВ. Пресметај го аголот АОВ.

Решение: Нека аголот АОС е означен со α, аголот СОВ со β и аголот АОВ со $\alpha+\beta$.

Тогаш: $\alpha=\beta-40^0$ $\alpha=\frac{1}{3}(\alpha+\beta)$.

Од втората равенка следува дека $3\alpha=\alpha+\beta$, односно $\beta=2\alpha$. Со замена на β во првата равенка добиваме дека $\alpha=2\alpha-40^0$, односно $\alpha=40^0$.

Според тоа, за аголот β добиваме $\beta=2\alpha=2\cdot 40^0=80^0$.

На крај, бараниот агол АОВ е $\alpha+\beta=40^0+80^0=120^0$.

3. Ако свежото грозје содржи 75% вода и сувото грозје содржи 5% вода, колку kg свежо грозје е потребно за да се добие $130\,\mathrm{kg}$ суво грозје?

Решение: Нека со x е означена количината на свежо грозје од која се добива $130\,\mathrm{kg}$ суво грозје. Во $130\,\mathrm{kg}$ суво грозје има 5% вода и 95% сува материја. Од $\frac{95\cdot 130}{100}123{,}5$ следува дека во $130\,\mathrm{kg}$ суво грозје има $123{,}5\,\mathrm{kg}$ сува материја. Бидејќи во свежото грозје има 75% вода, во него има 25% сува материја. Бидејќи сувата материја не се менува при сушење, во количината x свежо грозје треба да има $123{,}5\,\mathrm{kg}$ сува материја. Според тоа $\frac{25\cdot x}{100}=123{,}5$, од што следува дека бараната количина свежо грозје е $494\,\mathrm{kg}$.

4. На хоризонтална права која ја дели рамнината на горна и долна полурамнина, нацртана е отсечка AB со должина $72\,\mathrm{cm}$. Користејќи ги крајните точки на отсечката, во горната полурамнина се нацртани правилен (рамностран) триаголник AM_1M_2 и правилен петаголник $M_5M_6M_7M_8M_9$, а во долната полурамнина се нацртани правилен четириаголник (квадрат) $M_2M_3M_4M_5$ и правилен шестаголник $M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B$. Притоа, M_2, M_5 и M_9 се на отсечката AB, точката M_2 е помеѓу А и M_5 и точката M_9 е помеѓу M_5 и B. Должините на страните на правилните многуаголници се однесуваат како соодветните броеви на нивните страни. Пресметај ја должината на искршената линија $AM_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B$.

Решение : Нека страната на рамностраниот триаголникот AM_1M_2 ја означиме со a, страната на квадратот $M_2M_3M_4M_5$ со b, страната на правилниот петаголник $M_5M_6M_7M_8M_9$ со c и страната на правилниот шестаголник $M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B$ со d.

Од условот на задачата следува дека $a:b:c:d=3:4:5:6=k$, односно $a=3k,\ b=4k,\ c=5k,\ d=6k$.

Бидејќи $\overline{AB}=72cm$ и $\overline{AB}=72=a+b+c+d=3k+4k+5k+6k=18k$, добиваме дека $k=4$.

Должината на искршената линија $AM_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B$ е

$$2a + 3b + 4c + 5d = 6k + 12k + 20k + 30k = 68k$$

односно е еднаква на $272cm$.

VII одделение

1. Најди ги сите природни броеви од облик $\overline{20a2b2}$ деливи со 72.

Решение: Бројот $\overline{\mathbf{20a2b2}}$ е делив со 72 ако истовремено е делив и со 8 и со 9. За да биде делив со 9 треба збирот на цифрите да е делив со 9, односно $2 + 0 + a + 2 + b + 2 = 6 + a + b$ да биде делив со 9. Истовремено треба да биде делив со 8, што значи дека трицифрениот завршеток треба да е делив со 8, односно $\overline{2b2}$ треба да е делив со 8. Од оваа деливост следува дека $b \in \{3,7\}$. Според тоа, заклучуваме дека за $b = 3, a \in \{0,9\}$; за $b = 7, a \in \{6\}$. Значи бараните броеви се: 200232, 209232 и 205272.

