РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IV ОДДЕЛЕНИЕ

Напомена: Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг начин на решавање на задача којшто е валиден, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на таа задача.

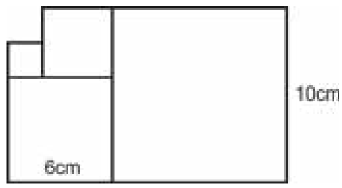
1. Баба Биле од пазар купила јаболка. Внуците на баба Биле за ужинка изеле половина од вкупниот број на јаболката. Дедото на внуците за ужинка изел едно јаболко. Кога внуците вечерта изеле уште половина од преостанатите јаболка, останале само уште три јаболка. Колку вкупно јаболка купила баба Биле?

Решение. (**Нумерус 47-1, Конкурсни задачи, зад.3833**)

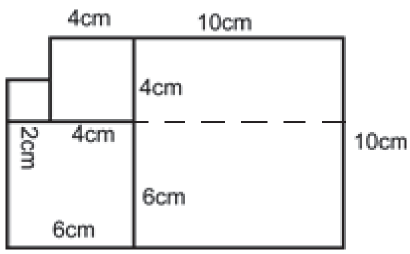
Бидејќи вечерта останале уште три јаболка, значи внуците изеле три јаболка вечерта.(8 поени) Пред тоа биле 6 јаболка. (4 поени) Едно јаболко изел дедото, па биле 7 јаболка. (4 поени)Внуците за ужина изеле 7 јаболка, па баба Биле вкупно купила $7+7=14$ јаболка. (9поени)

2. Фигурата на цртежот е составена од четири квадрати. Одреди го нејзиниот периметар.

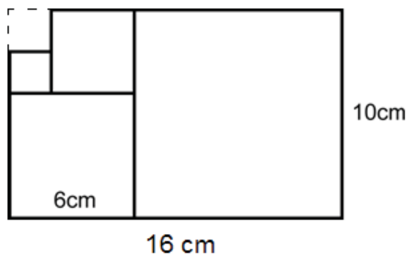
Решение. (**Нумерус 47-1, Конкурсни задачи-решенија, зад.3803**)



Прв начин. Ги одредуваме должините на страните на сите квадрати, како на цртежот, (**10 поени**)



Бараниот периметар изнесува $16+10+14+2+2+2+2+6=52cm.$ (**15 поени**)

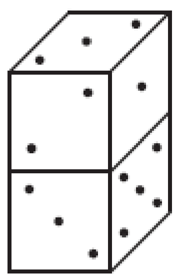


Друг начин: Фигурата има периметар еднаков на периметарот на правоаголник со страни $16cm$ и $10cm$, како на цртежот. (**15 поени**) Затоа, $L=2\cdot(16+10)=52cm.$ (**10 поени**)

3. Колку непарни трицифрени броеви постојат, кај кои цифрата на десетки е 4?

Решение. Цифрата на единици може да биде 1, 3, 5, 7 или 9.(**5 поени**) Цифрата на десетки е 4. Цифрата на стотки може да биде: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.(**5 поени**) За секоја од деветте можности на цифрата на стотки има по 5 такви броеви (на пример, ако цифрата на стотки е 1, тоа се броевите: 141, 143, 145, 147, 149).(**12 поени**) Вкупно има $9\cdot 5=45$ такви броеви.(**3 поени**)

4. На секоја од двете коцки збирот на бројот на точки на секој пар спротивни ѕидови е 7. На цртежот, три од хоризонталните (водорамните) ѕидови на двете коцки не се видливи. Колкав е збирот на бројот на точки на тие три ѕида на коцките на цртежот?



Решение. Збирот на бројот на точки на секој пар спротивни ѕидови е 7, па збирот на двата пара хоризонтални ѕидови на двете коцки е 14. (**15 поени**) На горниот (видлив) ѕид има 3 точки, па на останатите 3 ѕида (невидливи) има 14 – 3 = 11 точки. (**10 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА V ОДДЕЛЕНИЕ

Напомена: Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг начин на решавање на задача којшто е валиден, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на таа задача.

