

**XXXVII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА
УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ**

13.04.2019 година

IV одделение

1. Една верверичка во текот на првата недела собрала 84 ореви, во текот на втората недела 96 ореви, а во текот на третата недела 65 ореви. Друга верверичка во четвртата недела собрала трипати повеќе ореви, отколку првата верверичка во втората и третата недела заедно. Колку вкупно ореви собрале двете верверички во текот на четирите недели?

Решение. Првата верверичка собрала $84 + 96 + 65 = 245$ ореви во текот на трите недели. Втората верверичка во четвртата недела собрала вкупно $3 \cdot (96 + 65) = 3 \cdot 161 = 483$ ореви. Двете верверички заедно собрале $245 + 483 = 728$ ореви.

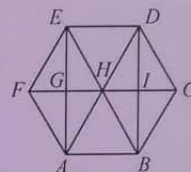
2. Во еден град на главната права улица се наоѓаат училиште, кино и пошта, во тој редослед. Од училиштето до поштата растојанието е $1\text{ km } 215\text{ m}$, а растојанието меѓу училиштето и киното е за третина помало. Колкаво е растојанието од поштата до киното?

Решение. Растојанието од училиштето до поштата е 1215 m , а од училиштето до киното е $1215 : 3 = 405\text{ m}$. Ова значи дека киното е поблиску до училиштето и оддалеченоста од киното до поштата е $1215 - 405 = 810\text{ m}$.

3. (Нумерус 44/1, стр. 33, зад. 3484) Определи го бројот и напиши ги сите триаголници на цртежот десно.

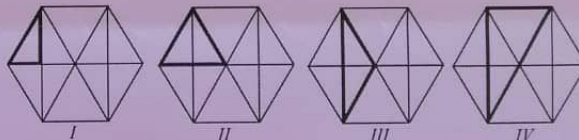
Решение. Прв начин. Бараните триаголници се:

$ABH, BCH, BCI, BIH, CDH, ICD, HID, BCD, BDH, EDH, EFH,$
 $EFG, EGH, FAH, FAG, GAH, AEF, EAH, ABE, ABD, ADE, DEB,$



што значи дека на цртежот вкупно има 22 триаголници.

Втор начин. На цртежот има четири вида триаголници: I, II, III и IV вид, кои се прикажани со задебелени линии. Од I вид има 8 триаголници, од II вид има 6 триаголници, од III вид има 4 триаголници и од IV вид има 4 триаголници.



Според тоа, вкупно има $8 + 6 + 4 + 4 = 22$ триаголници.

4. (Нумерус 44/2, стр. 14, зад. 3510) На отсечката AB избрана е точка C . Отсечката AB е 4 пати подолга од отсечката AC . Определи ги должините на отсечките AB и AC , ако должината на отсечката CB е 24 cm .

Решение. Прв начин. Ако отсечката AB ја поделиме на 4 еднакви дела, бидејќи таа е 4 пати подолга од отсечката AC , тоа значи дека отсечката AC е еден од четирите еднакви дела на отсечката AB . Тоа пак значи дека отсечката CB ги содржи останатите три дела од отсечката AB . Бидејќи должината на отсечката CB е 24 cm , значи дека еден од четирите дела на отсечката AB е долг $24 : 3 = 8\text{ cm}$. Значи, отсечката AC е долга 8 cm , а отсечката AB е долга $8 \cdot 4 = 32\text{ cm}$.

Втор начин. Ако должината на отсечката AC ја обележиме со x , тогаш за должината на отсечката AB важи $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, односно

$$x + 24 = 4x$$

$$3x = 24$$

$$x = 8\text{ cm}$$

Отсечката AB е долга $8 \cdot 4 = 32\text{ cm}$.

5. На 6 дрвја има 129 птици. Во еден момент одлетале 6 птици од првото дрво, 11 од второто, 8 од третото, 10 од четвртото, 7 од петтото и 9 од шестото. Тогаш на сите дрвја останале ист број на птици. По колку птици имало на секое дрво на почетокот?