2. Дропката $\frac{93}{91}$ претстави ја како збир од две позитивни дропки чии именители се 7 и 13.

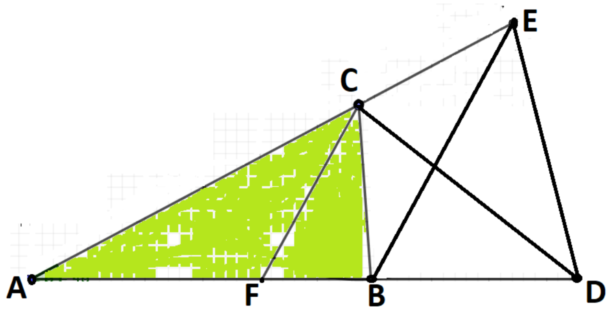
Решение: Дропката $\frac{93}{91}$ треба да ја претставиме како збир од две дропки $\frac{a}{7}$ и $\frac{b}{13}$., односно $\frac{93}{91} = \frac{a}{7} + \frac{b}{13} = \frac{13a+7b}{91}$. Оттука треба $93 = 13a + 7b$, односно $13a = 93 - 7b, a, b \in \mathbb{N}$. Заради тоа што дропките треба да бидат позитивни треба $b \geq 1$, односно $7b \geq 7$. Тогаш $13a = 93 - 7b \leq 86$ што значи дека $a \leq 6$. Од $93 = 13a + 7b$ следи дека $7b = 93 - 13a$, а од тоа што 7 е делител на $7b$, мора 7 да е делител и на $93 - 13a$. За $a = 1$, $93 - 13a = 80$. За $a = 2{,}93 - 13a = 67$. За $a = 3{,}93 - 13a = 54$. За $a = 4{,}93 - 13a = 41$. За $a = 5{,}93 - 13a = 28$. За $a = 6{,}93 - 13a = 15$. Бидејќи од овие шест броеви, само бројот 28 се дели со 7, добиваме дека $a = 5$ и $b = 4$. Значи, бараниот збир е $\frac{93}{91} = \frac{5}{7} + \frac{4}{13}$.

3. Еден работен ден 40% од учениците од првата смена во едно основно училиште за ужина купиле ѓеврек, 36% од учениците купиле сендвич, а останатите купиле кроасан.
Во втората смена во истото училиште:
- бројот на учениците кои за ужина купиле кроасан, е поголем за 37,5% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле кроасан;
- бројот на учениците кои за ужина купиле сендвич, е поголем за 75% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле сендвич; и
- бројот на учениците кои за ужина купиле ѓеврек, е помал за 75% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле ѓеврек.
Во која смена бројот на учениците е поголем од бројот на учениците во другата смена? За колку проценти е поголем?

Решение: Да го означиме со x вкупниот број на ученици од првата смена. За ужина купиле: ѓеврек $0{,}4x$ ученици; сендвич $0{,}36x$ ученици; а кроасан $1 - (0{,}4 + 0{,}36) = 0{,}24$ ученици.
Во втората смена, кроасан купиле: $0{,}24x + 0{,}375 \cdot 0{,}24x = 0{,}33x$ ученици; сендвич купиле $0{,}36x + 0{,}75 \cdot 0{,}4x = 0{,}63x$ ученици; а ѓеврек купиле $0{,}4x - 0{,}75 \cdot 0{,}4x = 0{,}1x$ ученици. Вкупниот број на ученици од втората смена е $0{,}33x + 0{,}63x + 0{,}1x = 1{,}06x = x + 0{,}06x$. Бидејќи $0{,}06 = 6\%$ заклучуваме дека во втората смена во училиштето имало 6% повеќе ученици отколку во првата смена .

4. Во триаголник ABC аголот во темето C, т.е. $\measuredangle ACB$ е $48°$. Нормалата на симетралата на $\measuredangle ACB$ која минува низ темето C ја сече правата AB во точка D, така што точката B лежи меѓу точките A и D и $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{BC}$. Пресметај ги големините на аглите во триаголникот ABC.