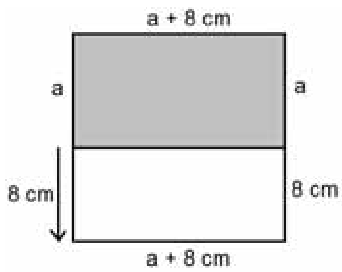
1. Лубеница и дињa тежат вкупно 30 kg. Дињата и тег од 3 kg тежат двојно помалку отколку што е масата на лубеницата. Колку килограми изнесува разликата на масите на лубеницата и дињата?

Решение. (**Нумерус 46-1, Конкурсни задачи, зад.3722**) Бидејќи масата на една лубеница е двојно поголема од масата на една диња и 3 kg, тоа значи дека масата на една лубеница е еднаква на масата на две дињи и 6 kg. (**4поени**) Лубеница и диња тежат 30 kg, па 2 дињи и уште 1 диња и 6 kg тежат 30 kg, односно 3 дињи и 6 kg тежат 30 kg. (**8поени**) Бидејќи (30 – 6) : 3 = 8, добиваме дека дињата тежи 8 kg, лубеницата тежи 30 kg – 8 kg = 22 kg(**10поени**) Бараната разлика на масите изнесува 22 kg – 8 kg = 14 kg.(**3поени**)

2. Два ѕидни часовника се наместени да покажуваат точно време на 21.03.2022 година во 9 часот навечер. Едниот работи точно, а другиот брза по 3 минути на секој час. На кој датум и во колку часот стрелките на двата часовника ќе бидат пак во иста положба како на 21.03.2022 година во 9 часот навечер?

Решение. За да постигнат поклопување на стрелките, часовникот кој брза треба да постигне предност од 12 часа. (**8поени**) Дванаесет часа се 720 минути.(**4поени**) Тоа се 720 : 3 = 240 часа. (**4поени**) 240 часа се 10 дена.(**4поени**) Часовниците ќе бидат во иста положба на 31.03.2022 во 9 часот навечер.(**5поени**)

3. Ако една страна на правоаголникот се зголеми за 8 cm, се добива квадрат со периметар 6,8 dm. Колкав е периметарот на правоаголникот изразен во центиметри?



Решение. *Прв начин:* Периметарот на квадратот е 6,8 dm = 68 cm.(**2 поени**) Нека *a* е помалата страна на правоаголникот.(**4 поени**) Периметарот на квадратот е $L = 4 \cdot (a+8)$,(**4 поени**) што значи дека $4 \cdot (a+8) = 68$, т.е. $a+8 = 17$ cm, од каде се добива дека $a = 9$ cm. (**10 поени**). Според тоа $L = 2 \cdot (9+17) = 52$ cm. (**5поени**)

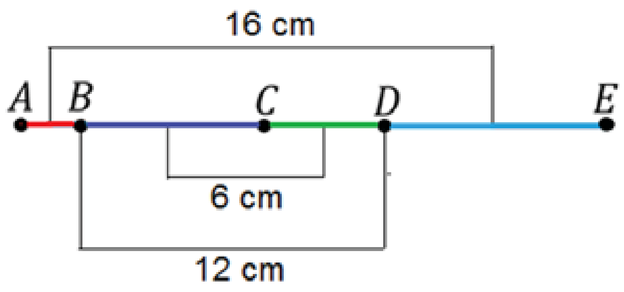
Втор начин: Периметарот на квадратот е 6,8 dm = 68 cm.(**2 поени**) Квадратот со периметар $L = 68$ cm има страна $68 : 4 = 17$ cm. (**8 поени**) Тогаш и една страна на правоаголникот е 17 cm. (**5поени**) Другата страна е за 8 cm помала, што значи таа е 9 cm.(**5 поени**). Конечно $L = 2 \cdot (9+17) = 52$ cm. (**5 поени**)

4. На една права се нанесени по ред точките A, B, C, D, E по тој редослед. Растојанието меѓу средните точки на отсечките AB и DE е $16\ cm$, а растојанието меѓу средните точки на отсечките BC и CD е $6\ cm$. Пресметај ја должината на отсечката AE.