Решение. Кога одлетале птиците од шесте дрвја останале

$$129 - (6 + 11 + 8 + 10 + 7 + 9) = 129 - 51 = 78.$$

На сите дрвја останале по ист број на птици, значи $78:6=13$. На секое дрво останале по 13 птици. На почетокот на првото дрво имало $13+6=19$ птици, на второто $13+11=24$, на третото $13+8=21$, на четвртото $13+10=23$, на петтото $13+7=20$ и на шестото дрво $13+9=22$.

V одделение

1. Во првата гајба има 1999 јаболка повеќе од втората гајба. Во која гајба ќе има повеќе јаболка и за колку, ако од првата гајба префрлиме 1000 јаболка во втората гајба.

Решение. Ако во втората гајба има x јаболка, тогаш во првата има $x+1999$. По префрлањето, во првата ќе има $x+999$, а во втората $x+1000$. Следува дека во втората има едно јаболко повеќе.

2. Една живинарска фарма испорачала 720 јајца. При транспортот се искршиле 140 јајца. Останатите јајца биле спакувани во кутии по 12 јајца. Колку кутии јајца биле спакувани. Дали останале нескршени јајца кои не може да се спакуваат?

Решение. Од 720 јајца после транспортот останале $720-140=580$ јајца. Тие треба да се спакуваат во кутии по 12, значи би имале $580:12=48$ кутии и останале 4 јајца кои нема да можат да се спакуваат на овој начин.

3. Даден е квадрат со плоштина 36cm^2 . Да се определи должината на правоаголникот кој има ширина 3cm и ист периметар како и квадратот.

Решение. Плоштината на квадратот е $P=36\text{cm}^2$ од каде се добива дека страната на квадратот е 6cm , а неговиот периметар е $L_k=4\cdot 6=24\text{cm}$. Тогаш, ако во равенката за периметар на правоаголник замениме $L_p=2a$ и $b=3\text{cm}$, добиваме $L_p=2a+2b\Rightarrow 24=2a+2\cdot 3$, од каде што следи дека $2a=24-6\Rightarrow 2a=18$, односно $a=9\text{cm}$.

4. (Нумерус 44/1, стр. 35, зад. 3490) Благоја учествувал во лотарија во која секоја среќка е означена со некој трицифрен број. Тој ги купил сите среќки означени со броевите чиј производ на цифрата на десетките и цифрата на единиците е еднаков на 12, а збирот на тие две цифри за 1 се разликува од цифрата на стотките. Колку среќки и со кои броеви купил Благоја?

Решение. Нека со D ја означиме цифрата на десетките и со E цифрата на единиците. Според условот на задачата производот на цифрата на десетките и цифрата на единиците е еднаков на 12, па затоа можни парови (D, E) се: $(6, 2)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$.

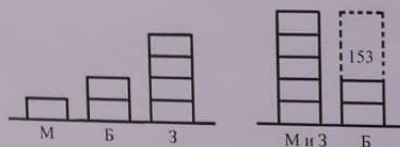
Збирот $D+E$ на првите два пара е 8, па затоа во овој случај цифрата на стотките може да биде 7 или 9. Според тоа, Благоја ги купил среќките со броевите 726, 762, 926 и 962.

Збирот $D+E$ на вторите два пара е 7, па затоа во овој случај цифрата на стотките може да биде 6 или 8. Според тоа, Благоја ги купил среќките со броевите 634, 643, 834 и 843.

Бидејќи ги купил сите среќки означени со броеви со дадените својства, Благоја вкупно купил 8 среќки.

5. (Нумерус 44/1, стр. 35, зад. 3491) Марио, Бојан и Златко имаат определен број сликчици. Бојан има двапати повеќе сликчици од Марио, а Златко има двапати повеќе сликчици од Бојан. Златко и Марио заедно имаат 153 сликчици повеќе од Бојан. Колку сликчици има секој од нив?

Решение. Ако бројот на сликчките на Марио го означиме со еден правоаголник, тогаш бројот на сликчките на Бојан е означен со 2, а на Златко со 4 правоаголници. Значи, бројот на сликчките кои заедно ги имаат Марио и Златко е означен со 5 правоаголници, па затоа на 1 правоаголник му соодветствува бројот $153:3=51$. Според тоа, Марио има 51 сликчици, Бојан има $2\cdot 51=102$ сликчици и Златко има $4\cdot 51=204$ сликчици.