Решение: Правата CD која е нормала на симетралата на внатрешниот агол ACB е истовремено и симетрала на надворешниот акол во темето C. Ја продолжуваме страната $\overline{AC}$ преку темето C и на неа ја означуваме точката E така што да важи $\overline{BC} = \overline{CE}$. Триаголниците BCD и CDE се складни според признакот за складност CAC. Од нивната складност следува $\measuredangle CBD = \measuredangle CED$, а $\measuredangle CBD = \alpha + \gamma$. (3) Бидејќи $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AD}$ следува дека триаголникот ADE е рамнокрак со агли $\measuredangle ADE = \measuredangle AED = \alpha + \gamma$. За триаголникот ADE важи $\alpha + 2(\alpha + \gamma) = 180°$ од што добиваме $\alpha = 28°$ и $\beta = 104°$.



VIII одделение

1. Докажи дека бројот $2^{2022} + 6$ е делив со 7.

Решение. $2^1 : 7 = 2 : 7 = 0$ и остаток 2; $2^2 : 7 = 4 : 7 = 0$ и остаток 4 ; $2^3 : 7 = 8 : 7 = 1$ и остаток 1;

$2^4 : 7 = 16 : 7 = 2$ и остаток 2; $2^5 : 7 = 32 : 7 = 4$ и остаток 4; $2^6 : 7 = 64 : 7 = 9$ и остаток 1;

$2^7 : 7 = 128 : 7 = 18$ и остаток 2; $2^8 : 7 = 256 : 7 = 36$ и остаток 4...

Значи, броевите $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$ при делење со 7 даваат остатоци 2,4,1,2,4,..., соодветно, кои периодично се повторуваат после секој трети член. Забележуваме дека секој степен чијшто степенов показател е делив со три, при делење со 7 дава остаток 1. Бидејќи $2022 = 3 \cdot 674$ следува дека 2^{2022} при делење со 7 дава остаток 1, т.е. $2^{2022} = 7a + 1$, $a \in \mathbb{N}$. Според тоа, имаме дека $2^{2022} + 6 = 7a + 1 + 6 = 7a + 7 = 7(a + 1)$. Значи, бројот $2^{2022} + 6$ е делив со 7.

2. Експресниот патнички воз, пред два дена наутро, тргнал од Гевгелија кон Скопје, со неколку вагони во кои имало одреден број патници. На станицата во Велес, од првиот вагон се симнал еден патник, од последниот вагон се симнале два патника, а не се качил ниту еден патник. Тргнувајќи од Велес, во секој вагон од возот имало ист број патници. Истиот воз, со два вагона помалку, попладнето тргнал од Скопје кон Гевгелија со 50 патници помалку во однос на патниците кои тргнале на патување со возот тоа утро од Гевгелија. Притоа, просечниот број на патници по вагон бил 30. Колкав е бројот на патници кои тргнале со возот тоа утро од Гевгелија?

Решение. Нека n е бројот на вагони, а x е вкупниот број на патници во возот кој патувал на релација Гевгелија-Скопје. Ако од првиот вагон се симне еден патник, а од последниот вагон се симнат два патника, тогаш вкупниот број на патници ќе биде $x - 3$, па бројот на патници во еден вагон на релација Гевгелија-Скопје ќе биде еднаков на $\frac{x-3}{n} = k$, $k \in \mathbb{N}$, односно $x - 3 = kn$.

На релација Скопје-Гевгелија бројот на вагони е еднаков на $n - 2$, а вкупниот број на патници е еднаков на $x - 50$. Од условот дека просечниот број на патници по вагон е 30 патника на релација Скопје-Гевгелија, добиваме дека $\frac{x-50}{n-2} = 30$, односно $x - 50 = 30(n - 2)$.