Решение. (**Нумерус 46-1, Конкурсни задачи, зад.3726**) За коректен цртеж се добива **1 поен.**

Од цртежот имаме дека $\overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD}$.(**1 поен**) Од условот на задачата: $\frac{1}{2} \cdot \overline{BC} + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} = 6cm$. (**3 поени**) Според тоа $\overline{BD} = 2 \cdot 6 = 12cm.$ (**5 поени**) Од условот на задачата имаме дека $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} + \overline{BD} + \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} = 16cm.$ (**5 поени**) Затоа, $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} = 16cm - 12cm = 4cm.$ (**5 поени**) Конечно, $\overline{AE} = 16cm + (\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{DE}) = 16cm + 4cm = 20cm.$ (**5 поени**)

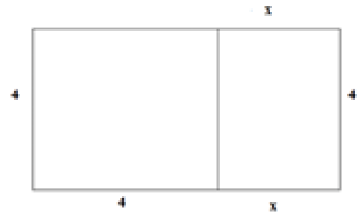
Забелешка: Ако има помошен цртеж со кој се илустрираат некои од чекорите, може да се вреднува со соодветен број поени.



РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VI ОДДЕЛЕНИЕ

1. Во квадрат со плоштина $16dm^2$, две паралелни страни се продолжени при што се добил правоаголник со плоштина $28dm^2$. Одреди ги страните на правоаголникот.

Решение:(Нумерус 46-3, Конкурсни задачи, 5-6 одделение, задача 3783) Од формулата за плоштина на квадрат $P = a^2$ со страна a, можеме да ја пресметаме страната a на квадратот, т.е. имаме $a^2 = 16$, па $a = 4\text{dm}$. **(5)** Ако страните на квадратот се продолжени за должина x, го добиваме правоаголникот како на сликата, чии страни се $4 + x$ и 4 dm. **(5)** Бидејќи плоштината на правоаголникот е $28dm^2$ имаме дека: $4\cdot(4+x) = 28$, **(5)** од каде добиваме дека $4 + x = 7$, па $x = 3\text{dm}$. **(5)** Страните на правоаголникот се 4dm и $4 + x = 4 + 3 = 7\text{dm}$. **(5)**



2. Марко замислил еден број. Бројот го намалил за $12{,}12$ и добиената разлика ја поделил со $\frac{1}{5}$, на резултатот додал $1{,}85$ и добиениот збир го поделил со $0{,}1$. Така го добил бројот $68{,}5$. Кој број го замислил Марко?

Решение: Нека замислениот број е x. Тогаш $\left((x-12{,}12):\frac{1}{5}+1{,}85\right):0{,}1 = 68{,}5$ **(10)**. Од тука $(x-12{,}12):0{,}2+1{,}85 = 68{,}5\cdot 0{,}1$ **(5)** т.е. $(x-12{,}12):0{,}2 = 6{,}85-1{,}85$, па $x-12{,}12 = 5\cdot 0{,}2$ **(5)**. Значи $x = 1+12{,}12$ т.е. $x = 13{,}12$ **(5)**

3. Цифрата на стотките во даден трицифрен број е 7. Ако таа цифра ја преместиме на местото на единиците, цифрата на десетките ја преместиме на местото на стотките и цифрата на единиците ја преместиме на местото на десетките, ќе се добие нов трицифрен број кој е за 567 помал од дадениот број. Најди го дадениот број.

Решение: (**Нумерус 45-4, Конкурсни задачи , 6-7 одделение, задача 3700)** Нека почетниот број е бројот $\overline{7xy}$, каде x и y се цифри. Од условот на задачата $\overline{7xy} = 567 + \overline{xy7}$ **(10)** т.е. $700 + \overline{xy} = 567 + 10\overline{xy} + 7$, **(6)** од каде пак $9\overline{xy} = 126$ т.е. $\overline{xy} = 14$. **(4)** Значи почетниот број е 714. **(5)**

4. На група од дванаесет луѓе, во која има и мажи и жени и деца, им се дадени дванаесет сомуни леб, што тие ги изеле. Притоа, секој маж изел по сомун и пол леб, секоја жена изела по половина сомун леб, и секое дете изело по четвртина сомун леб. Колку биле мажи, колку жени и колку деца во таа група? (Сомун е вид на леб)

Решение: Нека во групата имало x мажи, y жени и z деца. Значи $x + y + z = 12$ и $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 12$. **(5)**

Ако ги средиме равенките т.ш. x и y се од една страна и да ја помножиме втората равенка со 2 ќе добиеме $x + y = 12 - z$ ...(**1**) и $2x + x + y = 24 - \frac{1}{2}z$ ...(**2**). **(5)** Да ја замениме левата страна на првата равенка во втората равенка т.е. $2x + 12 - z = 24 - \frac{1}{2}z$. Изразуваме x т.е. $2x = 12 + \frac{1}{2}z$ т.е. $x = 6 + \frac{1}{4}z$ ...(**3**). **(5)**