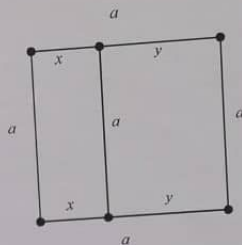
VI одделение

1. Во една продавница има 800 тетратки и таа работи од понеделник до петок. Во една недела биле продадени сите тетратки така што во секој ден биле продадени по 40 тетратки повеќе од претходниот ден. По колку тетратки биле продадени секој ден од таа недела?

Решение. Нека во понеделник биле продадени x тетратки. Тогаш, во вторник биле продадени $x+40$ тетратки, во среда $x+80$, во четврток $x+120$ и во петок $x+160$ тетратки. Биле продадени сите тетратки, па затоа $x+x+40+x+80+x+120+x+160=800$. Оттука, следува $5x+400=800$, односно $x=80$. Значи, во понеделник биле продадени 80 тетратки, во вторник 120, во среда 160, во четврток 200 и во петок 240 тетратки.

2. Квадрат е исечен на два правоаголници. Збирот на периметрите на двата правоаголници е за 210 cm поголем од периметарот на квадратот. Плоштината на едниот правоаголник е четири пати поголема од плоштината на другиот правоаголник. Пресметај го периметарот на помалиот правоаголник.

Решение. Бидејќи збирот на периметрите на правоаголниците е за две должини на страната на квадратот поголем од периметарот на квадратот, следува дека $a = 210 : 2 = 105\text{ cm}$. Од друга страна, плоштината на поголемиот правоаголник е четири пати поголема од плоштината на помалиот, а двата имаат една иста страна (страната на квадратот), па затоа втората страна на поголемиот правоаголник е четири пати поголема од втората страна на помалиот, т.е. $y = 4x$. Од $x + y = a = 105$, следува $x = 21\text{ cm}$. Следува дека периметарот на помалиот правоаголник изнесува $2 \cdot (105 + 21) = 252\text{ cm}$.



3. Од некоја сума прво се одбиени 5% за трошоци, потоа 90 денари за заеднички потреби, а остатокот е поделен на три лица подеднакво. Колку изнесува целата сума ако секое лице добило по 160 денари?

Решение. Секое лице добило по 160 денари, па значи пред поделбата имало $160 \cdot 3 = 480$ денари. Ако на оваа сума се додадат 90 денари, се добива сума од 570 денари. Бидејќи 5% се одбиени од целата сума, следува дека 570 е 95% од целата сума. Значи, почетната сума е $570 \cdot 100 : 95 = 600$ денари.

4. (Нумерус 43/3, стр. 30, зад. 3446) Определи ги природните броеви a и b за кои важи $a < b$, $ab = 13824$ и $\text{NZD}(a, b) = 24$.

Решение. Од $\text{NZD}(a, b) = 24$ следува дека $a = 24x$ и $b = 24y$, каде $\text{NZD}(x, y) = 1$. Понатаму, заменуваме во $ab = 13824$ и добиваме $24x \cdot 24y = 13824$, т.е. $xy = 24$, каде $\text{NZD}(x, y) = 1$. Но, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ и како $a < b$ имаме $x < y$, па затоа од $\text{NZD}(x, y) = 1$ и $xy = 24$ следува $x = 1, y = 24$ или $x = 3, y = 8$. Конечно, бараните броеви се $a = 24, b = 576$ или $a = 72, b = 192$.

5. (Нумерус 44/1, стр. 37, зад. 3494) Елена и Десанка заедно располагаат со шест монети од по 50 денари и 4 банкноти од по 100 денари. На колку начини може подеднакво да ги поделат парите.

Решение. Елена и Десанка заедно имаат $6 \cdot 50 + 4 \cdot 100 = 700$ денари, па така секоја од нив треба да добие по $700 : 2 = 350$ денари. Нека x е бројот на монетите од по 50 денари, а y е бројот на банкнотите од по 100 денари кои ги добила Елена. Притоа важи $50x + 100y = 350$, односно $x + 2y = 7$, каде $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Од $x + 2y = 7$, заклучуваме дека x е непарен број, т.е. $x \in \{1, 3, 5\}$.