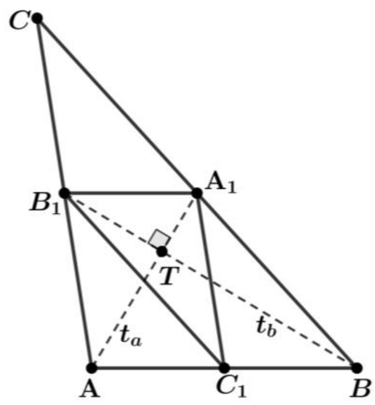
Од $x - 3 = kn$ и $x - 50 = 30(n - 2)$ добиваме дека

$$\begin{cases} x - 3 = kn \\ x - 50 = 30(n-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = kn + 3 \\ kn + 3 - 50 = 30n - 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = kn + 3 \\ 30n - kn = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = kn + 3 \\ (30 - k)n = 13 \end{cases}.$$

Од втората равенка на последниот систем равенки добиваме дека $\begin{cases} 30 - k = 1 \\ n = 13 \end{cases}$, односно $k = 29, n = 13$ или $\begin{cases} 30 - k = 13 \\ n = 1 \end{cases}$, односно $k = 17, n = 1$. Од условите на задачата $n \geq 3$, $k \geq 1$ и $x \geq 51$, па единствено решение на задачата е $k = 29, n = 13$. Според тоа $x = 29 \cdot 13 + 3 = 377 + 3 = 380$, односно бројот на патници кои тргнале со возот тоа утро од Гевгелија е 380.

3. Даден е триаголник ABC со меѓусебно нормални тежишни линии $t_a = 12\text{cm}$ и $t_b = 20\text{cm}$. Пресметај ја плоштината на ΔABC.

Решение. Со A_1, B_1 ги означуваме средините на страните BC и AC, соодветно, па $\overline{AA_1} = t_a = 12\text{cm}$ и $\overline{BB_1} = t_b = 20\text{cm}$. Нека C_1 е средина на отсечката AB. Ги разгледуваме триаголниците AC_1B_1, $A_1B_1C_1$, C_1BA_1 и B_1A_1C. За ΔAC_1B_1 имаме $\overline{AC_1} = \frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{AB_1} = \frac{\overline{AC}}{2}$, и $\overline{C_1B_1} = \frac{\overline{BC}}{2}$ како средна линија во ΔABC. (1) Триаголникот $A_1B_1C_1$ е триаголник чии страни се средните линии на ΔABC, па важи $\overline{A_1B_1} = \frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{B_1C_1} = \frac{\overline{BC}}{2}$, $\overline{A_1C_1} = \frac{\overline{AC}}{2}$. (2)



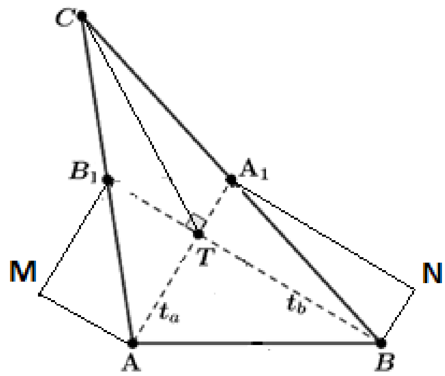
За ΔC_1BA_1 имаме $\overline{C_1B} = \frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{BA_1} = \frac{\overline{BC}}{2}$, и $\overline{A_1C_1} = \frac{\overline{AC}}{2}$ бидејќи A_1C_1 е средна линија во ΔABC. (3)

За ΔB_1A_1C имаме $\overline{B_1A_1} = \frac{\overline{AB}}{2}$ како средна линија во ΔABC, $\overline{B_1C} = \frac{\overline{AC}}{2}$ и $\overline{A_1C} = \frac{\overline{BC}}{2}$. (4)

Од (1), (2), (3) и (4) следува дека ΔABC е составен од четири складни триаголници. Нека со P_1 ја означиме плоштината на секој од четирите складни триаголника. Тогаш плоштината на ΔABC е $P = 4P_1$. Според тоа доволно е да ја пресметаме плоштината P_1.