Равенката (3) ја заменуваме во равенката (1) $6 + \frac{1}{4}z + y = 12 - z$ т.е. $y = 12 - z - 6 - \frac{1}{4}z$, од каде $y = 6 - \frac{5}{4}z$ **(5)**. Бидејќи x, y, z се природи броеви, мора да биде $z = 4$, од што се добиваат и природни броеви за $x = 7, y = 1$. Значи биле седум мажи, една жена и четири деца. **(5)**

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Одреди го најмалиот природен број кој е делив со 7, а при делење со 2,3,4,5, и 6 дава остаток 1.

Решение: (Нумерус 46-4, Конкурсни задачи, 6-7 одделение, задача 3816, стр. 35) Нека x е бараниот број, тогаш $x-1$ е делив со 2, 3, 4, 5 и 6, **(6 поени)** што значи дека $x-1=\text{НЗС}(2,3,4,5,6)\cdot k=60\cdot k$, **(6 поени)** каде k е природен број, од каде $x=60\cdot k+1$. **(6 поени)** Најмалиот број од обликот $60\cdot k+1$ кој е делив со 7 се добива за $k=5$. **(5 поени)** Бараниот број е $x=60\cdot 5+1=301$. **(2 поени)**

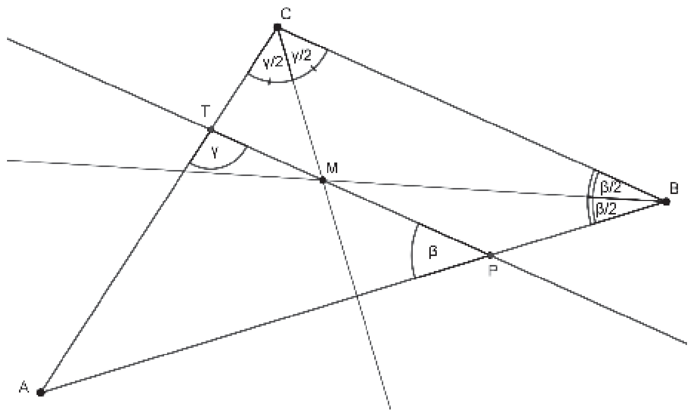
2. Ана, Марија и Јован добиле текст за преведување од англиски на македонски јазик. На Ана и Марија, ако работат заедно им се потребни 30 часови за да го преведат текстот, на Ана и Јован им се потребни 42 часа, а на Марија и Јован 35 часови. Колку време (во часови и минути) им е потребно на Ана, Марија и Јован за да го преведат текстот, ако работат сите тројца заедно?

Решение: (Нумерус 47-1, Конкурсни задачи, 7-8 одделение, задача 3847, стр. 27) Ана и Марија, ако работат заедно, за 1 час преведуваат $\frac{1}{30}$ од текстот. **(2 поени)** Ана и Јован, ако работат заедно, за 1 час преведуваат $\frac{1}{42}$ од текстот. **(2 поени)** Марија и Јован, ако работат заедно, за 1 час преведуваат $\frac{1}{35}$ од текстот. **(2 поени)** Според тоа, ако работат тројцата заедно, за 1 час преведуваат $\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{35}\right):2=\frac{3}{70}$ од текстот. **(8 поени)** Ако со Т го означиме времето потребно за преведување на целиот текст, кога сите тројца работат заедно, добиваме дека $\frac{3}{70}\cdot \mathrm{T}=1$, **(4 поени)** односно $\mathrm{T}=\frac{70}{3}=23\frac{1}{3}$. **(2 поени)** Значи, на Ана, Марија и Јован им се потребни 23 часа и 20 минути, за да го преведат текстот, работејќи сите заедно. **(5 поени)**