Ако $x = 1$, тогаш $y = (7 - 1) : 2 = 3$, што значи дека Елена добила 1 монета од по 50 денари и 3 банкноти од по 100 денари. Ако $x = 3$, тогаш $y = (7 - 3) : 2 = 2$, што значи дека Елена добила 3 монети од по 50 денари и 2 банкноти од по 100 денари. Ако $x = 5$, тогаш $y = (7 - 5) : 2 = 1$, што значи дека Елена добила 5 монети од по 50 денари и 1 банкнота од по 100 денари.

Конечно, Елена и Десанка парите може да ги поделат на трите опишани начини.

VII одделение

1. Кои собироци треба да се изостават во изразот $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$, за вредноста на новиот збир да биде 1?

Решение. Бидејќи

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{60}{120} + \frac{30}{120} + \frac{20}{120} + \frac{15}{120} + \frac{12}{120} + \frac{10}{120} = \frac{147}{120} \text{ и } \frac{120}{120} = 1,$$

треба да избришеме собироци кои дават збир $\frac{147}{120} - \frac{120}{120} = \frac{27}{120}$. Значи треба да ги избришеме

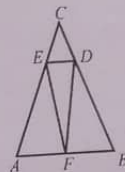
собироците $\frac{15}{120}$ и $\frac{12}{120}$, односно собироците $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{10}$.

2. (Нумерус 44/2, стр. 19, зад. 3520) Секогаш кога ќе исполни желба на сопственикот должината на правоаголниот волшебен килим се намалува за $\frac{1}{2}$ од постојната должина, а ширината се намалува за $\frac{1}{3}$ од постојната ширина. По три исполнети желби килимот имал плоштина 18 dm^2 . Почетната ширина на килимот била $1,8 \text{ m}$. Определи ја почетната должина на килимот. Определи ја почетната плоштина на килимот.

Решение. Нека x е почетната должина на килимот. Почетната ширина на килимот е $1,8 \text{ m} = 18 \text{ dm}$. По исполнувањето на првата желба должината на килимот е $\frac{1}{2}x$, а ширината е $18 - \frac{1}{3} \cdot 18 = 12 \text{ dm}$. По исполнувањето на втората желба должината на килимот е $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x$, а ширината е $12 - \frac{1}{3} \cdot 12 = 8 \text{ dm}$. По исполнувањето на третата желба должината на килимот е $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}x$, а ширината е $8 - \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} \text{ dm}$. Сега за плоштината на килимот добиваме $\frac{1}{8}x \cdot \frac{16}{3} = 18$, од каде наоѓаме $x = 27 \text{ dm} = 2,7 \text{ m}$. Конечно, почетната плоштина на килимот е $P = 2,7 \cdot 1,8 = 4,86 \text{ m}^2$.

3. (Нумерус 44/1, стр. 38, зад. 3498) 3498. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. На краците AC и BC на $\triangle ABC$ се земени точки E и D , соодветно, такви што $\overline{CE} = \overline{CD}$, а точката F е средина на основата AB . Докажи дека $\triangle EDF$ е рамнокрак.

Решение. Бидејќи $\overline{EA} = \overline{CA} - \overline{CE} = \overline{CB} - \overline{CD} = \overline{DB}$, $\angle EAF = \angle DBF$ (агли при основата на рамнокракиот $\triangle ABC$) и $\overline{AF} = \overline{FB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ (точката F е средина на страната AB), од признакот SAC следува дека $\triangle AEF \cong \triangle BDF$. Од складноста на овие триаголници следува дека $\overline{EF} = \overline{DF}$, што значи дека $\triangle EDF$ е рамнокрак.



4. Определи го четирицифрениот број \overline{xyzt} за кој важи $\overline{xyzt} + 4 \cdot \overline{yzt} + 2 \cdot \overline{zt} = 2018$.