Бидејќи A_1B_1 е средна линија во ΔABC, таа е паралелна со AB, што значи дека ABA_1B_1 е трапез за чии дијагонали важи $AA_1 \perp BB_1$. Од овде, плоштината на трапезот ќе биде $P_{ABA_1B_1} = \frac{\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1}}{2} = \frac{12 \cdot 20}{2} = 120\text{cm}^2$. Бидејќи трапезот е составен од трите складни триаголника AC_1B_1, $A_1B_1C_1$ и C_1BA_1, секој со плоштина P_1, добиваме $P_{ABA_1B_1} = 3P_1$. Оттука, $P_1 = 40\text{cm}^2$, па добиваме дека $P_{\Delta ABC} = 4P_1 = 4 \cdot 40 = 160\text{cm}^2$.

Второ решение. Со A_1, B_1 ги означуваме средините на страните BC и AC, соодветно, па $\overline{AA_1} = t_a = 12\text{cm}$ и $\overline{BB_1} = t_b = 20\text{cm}$. Бидејќи тежиштето ги дели тежишните линии во однос $1:2$ се добива: $\overline{AT} = 8cm$, $\overline{TA_1} = 4\text{cm}$, $\overline{BT} = \frac{40}{3}cm$ и $\overline{TB_1} = \frac{20}{3}\text{cm}$. Бидејќи плоштината на ΔBTC е еднаква на плоштината на правоаголникот ΔBTA_1N, и плоштината на ΔATC е еднаква на плоштината на правоаголникот ΔATB_1M, следува дека плоштината на ΔBTC е еднаква на збирот од плоштините на правоаголниците ΔBTA_1N, и ΔATB_1M и плоштината на ΔABT.



Според тоа плоштината на ΔABC е

$$\left(\frac{40}{3} \cdot 4 + \frac{20}{3} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{3} \cdot 8\right) cm = \left(3 \cdot \frac{160}{3}\right) cm = 160cm$$

4. Резервоар со вода во еден национален парк секој ден се надополнува со 1 хектолитар вода. Едно стадо од 38 слонови, ќе ја испие целата вода од резервоарот за еден ден, додека пак стадо од 8 слонови ќе ја испие целата вода од резервоарот за 5 денови. Ако секој слон просечно пие исто количество вода, за колку денови, почнувајќи од денес, еден слон може да ја испие целата вода од резервоарот? (Слоновите почнуваат да пијат вода од резервоарот откако тој ќе биде надополнет со вода.)

Решение. Секој ден количеството на вода во резервоарот се зголемува за 1 хектолитар, односно за 100 литри вода. Во еден ден количеството на вода во резерварот е $V + 100$, каде V ја означува количината на вода која била во резервоарот. Според првиот услов, тоа е количината на вода која дневно ја пијат 38 слонови. Ако со s ја означиме количината на вода(во литри) која ја пие еден слон дневно, тогаш од условите на задачата може да го формираме следниот систем равенки:

$$\begin{cases} V + 100 = 38s \\ V + 5 \cdot 100 = 5 \cdot 8s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V + 100 = 38s \\ V + 500 = 40s \end{cases}$$

Со одземање на првата од втората равенка, добиваме дека $2s = 400$, односно $s = 200$ литри.
Сега можеме да го пресметаме количеството на вода која била во резервоарот. Од првата равенка добиваме

$$V = 38s - 100 = 7600 - 100 = 7500,$$

односно во резервоарот имало 7500 литри вода.
Сега со x ќе го означиме непознатиот број на денови за кои еден слон би ја испил целата вода од резервоарот. Тогаш ја имаме следната равенка:

$$x \cdot 200 = 7500 + x \cdot 100.$$

Решавајќи ја равенката добиваме

$$100 \cdot x = 7500 \Leftrightarrow x = 75.$$

Значи, еден слон ќе ја испие целата вода од резервоарот за 75 денови.

IX одделение

1. На две свеќи со иста должина, но различна дебелина потребно им е различо време за целосно да изгорат. На подебелата свеќа ѝ се потребни 4 часа за целосно да изгори, а на потенката свеќа ѝ се потребни 2 часа. Свеќите биле запалени во исто време, одредено време гореле, а потоа двете биле изгаснати. Откако биле изгаснати, остатокот од подебелата свеќа бил три пати подолг од остатокот од потенката свеќа. Колку време гореле свеќите?