3. Даден е триаголник ABC и точка M во него, таква што полуправите BM и CM ги делат аглите ABC и BCA, соодветно, на по два еднакви дела. Низ точката M е повлечена права p паралелна со страната BC. Правата p ги сече страните AB и AC, соодветно, во точки P и T. Докажи дека

$$\overline{BP}+\overline{CT}=\overline{PT}\ .$$

Решение: За точен цртеж **(5 поени)**. Од условот на задачата правата p е паралелна со страната BC на ΔABC. Според тоа AB е трансферзала на p и BC, од каде следува дека $\measuredangle MPA=\measuredangle CBA=\beta$. Ова значи дека $\measuredangle MPB=180^0-\beta$, од каде $\measuredangle BMP=180^0-\left(180^0-\beta+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\beta}{2}$. Значи $\measuredangle PBM=\measuredangle BMP=\frac{\beta}{2}$, па ΔBMP е рамнокрак. Аналогно се заклучува дека правата AC е трансферзала на p и BC, па ΔMCT е рамнокрак. **(11 поени).** Од тука се добива дека $\overline{BP}=\overline{PM}$ и $\overline{CT}=\overline{MT}$. **(5 поени)**



Според тоа: $\overline{BP}+\overline{CT}=\overline{PM}+\overline{MT}=\overline{PT}$. **(4 поени)**

4. На секоја страна (ѕид) на една коцка е запишан еден природен број. На секое теме (ќош) на коцката е запишан производот од трите броја кои се запишани на страните кои го формираат темето (ќошот). Збирот на осумте така добиени производи е 385. Одреди го збирот на броевите кои се запишани на страните на коцката.

Решение: Нека *a, b, c, d, e, f* се природните броеви кои се запишани на ѕидовите на коцката, така што a и b се броеви запишани на спротивни ѕидови, како и *c* и *d*. (**3 поени**). На темињата на коцката се запишани следните броеви *ace, acf, ade, adf, bce, bcf, bde, bdf.* (**3 поени**). Од условот на задачата се добива

$$ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf=(a+b)(c+d)(e+f)=385.$$ **(7 поени**).

Единствен начин да се запише бројот 385 како производ од три множители поголеми од 1 е $385=5\cdot 7\cdot 11$ (**3 поени**), од каде следи дека *a+b*=5, *c+d=7* и *e+f*= 11**. (5 поени)** Ако ги собереме броевите кои се запишани на страните на коцката се добива

$$a+b+c+d+e+f=(a+b)+(c+d)+(e+f)=5+7+11=23.$$ **(4 поени)**

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 45-3, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 3682)
Во текот на учебната година Коста правел неколку тестови по математика и притоа освоил одреден број поени. Ако Коста на следниот тест по математика освои 89 поени, тогаш просечниот број на освоени поени од тестовите ќе биде 91. Но, ако на следниот тест освои 64, тогаш просечниот број на освоени поени ќе биде 86. Колку тестови по математика направил Коста досега?
Решение. Нека n е бројот на досега направени тестови по математика, а x е вкупниот број на освоени поени од досегашните тестови. Ако на следниот тест по математика Коста освои 89 поени, тогаш вкупниот број на освоени поени ќе биде $x+89$, а бројот на тестови $n+1$. Според тоа, ја добиваме равенката $\frac{x+89}{n+1}=91$. **(8)**
Доколку пак на следниот тест по математика Коста освои 64 поени, тогаш вкупниот број на освоени поени ќе биде $x+64$, а бројот на тестови останува ист, т.е $n+1$. Тогаш ја добиваме равенката $\frac{x+64}{n+1}=86$. **(8)** Од $\frac{x+89}{n+1}=91$ добиваме дека $x=91(n+1)-89$, односно $x=91n+2$. **(3)** На ист начин од $\frac{x+64}{n+1}=86$ добиваме дека $x=86n+22$. **(3)** Со изедначување на $x=91n+2$ и $x=86n+22$, ја добиваме равенката $91n+2=86n+22$, односно $91n-86n=22-2 \Leftrightarrow 5n=20 \Leftrightarrow n=4$. Значи, Коста досега направил 4 тестови по математика. **(3)**
2. (Нумерус 47-1, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 3850)
Определи ги целите броеви m и n за кои е исполнето $\frac{147\cdot 7^3+28\cdot 7^4}{7^n}=7^m$ и $\frac{5^4\cdot 25^2}{125^m\cdot 5^{-10}}=5^n$.
Решение. Ќе се обидеме да ги упростиме изразите. Со средување на првиот израз, имаме

