26. ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. Одреди ги сите позитивни цели броеви a, b, c за кои е исполнето равенството

$$a^2 + b^2 + 1 = c!.$$

Решение. Доколку $c \geq 4$, тогаш $4|c!$. **(2п)** Да забележиме дека за секој цел број x важи $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$. **(1п)** Затоа имаме дека $a^2+b^2+1 \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$. Меѓутоа, $4|c!$ повлекува $4|a^2 + b^2 + 1$, што е контрадикција. Заклучуваме дека $1 \leq c \leq 3$. **(3п)** Со директна проверка за $c = 1, 2, 3$ добиваме дека единствените решенија во позитивни цели броеви се $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ и $(a, b, c) = (2, 1, 3)$. **(2п)**

2. Нека a, b и c се позитивни реални броеви за кои важи $a + b + c = 3$. Да се докаже дека

$$\frac{a^3}{a^2+1} + \frac{b^3}{b^2+1} + \frac{c^3}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Нека левата страна од неравенството кое треба да го покажеме ја означиме со A, односно

$$A = \frac{a^3}{a^2+1} + \frac{b^3}{b^2+1} + \frac{c^3}{c^2+1}.$$

Да забележиме дека

$$3-A = a+b+c-A = \left(a - \frac{a^3}{a^2+1}\right)+\left(b - \frac{b^3}{b^2+1}\right)+\left(c - \frac{c^3}{c^2+1}\right) = \frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \quad \textbf{(3п)}$$

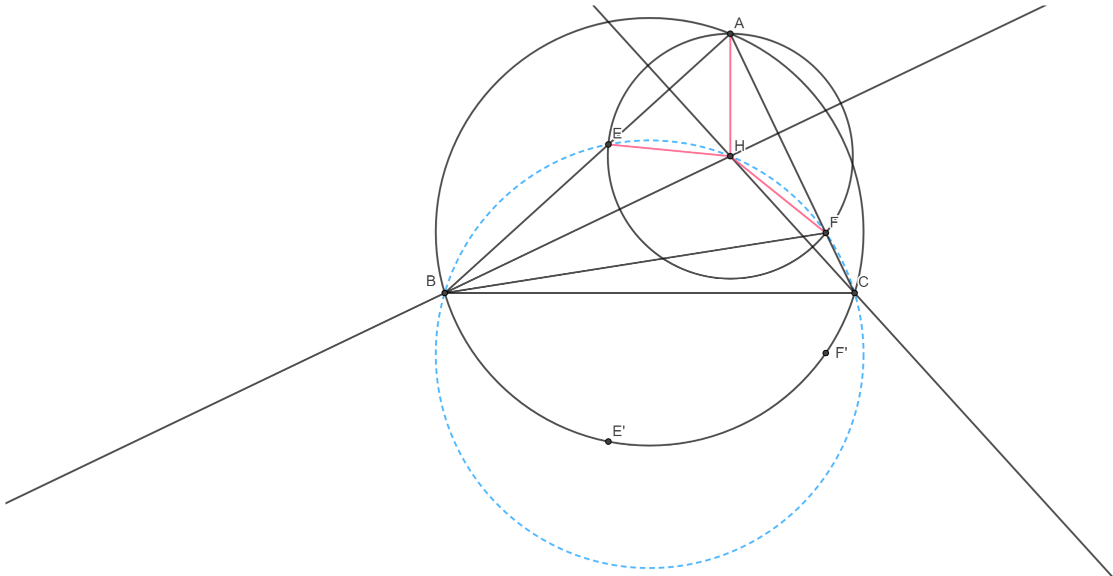
Сега, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме дека $a^2 + 1 \geq 2a$, $b^2 + 1 \geq 2b$ и $c^2 + 1 \geq 2c$ **(1п)**, па

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{a}{2a} + \frac{b}{2b} + \frac{c}{2c} = \frac{3}{2} \quad \textbf{(3п)}$$

Оттука, $3 - A \leq \frac{3}{2}$, што е еквивалентно со $A \geq \frac{3}{2}$, што ѝ требаше да се докаже. **(1п)**

3. Нека $\triangle ABC$ е остроаголен триаголник со ортоцентар H. Кружницата Γ со центар во H и радиус AH ги сече правите AB и AC во точки E и F, соодветно. Нека E', F' и H' се слики на точките E, F и H, соодветно, при осна симетрија во однос на правата BC. Докажи дека точките A, E', F' и H' лежат на иста кружница.

Решение. Сакаме да докажеме дека точките E', F' и H' лежат на опишаната кружницата околу $\triangle ABC$, што ќе ја означиме со ω. **(2п)**



Да го увидиме следново: $AH = EH = FH$, $CH \perp AB$ и $BH \perp AC$. Следува BH и CH се симетрали на отсечките $\overline{AF}$ и $\overline{AE}$, соодветно. Оттука, добиваме $AB = FB$ и $AC = EC$. Сега имаме:

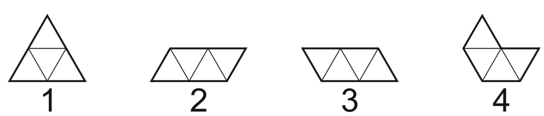
$$\angle CBH = \angle CAH = \angle EAC - \angle EAH = \angle AEC - \angle AEH = \angle CEH,$$