Решение: Нека x е должината на свеќите и нека свеќите гореле време t. Од подебелата свеќа за еден час ќе изгори дел со должина $\frac{x}{4}$, а ќе остане дел со должина $x - \frac{x}{4} \cdot t$. Од потенката свеќа за еден час ќе изгори дел со должина $\frac{x}{2}$, а ќе остане дел со должина $x - \frac{x}{2} \cdot t$. Бидејќи остатокот од подебелата свеќа е три пати подолг од остатокот од потенката свеќа, ја добиваме равенката

$$x - \frac{x}{4} \cdot t = 3\left(x - \frac{x}{2} \cdot t\right),$$

чие решение е $t = \frac{8}{5}$ часови. Свеќите гореле 1 час и 36 минути, односно гореле 96 минути.

2. Нека a и b се катетите, а c е хипотенузата на еден правоаголен триаголник. Докажи дека важи неравенстото

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \frac{3}{4}c^4\ .$$

Решение: Од $\mathrm{a}^2 + b^2 = c^2$, со квадрирање добиваме дека $\mathrm{a}^4 + 2ab + b^4 = c^4$. Со замена на c^4 во неравенството, тоа го добива обликот,

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \frac{3}{4}(a^4 + 2a^2b^2 + b^4)\ .$$

Со трансформации ги добиваме следните еквивалентни неравенства:

$$4(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 3(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) \Leftrightarrow 4a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 \geq 3a^4 + 6b^2 + 3b^4$$
$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 \geq 0,$$

Од тоа што за секој реален број x, следува точноста на неравенството $a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \frac{3}{4}c^4$.

3. Одреди го множеството од сите парови цели броеви (a, b), такви што

$$a^2b^2 + 2ab - b^2 + 2b = 2022.$$

Решение: Равенката ја запишуваме во еквивалентен облик:

$$\begin{aligned} a^2b^2 + 2ab - b^2 + 2b = 2022 &\Leftrightarrow a^2b^2 + 2ab + 1 - b^2 + 2b - 1 = 2022 \\ &\Leftrightarrow (ab + 1)^2 - (b - 1)^2 = 2022 \\ &\Leftrightarrow (ab + 1 - b + 1)(ab + 1 + b - 1) = 2022 \\ &\Leftrightarrow (ab - b + 2)(ab + b) = 2022 \\ &\Leftrightarrow (ab - b + 2)b(a + 1) = 2022. \end{aligned}$$

Во последното равенство, десната страна е парен број што не е делив со 4.
- Ако b е парен цел број, тогаш левата страна е делива со 4. Значи b мора да биде непарен.
- Ако a е парен цел број, при што b е непарен, тогаш левата страна е непарен цел број. Значи a мора да биде непарен.
- Ако a и b се непарни цели броеви, тогаш левата страна е делива со 4.

Претходната дискусија покажува дека не постојат цели броеви a и b за кои

$$a^2b^2 + 2ab - b^2 + 2b = 2022.$$

Значи, бараното множество е празното множество.

4. Нека ΔABC е рамнокрак правоаголен триаголник и M и N се две точки од хипотенузата BC , такви што $\angle MAN = 45°$ и $M \in BN$. Докажи дека

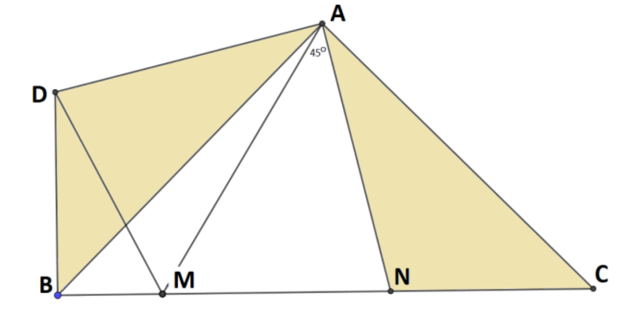
$$\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2.$$