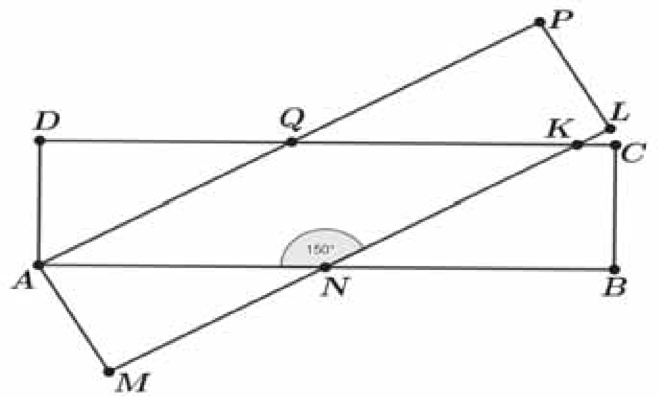
$$\frac{147\cdot 7^3+28\cdot 7^4}{7^n}=7^m \Leftrightarrow \frac{3\cdot 7^2\cdot 7^3+4\cdot 7\cdot 7^4}{7^n}=7^m \Leftrightarrow \frac{3\cdot 7^5+4\cdot 7^5}{7^n}=7^m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7^5\cdot(3+4)}{7^n}=7^m \Leftrightarrow \frac{7^5\cdot 7}{7^n}=7^m \Leftrightarrow \frac{7^6}{7^n}=7^m, \text{ (6)}$$

од каде добиваме дека $7^{6-n}=7^m$, односно $6-n=m$, т.е. $n+m=6$. **(4)** Од друга страна, со средување на вториот израз имаме $\frac{5^4\cdot 25^2}{125^m\cdot 5^{-10}}=5^n \Leftrightarrow \frac{5^4\cdot 5^4}{5^{3m}\cdot 5^{-10}}=5^n \Leftrightarrow 5^{4+4-3m+10}=5^n \Leftrightarrow 5^{18-3m}=5^n$, **(6)**
од каде добиваме дека $18-3m=n$, т.е. $n+3m=18$. **(4)** Од тоа што $n+m=6$ имаме дека $n=6-m$. Со замена во $n+3m=18$, добиваме дека $6-m+3m=18 \Leftrightarrow 2m=12 \Leftrightarrow m=6$, па $n=6-m=6-6=0$. Според тоа, бараните цели броеви се броевите $n=0$ и $m=6$. **(5)**
3. Ивана и Марија отишле на излет. Ивана носела бонбони, а Марија сливи. Половина од своите бонбони Ивана ѝ ги дала на Марија, а половина од своите сливи Марија ѝ ги дала на Ивана. Потоа, Ивана изела 5 сливи по што ѝ останале три пати повеќе бонбони од сливи, а Марија изела 20 бонбони по што ѝ останале два пати помалку сливи од бонбони. Колку бонбони однела Ивана и колку сливи однела Марија на излетот?
Решение. Нека b е бројот на бонбоните на Ивана, а s е бројот на сливите на Марија. Откако Ивана ѝ ги дала на Марија половина од своите бонбони, а Марија ѝ ги дала на Ивана половина од своите сливи, секоја од нив имала $\frac{b}{2}$ бонбони и $\frac{s}{2}$ сливи. **(5)** Од тоа што кога Ивана изела 5 сливи ѝ останале три пати повеќе бонбони од сливи, добиваме дека $\frac{b}{2}=3\left(\frac{s}{2}-5\right)$. **(5)** Од тоа што кога Марија изела 20 бонбони ѝ останале два пати помалку сливи од бонбони, добиваме дека $\frac{b}{2}-20=2\cdot\frac{s}{2}$, односно $\frac{b}{2}-20=s$. **(5)** Сега, со замена на $\frac{b}{2}=3\left(\frac{s}{2}-5\right)$ во $\frac{b}{2}-20=s$ ја добиваме линеарната равенка со една непозната $3\left(\frac{s}{2}-5\right)-20=s$. Тогаш,