од каде следува дека четириаголникот $BEHC$ е тетивен. Аналогно, и $BFHC$ е тетивен. **(3п)** Како слика на E при осна симетрија во однос на BC , за E' важи

$$\angle BE'C = \angle BEC = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC,$$

па следува E' лежи на ω. Аналогно, докажуваме дека и F' лежи на ω. **(2п)** Конечно, имаме дека $\angle BH'C = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, што значи дека и H' лежи на ω. Оттука имаме дека $'$, F', H' сите се на ω, што значи дека $AE'H'F'$ е тетивен. **(1п)**

4. Рамностран триаголник T, со страна 2022, е поделен со прави паралелни на неговите страни на рамнострани триаголничиња со страна еден. Триаголникот се покрива со фигурите на цртежот, при што фигурите се составени од по 4 рамнострани триаголничиња со страна еден и при покривањето може да се ротираат за агол $k \cdot 60^\circ$, за $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

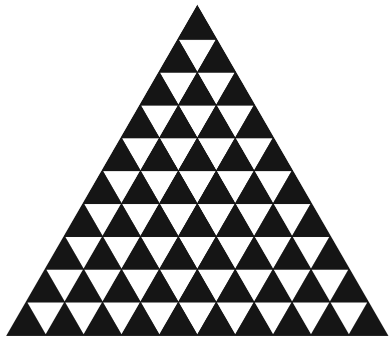


Покривањето ги задоволува следните услови:

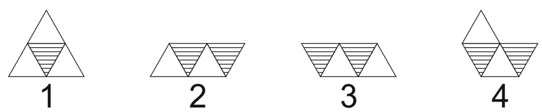
- Може да нема фигура од некој тип и може да има повеќе фигури од ист тип. Триаголничињата на фигурите се поклопуваат со триаголничињата на кои е поделен триаголникот T.
- Секое триаголниче од T е покриено, никои две фигури не се преклопуваат и никоја фигура не излегува надвор од T.

Кој е најмалиот можен број на фигури од тип 1 кои се искористени при вакво покривање?

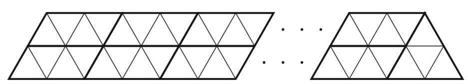
Решение. На триаголникот ги боиме малите триаголничиња наизменично со црна и бела боја, при што триаголничињата кои содржат теме од T се црни (како што е прикажано на цртежот за триаголник со страна 10). **(2п)**



Да забележиме дека фигурите од тип 2, 3 и 4 ќе покриваат по две бели и две црни полиња, а фигурите од тип 1 покриваат 3 полиња од една боја, едно од другата. Ова може да се види од следниот цртеж, при што штрафираните полиња се во една боја, а останатите во другата боја.



Од друга страна во секој „ред" во T има едно повеќе црно триаголниче, отколку бели (наизменично се менуваат боите, а се почнува и завршува со црно). Според ова, во T има 2022 црни полиња повеќе од бели, па мора да се употреби најмалку $\frac{2022}{2} = 1011$ фигура од тип 1. **(4п)**
На следниот цртеж е прикажано покривање на два „реда" со една фигура од тип 1 и фигури од тип 2, со што докажуваме постоење на покривање со точно $\frac{2022}{2} = 1011$ фигури од тип 1 и фигури од тип 2. **(2п)**



5. Нека n е позитивен цел број таков што $n^5 + n^3 + 2n^2 + 2n + 2$ е полн куб. Да се докаже дека $2n^2 + n + 2$ не може да биде полн куб.

Решение. Да претпоставиме спротивно. Нека $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2a + 2$ и $2a^2 + a + 2$ се полни кубови, односно, постојат цели броеви x и y такви што

$$a^5 + a^3 + 2a^2 + 2a + 2 = x^3,$$
$$2a^2 + a + 2 = y^3.$$

Тогаш имаме

$$x^3 - y^3 = a^5 + a^3 + a = a(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1),$$

што може да се презапише како

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = a(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1). \quad \textbf{(2п)}$$

Да забележиме дека десната страна од последното равенство е делива со 3. Тоа повлекува дека $3|x-y$ или $3|x^2+xy+y^2$. Бидејќи $x^2+xy+y^2 = (x-y)^2+3xy$, следува дека $3|x^2+xy+y^2$ ако и само ако $3|x-y$, па заклучуваме дека секако $3|x-y$. **(1п)**
Од претходната дискусија имаме дека и $3|x^2 + xy + y^2$, од каде заклучуваме дека $9|x^3 - y^3$, па затоа и $9|a(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$. **(2п)** Сега да забележиме дека никои два од броевите a, a^2-a+1 и a^2+a+1 не може истовремено да бидат деливи со 3, со што ги добиваме следните случаи.
Случај 1°**:** Ако $9|a$, тогаш

$$x^3 \equiv a^5 + a^3 + 2a^2 + 2a + 2 \equiv 2 \pmod 9,$$

што не е можно, бидејќи 2 не е кубен остаток по модул 9. **(1п)**
Случај 2°**:** Ако $9|a^2+a+1$, тогаш

$$a(a+1)=a^2+a\equiv 8 \pmod 9,$$

но, со директна проверка може да се утврди дека производ на два последователни цели броеви никогаш не дава остаток 8 по модул 9. **(1п)**
Случај 3°**:** Ако $9|a^2-a+1$, тогаш

$$a(a-1)=a^2-a\equiv 8 \pmod 9,$$

што исто така не е возможно како во претходниот случај. **(1п)**