Решение. Од условот на задачата добиваме $1000x + 500y + 70z + 7t = 2018$. Цифрата на единиците на првите три собирачи во последното равенство е 0, па за цифрата на единиците на збирот да е 8, потребно е цифрата на единиците на производот $7t$ да е 8. Единствена можност е $t = 4$, што значи дека равенството го добива обликот $1000x + 500y + 70z = 1990$, односно $100x + 50y + 7z = 199$. Цифрата на единиците на првите два собирачи на последното равенство е 0, па за цифрата на единиците на збирот да е 9, единствена можност е $z = 7$, т.е. $100x + 50y = 150$. Конечно, бидејќи бараниот број е четирицифрен од последното равенство следува $x = y = 1$ и затоа $\overline{xyzt} = 1174$.

5. Производот на еден двоцифрен и еден трицифрен природен број е запишан во декаден запис само со цифрата 2. Одреди ги тие броеви.

Решение. Производот на еден двоцифрен и еден троцифрен број е поголем од $10 \cdot 100 = 1000$, а помал од $100 \cdot 1000 = 10000$, па производот е еден од броевите 2222 или 22222. Ако производот е бројот $2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101$, тогаш можни се случаите $11 \cdot 202$ или $22 \cdot 101$. (5) Ако производот е бројот $22222 = 2 \cdot 41 \cdot 271$, тогаш можни се случаите $82 \cdot 271$ или $41 \cdot 542$.

VIII одделение

1. Телефонскиот број на Ѓурѓа се состои од два трицифрени броја, напишани едноподруго. Секој од нив е делив со 45, а средната цифра им е 8. Одреди го телефонскиот број, ако трицифрениот број што е запишан од лево во телефонскиот број е помал од трицифрениот број од десно.

Решение. Нека бараниот телефонски број е $\overline{a8bc8d}$. Ако секој од броевите $\overline{a8b}$ и $\overline{c8d}$ е делив со 45, тогаш тие мора да се деливи со 5 и со 9. Следува последната цифра е 5 или 0. Ако последната цифра е 5, тогаш и првата цифра мора да е 5, бидејќи само 585 е делив со 9. Ако последната цифра е 0, тогаш првата цифра е 1. Бидејќи првиот број (запишаниот од лево) е помал, бараниот број е 180585.

2. (Нумерус 43/3, стр. 32, зад. 3452) Во една дробка именителот е за три поголем од броителот. Ако броителот на оваа дробка го зголемиме за 2, а именителот го зголемиме трипати, тогаш збирот на така добиената дробка и почетната дробка е еднаков на 1. Определи ја почетната дробка.

Решение. Нека x е почетната дробка. По според тоа, $\frac{x}{x+3} + \frac{x+2}{3(x+2)}$ последователно добиваме

Според тоа, почетната

3. Страната на правоаголниот базено

Решение. Нека n е бројот на часови. Според тоа, $\frac{n(n-3)}{2} = 252$, односно $n^2 - 3n - 504 = 0$. Следува дека $n = 24$.

4. (Нумерус 44/1, стр. 38, зад. 3498) 3498. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. На краците AC и BC на $\triangle ABC$ се земени точки E и D , соодветно, такви што $\overline{CE} = \overline{CD}$, а точката F е средина на основата AB . Докажи дека $\triangle EDF$ е рамнокрак.

Решение. Нека $\angle A = \angle B = \alpha$. Според тоа, $\angle EAF = \angle DBF = \alpha$. Според тоа, $\angle EFD = \angle DFE = \alpha$. Според тоа, $\triangle EDF$ е рамнокрак.

5. Нека е даден правоаголник $ABCD$ со $\overline{AB} = 20 \text{ cm}$ да се пр

Решение. Нека $\angle A = \alpha$. Според тоа, $\angle EAF = \angle DBF = \alpha$. Според тоа, $\angle EFD = \angle DFE = \alpha$. Според тоа, $\triangle EDF$ е рамнокрак.

Следува $\angle C_2CC_1 = \alpha$. Според тоа, $\triangle C_2CC_1$ е рамнокрак.

Триаголникот CC_1C_2 е правоаголен со $\angle C_1CC_2 = 90^\circ$.

Следува $P_{\triangle ABC} = 2P_{\triangle AC_1C_2}$.