$3\left(\frac{s}{2}-5\right)-20=s \Leftrightarrow \frac{3}{2}s-15-20=s \Leftrightarrow \frac{3}{2}s-s=15+20 \Leftrightarrow \frac{3s-2s}{2}=35 \Leftrightarrow \frac{s}{2}=35 \Leftrightarrow s=70$, односно $s=70$. **(5)** Со замена на $s=70$ во $\frac{b}{2}=3\left(\frac{s}{2}-5\right)$, добиваме дека $\frac{b}{2}=3\cdot\left(\frac{70}{2}-5\right) \Leftrightarrow \frac{b}{2}=3\cdot(35-5) \Leftrightarrow \frac{b}{2}=90 \Leftrightarrow b=180$. Значи, Ивана однела 180 бонбони, а Марија однела 70 сливи на излетот. **(5)**

4. Два складни правоаголника $ABCD$ и $AMLP$ со должини на страни $\overline{AB}=\overline{ML}=24\text{cm}$ и $\overline{BC}=\overline{LP}=6\text{cm}$ се преклопуваат како на цртежот. Пресечната точка на страните AP и CD е точката Q, а пресечните точки на страната ML со страните AB и CD се точките N и K, соодветно. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ANKQ$ и должината на отсечката NB, ако $\angle ANL=150°$.



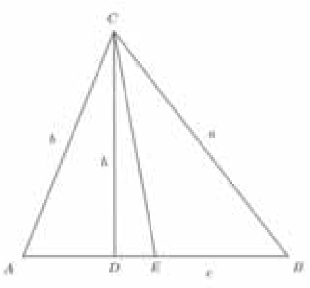
Решение. Од условите на задачата $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{ML}=\overline{PA}=24\text{cm}$ и $\overline{BC}=\overline{LP}=\overline{DA}=\overline{AM}=6\text{cm}$. Од тоа што четириаголникот $ABCD$ е правоаголник, $N\in AB$ и $K,Q\in CD$, за AN и KQ важи $AN \parallel KQ$, и од тоа што четириаголникот $AMLP$ е правоаголник, $Q\in AP$ и $N,K\in ML$ за AQ и NK важи $AQ \parallel NK$. Значи, четириаголникот $ANKQ$ е паралелограм. **(5)** Од тоа што $\angle ANL=150°$, следува дека $\angle BNL=180°-\angle ANL=180°-150°=30°$, односно $\angle NAQ=30°$. **(5)** Според тоа, $\angle QAD=90°-\angle NAQ=90°-30°=60°$. Триаголникот ΔQDA е правоаголен триаголник, па $\angle DQA=90°-\angle QAD=90°-60°=30°$. Според тоа, $\overline{AQ}=2\overline{AD}=12\text{cm}$. **(5)** Од тоа што четириаголникот $ANKQ$ е паралелограм и AM и AD се негови висини, добиваме дека $P_{ANKQ}=\overline{AN}\cdot\overline{AD}$ и $P_{ANKQ}=\overline{NK}\cdot\overline{AM}$. Отука имаме $\overline{AN}\cdot\overline{AD}=\overline{NK}\cdot\overline{AM}$. Но, $\overline{AM}=\overline{AD}$ и $\overline{NK}=\overline{AQ}$, па добиваме дека $\overline{AN}=\overline{NK}$, односно $\overline{AN}=\overline{NK}=\overline{AQ}=12\text{cm}$. Според тоа, плоштината на четириаголникот $ANKQ$ е еднаква на $P_{ANKQ}=72\text{cm}^2$. **(5)** Од $\overline{NB}=\overline{AB}-\overline{AN}$, добиваме дека $\overline{NB}=12\text{cm}$. **(5)**

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. Нека a, b, c се броеви различни од нула, такви што $b(c+a)$ е аритметичка средина на броевите $a(b+c)$ и $c(a+b)$. Ако $b=\frac{2019}{2020}$, пресметај ја аритметичката средина на броевите $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$.

Решение. (**Нумерус 46-1, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 3708**) Од условот имаме $a(b+c)+c(a+b)=2b(c+a)$ **(10 бодови)**, што е еквивалентно со $2ac=ab+bc$ **(5 бодови)**. По делењето на последното равенство со abc ($\neq 0$ бидејќи $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$) добиваме $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ **(5 бодови)**. Користејќи го последно добиеното равенство, за бараната аритметичка средина се добива $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{b}=\frac{2020}{2019}$ **(5 бодови)**.