I Решение: Над страната AB, надвор од ΔABC, конструираме ΔABD складен со ΔACN, таков што $\overline{BD} = \overline{NC}$ и $\overline{AD} = \overline{AN}$. Тогаш,

$$\angle MBD = \angle MBA + \angle ABD = \angle ABC + \angle ACN = $$
$$= 45° + 45° = 90°.$$

Уште повеќе,

$$\angle DAM = \angle DAB + \angle BAM = \angle NAC + \angle BAM =$$
$$= \angle BAC - \angle MAN = 90° - 45° = 45° = \angle MAN.$$



Бидејќи $\overline{DA} = \overline{AN}$ и $\overline{AM}$ е заедничка страна, триаголниците DAMи MAN се складни (страна-агол-страна). Заклучуваме дека $\overline{DM} = \overline{MN}$. Според теоремата на Питагора, од правоаголниот триаголник MBD, добиваме дека

$$\overline{MN}^2 = \overline{DM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2,$$

што требаше да се докаже.

II Решение: Заради сличност-пропорционалност, без губење на општост можеме да претпоставиме дека $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$. Го разгледуваме цртежот десно, при што: $PR \perp AB, QR \perp AC, AH \perp BC, \overline{BP} = a, \overline{QC} = b$, $\overline{MH} = x, \overline{HN} = y, \overline{MN} = x + y = m, \overline{AH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Со претходните онаки, треба да докажеме дека:

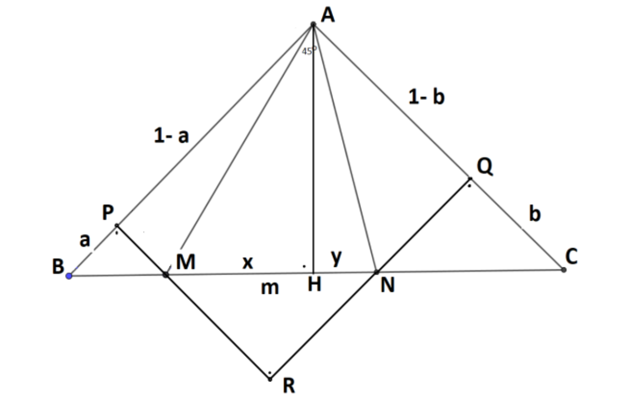
$$m^2 = (a\sqrt{2})^2 + (b\sqrt{2})^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Со споредување на неколку плоштини, добиваме:

$1 = 2P_{ABC} = 2P_{ABM} + 2P_{AMN} + 2P_{ANC} = a + b + \frac{m}{\sqrt{2}}$;(*)

$2P_{APRQ} = 2P_{ABC} - 2P_{BPM} - 2P_{QNC} + 2P_{MRN}$;

$2(1-a)(1-b) = 1 - a^2 - b^2 + \frac{m^2}{2}$. (**)



Од $1 - a^2 - b^2 + \frac{m^2}{2} = 2 - 2a - 2b + 2ab$ следува $2ab = 2(a+b) - 1 - (a^2 + b^2) + \frac{m^2}{2}$.(***)

Од сличноста на триаголниците APM со AHN и AHM со AQN следува дека $(1-a)y = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $(1-b)x = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Понатаму, $2(1-a)(1-b)(x+y) = 2(1-a)(1-b)m = \frac{2}{\sqrt{2}}\big(b(1-a) + a(1-b)\big) = \frac{2}{\sqrt{2}}(a + b - 2ab)$.

Заменувајќи со (*), (**) и (***) се добива:

$$\left(1 - a^2 - b^2 + \frac{m^2}{2}\right)m = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{m}{\sqrt{2}}\right) - \frac{4}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{m}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\,(a^2 + b^2) - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{m^2}{2}$$

$$m - (a^2 + b^2)m + \frac{m^3}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} - m - \frac{4}{\sqrt{2}} + 2m + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\,(a^2 + b^2) - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{m^2}{2}$$

$$-(a^2 + b^2)m + \frac{m^3}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\,(a^2 + b^2) - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{m^2}{2}$$

$$\frac{m^2}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + m\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + m\right)(a^2 + b^2)$$

$$\frac{m^2}{2} = (a^2 + b^2)$$