1. Три девојки седеле на третиот

го поделат проплетот на земила по 3 јагодини години има секоја добила секоја од

Решение. Според тоа, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Според тоа, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Според тоа, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Следува $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Според тоа, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Решение. Нека x е броителот на почетната дробка. Тогаш $x+3$ е нејзиниот именител, а $\frac{x}{x+3}$ е почетната дробка. После зголемувањето на броителот и именителот ја добиваме дробката $\frac{x+2}{3(x+3)}$. Според тоа, $\frac{x}{x+3} + \frac{x+2}{3(x+3)} = 1$. Ако првата дробка ја прошириме со 3 и ги собереме добиените дробки последователно добиваме

$$\frac{3x}{3(x+3)} + \frac{x+2}{3(x+3)} = 1$$

$$\frac{4x+2}{3(x+3)} = 1$$

$$4x+2 = 3x+9$$

$$x = 7.$$

Според тоа, почетната дробка е $\frac{x}{x+3} = \frac{7}{10}$.

3. Страната на правилен многуаголник е со должина 1cm . Колкав е периметарот на овој правилен многуаголник ако тој има 252 дијагонали?

Решение. Нека правилниот многуаголник има n страни. Тогаш бројот на неговите дијагонали е $\frac{n(n-3)}{2} = 252$, односно $n(n-3) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 24 \cdot 21$.

Следува дека $n = 24$, а периметарот изнесува 24cm .

4. (Нумерус 44/1, стр. 46, зад. 295) Еден базен се полни со една цевка. Ако дотокот на водата во базенот се намали за 20%, за колку проценти ќе се зголеми времето на полнење на базенот?

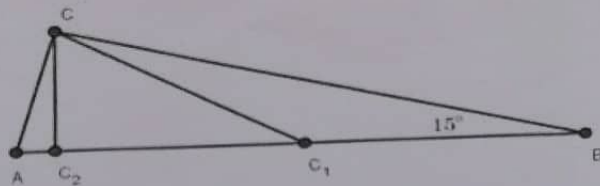
Решение. Нека за 1 час од цевката во базенот истекува a литри вода и нека базенот се полни x часови. Тогаш волуменот на базенот е $V = ax$ литри. Ако дотокот на водата се намали за 20%, тогаш во базенот за 1 час ќе истекуваат $0,8a$ литри. Ако y е времето потребно за да во овој случај се наполни базенот, тогаш за волуменот на базенот имаме $V = 0,8ay$. Според тоа, $ax = 0,8ay$, од каде добиваме $10x = 8y$, т.е. $y = 1,25x = x + 0,25x$, што значи дека со намален доток на вода за 20% времето на полнење на базенот ќе се зголеми за 25%.

5. Нека е даден правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и аголот во темето B е 15° . Ако $AB = 20\text{cm}$ да се пресмета плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека CC_1 е тежишна линија во $\triangle ABC$, а CC_2 е висина. Тогаш $\triangle CC_1B$ и $\triangle ACC_1$ се рамнокраки триаголници, со агли при основата од 15° и 75° , соодветно. Од $\angle ACC_2 = 15^\circ$ и $\angle ACC_1 = 75^\circ$ следува $\angle C_2CC_1 = 60^\circ$ т.е. $\angle CC_1C_2 = 30^\circ$.

Триаголникот CC_1C_2 е правоаголен и CC_2 е катета спроти аголот од 30° , па е половина од хипотенузата т.е. $CC_2 = \frac{CC_1}{2} = 5\text{cm}$. Следува $P_{\triangle AC_1C} = \frac{AC_1 \cdot CC_2}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25\text{cm}^2$. Конечно

$$P_{\triangle ABC} = 2P_{\triangle AC_1C} = 50\text{cm}^2.$$



IX одделение

1. Три девојки Ана, Маја и Александра, во шумата набрале 770 јаготки и одлучиле меѓусебно да ги поделат пропорционално со бојот на своите години. Секогаш кога Маја земала 4 јаготки, Ана земала по 3 јаготки, а на секои 6 јаготки кои ги земала Маја, Александра земала по 7 јаготки. Колку години има секоја од девојките, ако е познато дека тие заедно имаат 35 години? По колку јаготки добила секоја од нив?