2. Во остроаголниот ΔABC должините на страните a, b и c се поврзани со релацијата $a+b=2c$, каде што $a>b$. Од темето C се повлечени висина $\overline{CD}$ и тежишна линија $\overline{CE}$. Докажи дека $\overline{DE}=a-b$.
Решение. (**Нумерус 46-4, Конкурсни задачи, 9 одделение, задача 3827**) Точката E е средишна за страната



c, па важи $\overline{AE}=\overline{BE}=\frac{c}{2}$. Од триаголникот ΔADC имаме дека $h^2=b^2-\overline{AD}^2=b^2-\left(\frac{c}{2}-\overline{DE}\right)^2$, **(4 бодови)** а од триаголникот ΔBDC имаме дека $h^2=a^2-\overline{BD}^2=a^2-\left(\frac{c}{2}+\overline{DE}\right)^2$. **(4 бодови)** Со изедначување на висините добиваме $b^2-\left(\frac{c}{2}-\overline{DE}\right)^2=a^2-\left(\frac{c}{2}+\overline{DE}\right)^2$, **(7 бодови)** т.е. $b^2-\frac{c^2}{4}+c\overline{DE}-\overline{DE}^2=a^2-\frac{c^2}{4}-c\overline{DE}-\overline{DE}^2$, $b^2+c\overline{DE}=a^2-c\overline{DE}$, т.е. $2c\overline{DE}=a^2-b^2$.**(5 бодови)** Но, $a+b=2c$, па следува дека $(a+b)\overline{DE}=(a-b)(a+b)$, т.е. $\overline{DE}=a-b$, што требаше да се докаже. **....(5 бодови)**

3. Годините на таткото и неговите две деца (не се близнаци) се степени на ист прост број. Пред една година бројот на годините на секој од нив бил прост број. Колку години има сега таткото, а колку има секое од неговите деца? (Познато е дека такото има помалку од сто години)

Решение. Нека p^a, p^b и p^c се бараните броеви на годините, каде што p е прост број, а a, b и c се природни броеви **(5 бодови)**. По услов на задачата имаме дека пред една година броевите на годините p^a-1, p^b-1 и p^c-1 се прости броеви **(5 бодови)**. Ако $p=2$, тогаш степените на бројот 2 се:

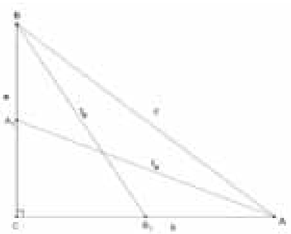
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... **(5 бодови)**

Од нив ги избираме оние од кои кога ќе се одземе 1 се добива прост број. Тоа се броевите 4, 8 и 32 (бидејќи 4-1=3, 8-1=7 и 32-1=31). Бидејќи тешко дека некој ќе има повеќе од 120 години, единствена можност е таткото да има 32 години, едното дете 8 години и другото 4 години **(5 бодови)**.

Ако $p\geq 3$, тогаш p^a, p^b и p^c се непарни броеви. Кога од нив ќе се одземе бројот 1 се добиваат парни броеви кои не може да се прости броеви. Значи, задачата нема друго решение. **(5 бодови)**

4. Ако тежишните линии на правоаголен триаголник може да се страни на правоаголен триаголник, тогаш должината на барем една катета на дадениот триаголник е ирационален број. Докажи!

Решение. За точен цртеж **(5 бодови)** Од цртежот следува: $t_a^2=b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$, $t_b^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2, t_c\ =R=\frac{c}{2}$



(5бодови) Од $t_c^2=\frac{c^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ следува дека t_c е помала и од t_a и од t_b. **(4бодови)** Нека со тежишните линии на дадениот триаголник може да се формира правоаголен триаголник. Тогаш една од нив е најголема т.е. е хипотенуза, а тоа може да е од t_a или t_b. Без губење на општост, нека е тоа t_b. **(2бодови)**
Тогаш според Питагоровата теорема важи:$t_b^2=t_a^2+t_c^2$. Ако изразите за квадратите на тежишните линии ги замениме во последната формула имаме:$a^2+\frac{b^2}{4}=b^2+\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}$ т.е. $3a^2=3b^2+c^2$. Од $c^2=a^2+b^2$добиваме дека $a^2=2b^2$, т.е. $a=b\sqrt{2}$. **(4 бодови)** Ако b е ирационален број, доказот е завршен. Ако b е рационален број, тогаш а е ирационален број и доказот е завршен. **(5 бодови)**