Решение. Годините на Ана, Маја и Александра да ги означиме со x , y и z , соодветно. Од условот на задачата имаме,

$$\begin{cases} x+y+z=35 \\ y:x=4:3 \\ y:z=6:7 \end{cases}$$

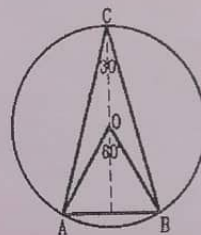
Следува $x = \frac{3}{4}y$ и $z = \frac{7}{6}y$, па со замена во $x+y+z=35$, имаме дека $x=9$, $y=12$ и $z=14$. Бидејќи $770:35=22$, добиваме дека Ана добила $9 \cdot 22=198$ јаготки, Маја добила $12 \cdot 22=264$ јаготки, а Александра добила $22 \cdot 14=308$ јаготки.

2. (Нумерус 44/2, стр. 28, зад. 309) Ако p е прост број поголем или еднаков на 3, тогаш 12 е делител на p^2+11 . Докажи!

Решение. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш $p=6k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}$. Според тоа, $p^2+11=(6k \pm 1)^2+11=36k^2 \pm 12k+1+11=12(3k^2 \pm k+1)$, што значи дека $12 | p^2+11$.

3. (Нумерус 44/2, стр. 28, зад. 308) Во круг со радиус $r=12 \text{ cm}$ е впишан рамнокрак триаголник ABC со агол при врвот еднаков на 30° . Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC .

Решение. Бидејќи аголот при врвот на рамнокракиот триаголник ABC е еднаков на 30° , следува дека централниот агол $\angle AOB$ е еднаков на 60° . Според тоа, триаголникот AOB е рамностран, па затоа $\overline{AB}=12 \text{ cm}$. Висната на триаголникот ABC е еднаква на збирот на висината на триаголникот AOB и радиусот на опишаната кружница. Значи, $h_c = \overline{OC} + \frac{\overline{OB}\sqrt{3}}{2} = 12 + 6\sqrt{3} = 6(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}$. Од Питагоровата теорема следува дека $\overline{AC} = \overline{BC} = 12\sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ cm}$. Според тоа, периметарот на триаголникот е еднаков на $24\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 12 \text{ cm}$, а плоштината е еднаква на $36(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$.



4. Даден е $\triangle ABC$ со симетрала на аголот кај темето A , $AL (L \in BC)$. Точката $M \in AC$ е таква што $ML \parallel AB$. Нека β' е надворешниот агол при темето B на $\triangle ABC$ и $\angle ACB : \beta' = 5 : 11$.

а) Определи го односот $\angle CAB : \angle ACB$.

б) Ако $\angle ALB = 80^\circ$, определи го $\angle ALM$.

Решение. а) Според условот на задачата имаме $\angle ACB = 5a$ и $\beta' = 11a$, па затоа $\angle BAC + 5a = 11a$, односно $\angle BAC = 6a$. Според тоа, $\angle CAB : \angle ACB = 6a : 5a = 6 : 5$.

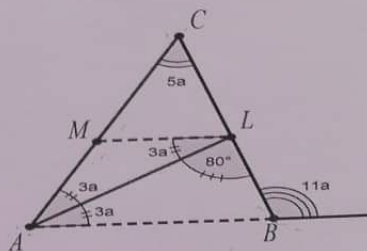
б) Од условот на задачата следува:

$\angle BAL = \angle LAM = 3a$ (симетрала на аголот при темето A),

$\angle BAL = \angle ALM = 3a$ (пар наизменични агли),

$\angle ALB = \angle LAC + \angle ACL$ (надворешен агол за $\triangle ALC$).

Значи, $80^\circ = 3a + 5a$, па затоа $a = 10^\circ$ и $\angle ALM = 3a = 30^\circ$.



5. Ако $x = 10^{2019}$, тогаш 54 е делител на $x^2 + x - 2$. Докажи!

Решение. Го трансформираме изразот $x^2 + x - 2$ и добиваме

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) = \underbrace{(1000\dots0-1)}_{2019} \underbrace{(1000\dots0+2)}_{2019} = \frac{999\dots9}{2019} \cdot \frac{1000\dots2}{2019}$$

Првиот множител е делив со 9, а вториот со 6, од каде следува дека 54 е делител на $x^2 + x - 2$ кога $x = 10^{2019}$.